

Instituto de Ciencias del Seguro

**El análisis financiero dinámico como  
herramienta para el desarrollo de modelos  
internos en el marco de Solvencia II**

Pablo Durán Santomil  
Luis A. Otero González

**FUNDACIÓN MAPFRE**

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o del editor.

© 2010, FUNDACIÓN MAPFRE  
Paseo de Recoletos 23  
28004 Madrid (España)

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)  
[publicaciones.ics@mapfre.com](mailto:publicaciones.ics@mapfre.com)

ISBN: 978-84-9844-217-5  
Depósito Legal: SE-5395-2010  
Printed by Publidisa

## PRESENTACIÓN

FUNDACIÓN MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y sectores menos favorecidos de la sociedad. En este marco, el Instituto de Ciencias del Seguro de FUNDACIÓN MAPFRE promueve y desarrolla actividades educativas y de investigación en los campos del seguro y de la gerencia de riesgos.

En el área educativa, su actuación abarca la formación académica de postgrado y especialización, desarrollada en colaboración con la Universidad Pontificia de Salamanca, así como cursos y seminarios para profesionales, impartidos en España e Iberoamérica. Estas tareas se extienden hacia otros ámbitos geográficos, mediante la colaboración con instituciones españolas y de otros países, así como a través de un programa de formación a través de Internet.

El Instituto promueve ayudas a la investigación en las áreas científicas del riesgo y del seguro y mantiene un Centro de Documentación especializado en seguros y gerencia de riesgos, que da soporte a sus actividades.

Asimismo, el Instituto también promueve y elabora informes periódicos y monografías sobre el seguro y la gerencia de riesgos, con objeto de contribuir a un mejor conocimiento de dichas materias. En algunos casos estas obras sirven como referencia para quienes se inician en el estudio o la práctica del seguro, y en otros, como fuentes de información para profundizar en materias específicas.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación de este cuaderno, que recoge el resultado de la Ayuda a la Investigación Riesgo y Seguro, que FUNDACIÓN MAPFRE concedió a sus autores en la convocatoria de 2007. El trabajo ha sido tutorizado por Juan José Zahonero de MAPFRE S.A..

Desde hace unos años, Internet es el medio por el que se desarrollan mayoritariamente nuestras actividades, ofreciendo a los usuarios de todo el mundo la posibilidad de acceder a las mismas, de una manera rápida y eficaz, mediante soportes Web de última generación a través de [www.fundacionmapfre.com](http://www.fundacionmapfre.com).

**Pablo Durán Santomil** es licenciado en Administración y Dirección de Empresas y en Economía, y Doctor en Finanzas. Sus principales áreas de investigación son la medición y gestión del riesgo en Solvencia II y las finanzas internacionales, campos en los que es autor de varios artículos de investigación. En los últimos años ha impartido docencia en el Departamento de Economía Financiera y Contabilidad de la Universidad de Santiago de Compostela.

**Luis Otero González** es profesor titular del Departamento de Economía Financiera y Contabilidad de la Universidad de Santiago de Compostela. Su actividad docente se inicia en 1995 y es Doctor en Finanzas desde 2001, con la tesis "La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos". Sus principales áreas de investigación son la gestión del riesgo de instituciones financieras y aseguradoras, finanzas internacionales y emprendimiento empresarial. Es autor de numerosos artículos de investigación y libros de finanzas.

## INTRODUCCIÓN

La necesidad de medir el riesgo está cobrando un gran interés en las entidades financieras, y en concreto, en las compañías de seguros. El entorno competitivo en el que se desarrolla la actividad, los recientes escándalos y crisis financieras, y los cambios en la regulación que se avecinan, especialmente la puesta en marcha de Solvencia II, han impulsado la aplicación de técnicas modernas de evaluación del riesgo. Dentro de estas últimas destaca particularmente el Análisis Financiero Dinámico (*Dynamic Financial Analysis* o DFA). Bajo esta denominación se engloban los modelos de simulación estocástica del negocio asegurador que proyectan los flujos de liquidez y los activos y pasivos de las compañías aseguradoras.

La técnica DFA permite el análisis integral del riesgo soportado de una aseguradora mediante la configuración de modelos internos, opción que se promueve en el nuevo marco regulatorio propuesto por la Unión Europea. Estos modelos permiten evaluar el impacto, tanto en la solvencia de la compañía como en su rentabilidad, de distintas decisiones de negocio. De esta forma DFA se está convirtiendo en una parte cada vez más importante del conjunto de herramientas de gestión que utilizan los aseguradores.

La reciente aprobación, el 10 de noviembre de 2009, de la Directiva sobre Solvencia II ha provocado que se inicie el proceso de transposición a las normativas de los diferentes países de la Unión Europea, que deberá realizarse antes del 31 de octubre de 2012. La entrada en vigor de Solvencia II transformará por completo el sistema de determinación de las necesidades de capital del asegurador, fomentando el desarrollo de modelos DFA. Las técnicas expuestas en este trabajo son relativamente novedosas para el mercado asegurador español, que tiene una reducida experiencia en la implantación de modelos internos.

La nueva regulación de las necesidades de capital de las aseguradoras europeas, Solvencia II, ha marcado el objetivo general de este trabajo de investigación, que consiste en analizar el proceso de construcción de modelos internos de medición del riesgo mediante análisis financiero dinámico. En este sentido, en una primera parte se explica la técnica DFA y su aplicación al negocio asegurador no vida. Posteriormente, se evalúan submodelos parciales alternativos para los diferentes riesgos y se comparan con el modelo estándar actualmente propuesto en Solvencia II. El trabajo culmina con la presentación de un modelo interno alternativo al estándar. Cabe destacar que las dificultades para disponer de datos internos de las compañías han limitado la segunda parte de nuestro trabajo para alguno de los riesgos. Los objetivos específicos que se quieren lograr con este trabajo son:

- Analizar la nueva regulación de solvencia del sector asegurador que se implantará en la Unión Europea en el horizonte de 2012. Al mismo tiempo, se revisan los sistemas de determinación de capital de los principales países desarrollados.
- Justificar la selección del análisis financiero dinámico (DFA) como la técnica apropiada para el desarrollo de modelos internos.
- Explicar las principales herramientas cuantitativas necesarias para la configuración de un modelo interno basado en DFA.
- Evaluar las alternativas para la modelización de los riesgos de activo y pasivo, su calibración y comparación con el modelo estándar.
- Proponer un modelo interno basado en los submodelos que mejor se ajustan a la medición de los principales riesgos.

Para alcanzar los objetivos establecidos, este trabajo se estructura en seis capítulos. El primero está dedicado al análisis de la normativa de solvencia de las compañías aseguradoras en los principales países desarrollados. No obstante, se ha puesto un mayor énfasis en el estudio de la reforma del sistema de determinación de los requerimientos de capital que se está llevando a cabo en la Unión Europea. El segundo capítulo se dedica al estudio de la técnica DFA orientada al diseño de modelos internos, alternativa que se promueve en el nuevo sistema de solvencia. En el tercer capítulo se revisan las herramientas cuantitativas necesarias para la elaboración de un modelo interno. El cuarto capítulo aborda las diferentes alternativas para la modelización de los pasivos de las compañías de seguros generales. En el quinto capítulo se detallan las distintas técnicas para la modelización de los riesgos que le afectan a los activos y al riesgo operativo, y se comparan, para los riesgos principales, con el modelo estándar. Finalmente, en el sexto capítulo, a partir de los modelos evaluados en los dos capítulos previos, se elabora una propuesta de modelo DFA que permite la comparación con el modelo estándar.

El primer capítulo de este trabajo pone de relieve la importancia de la actividad aseguradora en la economía y analiza la estabilidad del sistema, impulsada principalmente por la solvencia de las compañías aseguradoras. Después de definir el concepto de solvencia, se analiza, desde un punto de vista crítico, el marco legal que regula en la actualidad los requisitos impuestos en Solvencia I. A continuación, se procede a describir el nuevo acuerdo de capital que, bajo la denominación de Solvencia II, constituirá al sistema futuro en el ámbito de la Unión Europea. En este sentido, se lleva a cabo una revisión de la Directiva aprobada por el Ecofin (Consejo de Ministros de Economía y Finanzas), de los recientes estudios de impacto cuantitativo (QIS) realizados por el Comité Europeo de Supervisores del Seguro (CEIOPS) para la calibración de la fórmula estándar y de las características que tienen que cumplir los modelos internos para su aprobación. En particular, se presta especial atención al cuarto estudio de impacto cuantitativo (QIS4), que ha sido realizado a lo largo del año 2008, al ser el último donde se detalla la fórmula estándar para la determinación de las cargas de capital. También se abordan las simplificaciones propuestas, los métodos alternativos que se testan y la

calibración de los riesgos realizada. Dicho análisis se realizará de forma comparativa con el modelo de solvencia de España (MES v.1) elaborado por ICEA (Investigación Cooperativa entre Entidades Aseguradoras y Fondos de Pensiones) y UNESPA (Unión Española de Entidades Aseguradoras y Reaseguradoras) y con el modelo propuesto por el CEIOPS en el tercer estudio de impacto cuantitativo (QIS3), ambos realizados en el año 2007. Asimismo, se incluye una breve referencia a los modelos de solvencia desarrollados en otros países.

El segundo capítulo tiene por objeto analizar la técnica DFA y justificar su elección cómo la alternativa más apropiada para la construcción de modelos internos. En primer lugar se hace una revisión histórica desde sus orígenes hasta el momento actual. A lo largo de esta evolución se presentan los impulsores de dicha técnica y su interrelación con otras similares de gestión de riesgos como son la gestión de activos y pasivos (ALM) y la gestión integral de riesgos (ERM), o técnicas de análisis de la solvencia como el test de solvencia dinámico (DST). En segundo lugar, se realiza una revisión bibliográfica y se justifica la adecuación de esta técnica para el desarrollo de modelos internos. Finalmente, se detallan las etapas necesarias para la elaboración de un modelo DFA así como los aspectos relevantes de cada una de ellas.

El tercer capítulo está dedicado a la revisión de las herramientas cuantitativas necesarias para la elaboración de un modelo interno. La modelización estocástica de las variables determinantes de la evolución de los activos y pasivos implica la integración de diversos modelos y técnicas financieras, matemáticas y actuariales. Los modelos DFA emplean muchas variables aleatorias con complejas relaciones y recurren a las técnicas de simulación de Monte Carlo. La simulación es un sistema por el cual se generan números aleatorios, generalmente siguiendo una cierta distribución de probabilidad. Para ello es frecuente realizar el ajuste a distribuciones paramétricas a partir de un conjunto de observaciones. De esta forma, abordamos los principales test de bondad de ajuste y los criterios para la selección de modelos. Además, los escenarios generados deben reflejar las relaciones de dependencia que hay entre las distintas variables. En este sentido se discute porqué el coeficiente de correlación lineal, empleado por el modelo estándar, es una medida incapaz de reconocer relaciones no lineales. La dependencia bajo condiciones extremas se incorpora en un modelo DFA a través de las cópulas. Por ello, en este capítulo se realiza una revisión de la tipología de cópulas, sus características principales y cómo estas pueden ser empleadas al construir un modelo interno. Finalmente, se trata la Teoría del Valor Extremo (*Extreme Value Theory*, EVT) que cada día está cobrando más importancia en la gestión del riesgo de las compañías aseguradoras, en especial, en la modelización de la cuantía de los siniestros y del riesgo operativo.

El cuarto capítulo está dedicado a la modelización de los pasivos de las compañías de seguros no vida. En primer lugar se hace referencia a todos los aspectos relevantes en la proyección de los pasivos para, en segundo lugar, centrarnos en sus componentes esenciales: la siniestralidad, la provisión para prestaciones pendientes y el reaseguro. El riesgo de primas en Solvencia II se analiza a través de la

insuficiencia de la prima para hacer frente a la siniestralidad y los gastos de la compañía. Dado que la importancia porcentual de los gastos y su variabilidad es mucho menor que el de la siniestralidad, nos centraremos principalmente en la última. Analizamos la tradicional modelización de la siniestralidad agregada a través del número de siniestros y la severidad de los mismos. Frente a esta alternativa, establecemos la posibilidad de emplear una única distribución, ratios de siniestralidad (*loss ratios*) o distribuciones para la frecuencia relativa y el coste medio de los siniestros. Todas estas distribuciones deben ser ajustadas a los datos históricos por lo que se abordará la estimación de parámetros, principalmente a través del método de los momentos y de la estimación de máxima verosimilitud. A su vez, el riesgo de reserva en Solvencia II se analiza a través de la insuficiencia de la provisión para prestaciones para hacer frente a los pagos futuros. En este sentido se analizan técnicas deterministas y estocásticas, prestando especial atención a la técnica basada en el remuestreo o *bootstrapping*. Finalmente, se estudia la inclusión del reaseguro dentro de un modelo interno.

El quinto capítulo de este trabajo está dedicado a la modelización de los riesgos que le afectan a los activos de las compañías aseguradoras y al riesgo operativo. En este sentido se han evaluado distintas propuestas que se englobarían dentro de un modelo DFA para los principales riesgos de mercado que afectan al asegurador (renta variable, *spread* y tipos de interés). Los distintos modelos se han calibrado utilizando una serie histórica más reciente que la utilizada en el modelo estándar, comparando los resultados en términos de las cargas de capital resultantes. En líneas generales encontramos que los requerimientos de capital de los modelos parciales evaluados para los distintos submódulos del riesgo de mercado analizados superan a los del modelo estándar. Para el resto de riesgos se describe una metodología para su cuantificación.

En el sexto y último capítulo se elabora una propuesta de modelo DFA que utiliza una selección de los submodelos evaluados en los capítulos previos. El objetivo concreto de este capítulo es exponer, desde un punto de vista práctico, la implantación de un modelo interno completo por parte de una compañía aseguradora no vida española. El denominado modelo DFA-USC v.1 engloba todos los riesgos considerados actualmente por el CEIOPS para el cálculo de los requerimientos de capital en Solvencia II. En este sentido, se describe el modelo empleado, las simplificaciones efectuadas, la calibración de los diferentes modelos a la información de mercado y a los datos internos de una compañía, así como las ventajas y desventajas que dicho acercamiento presenta respecto a la fórmula estándar. Aplicando dicho modelo a una hipotética compañía, se aborda la determinación del capital de solvencia (SCR) y del requisito mínimo de capital (MCR) que se compara con aquel que resultaría de la aplicación del modelo estándar.

Finalmente queremos agradecer la ayuda recibida de la Fundación MAPFRE para la elaboración de este trabajo de investigación, y en especial a Juan José Zahonero por la atención prestada.

# ÍNDICE

CAPÍTULO 1. LA SOLVENCIA DE LAS COMPAÑÍAS ASEGURADORAS .....	1
1. Introducción.....	1
2. Visión general de los acuerdos de Solvencia.....	2
3. Los requerimientos de capital en Solvencia I.....	5
4. El nuevo proyecto de la UE: Solvencia II.....	10
4.1. Fases del proyecto Solvencia II.....	13
4.2. La Directiva de Solvencia II.....	17
4.3. Los tres pilares de Solvencia II.....	32
4.4. Modelos de control interno en Solvencia II.....	38
4.5. Principales diferencias entre Solvencia I y Solvencia II.....	40
5. El cuarto estudio de impacto cuantitativo (QIS4). Un análisis comparativo con el QIS3 y el Modelo Español de Solvencia.....	44
5.1. Valoración de activos y pasivos.....	44
5.2. Provisiones técnicas no vida.....	46
5.3. Fondos propios.....	50
5.4. La fórmula estándar del SCR en QIS4. Análisis comparativo con el QIS3 y MES.....	50
5.4.1. El capital de solvencia básico (BSCR).....	55
5.4.2. SCR asociado al riesgo de mercado (SCRmercado).....	57
5.4.3. Riesgo asociado a la contraparte (SCRcontraparte).....	83
5.4.4. Riesgo asegurador no vida (SCRno vida).....	90
5.4.5. El riesgo operacional (SCRoperacional).....	107
5.5. MCR o Minimum Capital Requirement.....	109
6. Sistemas de solvencia de otros países desarrollados.....	114
6.1. Reino Unido (ECR y ICA).....	114
6.2. Suiza (SST).....	116
6.3. Países Bajos (DST).....	119
6.4. EE.UU. Sistema RBC o Modelo NAIC.....	123
6.5. Australia.....	127
6.6. Canadá.....	129
6.7. Propuesta de Alemania para Solvencia II (GDV 2005).....	130
6.8. Modelos de agencias de rating (Caso de S&P).....	132

6.9. Propuesta CEA.....	133
6.10. Propuesta IAA.....	135
7. Resumen de los modelos analizados.....	136

**CAPÍTULO 2. EL ANÁLISIS FINANCIERO DINÁMICO (DFA)..... 141**

1. Introducción.....	141
2. Historia y evolución de los modelos de DFA.....	143
3. ¿Qué es realmente DFA?.....	146
3.1. Técnicas de gestión del riesgo.....	150
3.2. Técnicas de análisis de la condición financiera.....	154
3.3. Usos y usuarios de DFA.....	155
4. Revisión de los principales modelos DFA.....	158
5. Etapas de un proceso DFA.....	166
5.1. Paso A: Discusión y aceptación de las metas y objetivos.....	167
5.1.1. Paso A.1: Investigar los riesgos relevantes al asegurador.....	168
5.1.2. Paso A.2: Elegir las medidas de rentabilidad y riesgo.....	172
5.1.3. Paso A.3: Evaluar el resultado de la compañía.....	184
5.2. Paso B: Recogida de datos y fijación de las hipótesis de partida.....	185
5.3. Paso C: Construcción del modelo.....	185
5.3.1. Paso C.1: Generador estocástico de escenarios.....	188
5.3.2. Paso C.2: Estimación de los parámetros de los modelos.....	191
5.3.3. Paso C.3: Modelo de la compañía.....	192
5.4. Paso D: Simular el modelo.....	193
5.5. Paso E: Análisis del modelo: Output y test de sensibilidad.....	194
5.6. Paso F: Elaboración de un informe de resultados.....	196
5.7. Paso G: Control y optimización.....	197

**CAPÍTULO 3. HERRAMIENTAS PARA LA CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO EN DFA..... 199**

1. Introducción.....	199
2. La simulación de Monte Carlo.....	200
3. Dependencia entre variables aleatorias.....	213
4. Métodos de generación de dependencia entre las variables del modelo.....	222
4.1. Estructura de cascada, factorización de Cholesky y método de Iman-Conover.....	223
4.2. Cópulas.....	230
4.2.1. Tipología de cópulas.....	233
4.2.2. Dependencia en la cola superior de una cópula.....	241
4.2.3. Generación de variables correlacionadas mediante cópulas.....	244
4.2.4. Estimación de cópulas.....	247
5. Pruebas de bondad de ajuste y selección de modelos.....	250
6. Teoría del Valor Extremo (EVT).....	259

CAPÍTULO 4. MODELIZACIÓN FINANCIERA DE PASIVO EN SEGUROS NO VIDA .....	269
1. Introducción. ....	269
2. Modelización del pasivo en seguros no vida: Consideraciones generales... ..	269
3. Modelización de la siniestralidad de una compañía aseguradora. ....	277
3.1. La siniestralidad agregada de un asegurador. ....	278
3.2. El proceso del número de siniestros. ....	283
3.3. Modelización de la frecuencia relativa siniestral. ....	297
3.4. Modelización de la cuantía de los siniestros. ....	299
3.5. Modelización de la siniestralidad con distribuciones para el coste medio	311
3.6. Modelización de la siniestralidad mediante <i>loss ratios</i> . ....	313
3.7. Modelización de la siniestralidad mediante una única distribución.....	314
4. Estimación de los parámetros de las distribuciones analíticas. ....	316
4.1. Estimación de las distribuciones discretas. ....	317
4.2. Estimación de las distribuciones continuas. ....	318
5. Distribución de la siniestralidad agregada. ....	322
6. Modelización de la provisión para prestaciones en seguros no vida. ....	331
6.1. El proceso de estimación de las provisiones: <i>loss reserving</i> . ....	332
6.2. Métodos deterministas. ....	339
6.3. Métodos estocásticos. ....	358
7. El reaseguro. ....	372
8. Reglas de decisión o lazos de regeneración.....	377

CAPITULO 5. MODELACION FINANCIERA DE LOS RIESGOS DE MERCADO; DE CONTRAPARTE Y OPERATIVO DE LAS COMPAÑÍAS DE SEGUROS NO DE VIDA.....	379
1. Introducción. ....	379
2. Modelización del riesgo de renta variable, tipos de cambio e inmuebles. ....	382
2.1. Análisis de series temporales financieras. ....	385
2.2. Ajuste de los modelos y agregación temporal.....	397
2.3. Determinación del capital necesario a través de modelos alternativos al estándar. ....	399
3. Modelización del riesgo de tipos de interés. ....	407
3.1. Introducción. ....	407
3.2. Modelos de tipos de interés aplicables al análisis del riesgo en DFA. ..	412
3.2.1. Modelos de equilibrio de un factor. ....	412
3.2.2. Modelos de equilibrio multifactoriales. ....	418
3.2.3. Modelos de equilibrio con saltos. ....	421
3.2.4. Modelos libres de arbitraje. ....	422
3.3. Calibración de los modelos modelos tipo CKLS, Vasicek de dos factores y BGM. ....	424
3.4. Modelización de la dinámica de la ETTI a partir de los modelos de Vasicek, CIR-SR, Vasicek de dos factores y BGM. ....	426
3.5. Determinación del capital necesario a través de modelos alternativos al estándar. ....	432

4. Modelización del riesgo de spread.....	438
4.1. Análisis empírico de los spreads de crédito y su reversión a la media..	439
4.2. Modelización del riesgo de spread.....	443
4.3. Determinación del capital necesario a través de modelos alternativos al estándar.....	444
5. Modelización del riesgo de quiebra de la contraparte.....	448
5.1. Modelo de fallidos independientes.....	450
5.2. Modelo de fallidos dependientes.....	451
5.2.1. Modelo de Vasicek.....	453
5.3. Modelo de Basilea II y de Solvencia II para el riesgo de fallidos.....	457
5.4. Aplicación práctica a la modelización del riesgo de contraparte.....	459
6. Modelización del riesgo operativo.....	460
6.1. Pasos en la modelización del riesgo operativo.....	464
CAPITULO 6. DISEÑO DE UN MODELO INTERNO BASADO EN EL ANÁLISIS FINANCIERO DINÁMICO.....	471
1. Introducción.....	471
2. Proceso de análisis del riesgo y determinación de necesidades de capital en el modelo DFA-USC V.1.....	473
2.1. Derivar un Balance Económico.....	473
2.2. Cuantificar los riesgos.....	474
2.3. Agregar los riesgos.....	475
2.4. Calcular el SCR y el MCR.....	476
3. Modelización realizada del riesgo asegurador.....	477
3.1. Riesgo de reserva.....	477
3.2. Riesgo de prima.....	481
3.3. Riesgo catastrófico.....	484
4. Modelización realizada del riesgo de mercado.....	486
4.1. Riesgo de tipo de interés.....	486
4.2. Riesgo de renta variable.....	488
4.3. Riesgo de inmuebles.....	489
4.4. Riesgo de tipo de cambio.....	491
4.5. Riesgo de spread.....	492
4.6. Riesgo de concentración.....	494
5. Modelización realizada del riesgo de contraparte.....	494
6. Modelización realizada del riesgo operativo.....	494
7. Ejemplo de la utilización del modelo DFA-USC V.1.....	495
7.1. Hipótesis realizadas sobre la compañía.....	496
7.2. Resultados obtenidos.....	502
7.3. Conclusiones.....	510
BIBLIOGRAFÍA.....	513
Colección “Cuadernos de la Fundación” Instituto de Ciencias del Seguro.....	547

# CAPÍTULO 1

## LA SOLVENCIA DE LAS COMPAÑÍAS ASEGURADORAS

### 1. INTRODUCCIÓN

La importancia de preservar la solvencia de las compañías de seguros radica en que éstas deben tener una posición financiera suficiente para satisfacer las obligaciones con sus beneficiarios. El marco actual de solvencia de las compañías aseguradoras de la Unión Europea, Solvencia I, pasó a ser vinculante a partir del año 2004 para los estados miembros. Las fortalezas del método del cálculo del capital establecido en Solvencia I radican en su sencillez y objetividad. Pero dicho sistema presenta limitaciones derivadas principalmente de su incapacidad para reflejar los riesgos soportados, al tiempo que tampoco favorece la gestión activa de riesgos por parte de las compañías aseguradoras.

Solvencia II agrupa un conjunto de iniciativas encaminadas a llevar a cabo una revisión de las normas actuales de valoración de la situación financiera de las aseguradoras. El objetivo principal de dicho proyecto consiste en mejorar el control y medición de todos los riesgos a los que están expuestas las aseguradoras europeas. El 10 de noviembre de 2009, el Consejo de Ministros de Economía y Finanzas de la Unión Europea (Ecofin) ha dado el visto bueno a la Directiva de Solvencia II. De esta forma Solvencia II inicia su proceso de transposición, debiendo estar incorporada a la legislación española antes del 31 de octubre de 2012.

Un elemento fundamental de Solvencia II es la elaboración de una fórmula estándar para que las compañías aseguradoras determinen sus necesidades de capital. Dado que dicha fórmula está aún por determinar, en este capítulo dedicamos una atención especial a la fórmula propuesta en el último estudio de impacto realizado hasta la fecha, QIS4 (*Quantitative Impact Study 4*) presentado en 2008. Esta tarea se aborda de forma comparativa con su predecesor, QIS3, y el modelo de solvencia español (MES), desarrollados ambos en el año 2007. Además, se analizarán los sistemas de solvencia de los principales países desarrollados así como distintas propuestas alternativas elaboradas por diversas instituciones.

Un aspecto importante de Solvencia II y de los sistemas empleados en otros países, es la posibilidad de que las compañías opten por el uso de modelos internos. Estos modelos, tras la evaluación y autorización por parte del regulador, son empleados por las compañías para la gestión de riesgos y la determinación del capi-

tal. En un informe elaborado por la consultora KPMG para la Comisión Europea, se alude al análisis financiero dinámico (DFA) como la técnica más adecuada para el desarrollo de modelos internos.

El objetivo principal de este capítulo es estudiar el nuevo marco regulatorio que se está desarrollando en la Unión Europea para el control de la solvencia de las compañías de seguros (Solvencia II). Este trabajo se estructura en los siguientes apartados. En el apartado 2 se establece la importancia de los modelos de solvencia para evaluar la fortaleza de las compañías aseguradoras. Posteriormente, en el apartado 3 se exponen las características del modelo de solvencia actual de las compañías aseguradoras europeas, Solvencia I. El apartado 4 se dedica a la exposición del proyecto Solvencia II, desde sus orígenes a su estado actual. En el apartado 5 se expone comparativamente el último estudio de impacto realizado para la calibración de la fórmula estándar. El apartado 6 se dedica a explicar las principales características de los sistemas de determinación de capitales de los principales países desarrollados y propuestas realizadas por organismos actuariales. Finalmente, en el apartado 7 se hace un resumen comparativo de los distintos modelos de solvencia analizados.

## 2. VISIÓN GENERAL DE LOS ACUERDOS DE SOLVENCIA

El negocio asegurador transfiere fondos y riesgos de unos agentes económicos a otros, por lo que las compañías deben disponer de unos excedentes que le permitan absorber los posibles impactos negativos que se produzcan en esta actividad. Con el objetivo de crear un mercado de seguros estable y eficiente, los organismos reguladores de cada país necesitan establecer mecanismos adecuados para velar por la solvencia de las compañías de seguros. La solvencia puede definirse como la capacidad financiera para hacer frente a las obligaciones derivadas de todos los contratos bajo todas las circunstancias razonablemente previsibles (IAIS<sup>1</sup>, 2002) Así, una norma general que se establece en todos los países es que los aseguradores deben operar por encima de los requerimientos mínimos de capital, para hacer frente a la volatilidad en los mercados y de las condiciones económicas, innovaciones en la industria y desarrollos internacionales (IAIS, 2003a). De esta forma podemos distinguir entre solvencia estática, que sería la capacidad técnica y financiera para hacer frente a los compromisos adquiridos como consecuencia de su actividad aseguradora actual, y solvencia dinámica, o capacidad para cumplir los compromisos que pudieran aparecer como consecuencia de su actividad futura. Los controles de solvencia de las compañías se establecen prioritariamente para proteger al asegurado<sup>2</sup>. La causa principal es que los asegurados

---

<sup>1</sup> La Asociación Internacional de Supervisores del Seguro (*International Association of Insurance Supervisors*) fue creada en 1994 y representa a los supervisores y reguladores de seguros de múltiples países. Para más información sobre la entidad puede visitarse su página web <http://www.iaisweb.org>.

<sup>2</sup> Un instrumento básico para salvaguardar la solvencia de las compañías aseguradoras es el margen de solvencia o capital regulatorio que analizaremos posteriormente.

pueden llegar a perder su protección ante una situación de crisis financiera del asegurador. Esta circunstancia se ve agravada por las razones que se resumen en la siguiente tabla: falta de un fuerte control de mercado, dificultad para evaluar la solvencia por parte de los asegurados y la existencia de un fondo de garantía.

Razón	Causa
Inexistencia de un fuerte control de mercado	En general, el asegurador no está sometido al control de acreedores profesionales o mercados de capitales líquidos, dado que se financia en gran medida por las primas cobradas a los asegurados.
Dificultad para evaluar la solvencia por parte de los asegurados	Las fuentes públicas de información no brindan datos lo suficientemente transparentes y actuales como para evaluar la situación financiera del asegurador. Por consiguiente, al asegurado le supone un gran esfuerzo obtener y analizar la información concerniente a la solvencia de la compañía.
Riesgo moral derivado de la existencia de un fondo de garantía	El riesgo moral se presenta desde el punto de vista del asegurado y del asegurador. El fondo de garantía absorbe, al menos en parte, las consecuencias negativas de quiebra de una aseguradora, disminuyendo el incentivo del asegurado a evaluar la solvencia de las compañías. Respecto a la compañía de seguros, si las contribuciones al fondo no son equivalentes al riesgo asumido, el asegurador se ve tentado a aceptar riesgos excesivos ya que las consecuencias negativas se dividen entre todos los aseguradores.

Fuente: Swiss Re (2000).

Para prevenir las crisis de las compañías aseguradoras en todos los países se establecen requisitos de capital. La Asociación Internacional de Actuarios<sup>3</sup> (IAA, 2004) afirma que los propósitos de establecer dichos requisitos son, entre otros: proporcionar fondos necesarios, motivar a la compañía a reducir los niveles indeseables de riesgo, proporcionar una cultura de gestión y medición del riesgo, proporcionar al supervisor una herramienta para tomar el control de compañías con problemas financieros, alertar al supervisor de tendencias de deterioro financiero emergentes en el mercado, y finalmente, permitir que la cartera de un asegurador

---

<sup>3</sup> La Asociación Internacional de Actuarios (*International Actuarial Association* o IAA) fue fundada en 1895 como una asociación mundial en la que se agrupan las distintas asociaciones profesionales actuariales y los actuarios de los distintos países. Entre sus miembros titulares en España desataca el Instituto de Actuarios Españoles. Para más información sobre la IAA puede consultarse se página web <http://www.actuaries.org>.

con problemas financieros pueda ser transferida a otra compañía con un cierto nivel de seguridad. La implicación de los Estados en el control de la solvencia de las compañías de seguros tiene su origen en la OCDE, con el Grupo de Trabajo presidido por Campagne en 1957 y la posterior Comisión de la C.E.E presidida por Bruno de Mori<sup>4</sup> (véase Melgarejo, 2004). Estos estudios constituyeron en Europa la base de la primera generación de las Directivas de no vida de 1973 (Directiva 73/239/CEE) y vida de 1979 (Directiva 79/267/CEE) en las que se establecen las reglas de cálculo del margen mínimo de solvencia que actuará como reserva complementaria a las provisiones técnicas. Con el Acta Única Europea, se aplicaron las llamadas segundas directivas de seguros (88/357/CEE y 90/619/CEE), que representaron un paso intermedio hacia la plena realización del mercado interior. Con la apertura de los mercados en la Unión Europea, en el marco de la tercera generación de directivas comunitarias de seguros en julio de 1994 (92/46/CEE y 92/96/CEE), se consiguió una mayor liberalización y armonización del mercado. El control de solvencia tenía como objeto permitir a los supervisores una detección temprana de los problemas entre los aseguradores, de forma que se estableciera una adecuada protección a los asegurados. Las normas se concibieron como un estándar mínimo común, y los estados miembros eran libres de imponer regulaciones más estrictas (Swiss Re, 2006).

Posteriormente, el sistema sería evaluado en el Informe Müller en 1997<sup>5</sup>, que consideraba de manera global al sistema de solvencia europeo como satisfactorio, pero que proponía una serie de mejoras como la introducción de modificaciones en las normas del margen de solvencia, lo que comúnmente se denominó como Proyecto Solvencia I. Como resultado de este proceso se reforzaron las exigencias cuantitativas del fondo de garantía y del margen de solvencia obligatorio, estableciéndose al mismo tiempo, un mecanismo que preveía su actualización periódica y automática en función del índice de precios de consumo (IPC). El informe Müller también proponía una revisión más profunda de los aspectos relacionados con la solvencia global de las compañías aseguradoras, denominado Solvencia II. De esta forma, el proyecto de Solvencia I<sup>6</sup> fue visto como una regulación provisional, a la espera de un marco más ambicioso y a más largo plazo (Solvencia II), que supondrá un cambio profundo con las normativas predecesoras en materia de solvencia. Solvencia I está orientado a establecer reglas para cuantificar el nivel de recursos propios necesarios por cada compañía, por el contrario, Solvencia II posibilitará a cada empresa determinar la cuantía de recursos propios que necesita en función de los distintos riesgos que asuma y de su capacidad de gestión (Loza-

---

<sup>4</sup> Campagne estudió datos de 10 compañías de Alemania, Dinamarca, Francia, Holanda, Italia, Suecia y el Reino Unido durante el período 1952-1957. Bruno de Mori analizó datos concernientes a Italia, Bélgica, Francia y Alemania en el período 1951-1960.

<sup>5</sup> Presentado en abril de 1997 por la *Conference of Insurance Supervisory Authorities of the Member States of the European Union* con el nombre de “*Solvency of Insurance Undertakings*”, aunque es conocido comúnmente por Informe Müller.

<sup>6</sup> Solvencia I se centra en el margen de solvencia requerido, pero para determinar la situación financiera global de una compañía se deben analizar otros aspectos financieros que serán tratados en Solvencia II.

no, 2005). El objetivo de este proyecto reside en asegurar la adecuada protección del asegurado en todos los Estados miembros de la Unión Europea, y de establecer una medida de solvencia que capte de forma más exacta que Solvencia I los riesgos a los que está expuesto cada asegurador.

El concepto de solvencia puede tener diferentes significados, de ahí que antes de continuar con nuestra exposición trataremos de aclarar este aspecto (véase Comisión Europea, 2002a)<sup>7</sup>. Así, dicho concepto puede restringirse al margen de solvencia que se exige a las compañías de seguros. Una acepción más amplia tendría también en consideración otras normas destinadas a garantizar la solvencia de las compañías, que se concretan en el cálculo de las provisiones técnicas y de los activos destinados a su cobertura. El tercer concepto, que abarca a los anteriores y denominado comúnmente como “solvencia global”, responde a la solvencia financiera de una empresa teniendo en cuenta las condiciones internas y de su entorno exterior. Implica una visión más prospectiva de la situación financiera que las anteriores y obliga a tener en cuenta factores no sólo financieros. Este último concepto es sobre el que versa la reforma de Solvencia II, mientras que Solvencia I se refiere al segundo concepto de solvencia, más restringido y limitado.

### 3. LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL EN SOLVENCIA I

La importancia de la solvencia de las compañías de seguros radica en que éstas deben tener una posición financiera suficiente para satisfacer sus obligaciones con los asegurados y otros grupos de interés. Solvencia I reconoce la importancia del margen de solvencia de las compañías de seguros, de forma que dispongan del capital suficiente en relación con la naturaleza de sus riesgos. De esta forma el margen de solvencia actúa como un amortiguador frente a las fluctuaciones adversas de la actividad empresarial (Lozano, 2005). El proyecto de la Unión Europea Solvencia I finalizó con la aprobación de las Directiva 2002/12/CE y Directiva 2002/13/CE de 5 de marzo de 2002, que modifican, respectivamente, a las primeras Directivas de vida y no-vida en lo que respecta a los requisitos del margen de solvencia para las entidades aseguradoras. Las Directivas de Solvencia I pasaron a ser vinculantes a partir del año 2004, si bien se permitía fijar a los estados miembros períodos de transición hasta 2007. Bajo Solvencia I los aseguradores europeos deben disponer, como mínimo, de un capital igual al mayor valor entre el fondo de garantía mínima o el margen de solvencia requerido, que está en función de unos ratios o porcentajes de su volumen de negocio.

El *fondo de garantía mínima* se establece en un tercio del margen de solvencia requerido u obligatorio, sujeto a un mínimo de dos a tres millones de euros depen-

---

<sup>7</sup> El IAIS (2000) aporta una definición de “solvencia amplia”, al definir a una compañía de seguros como solvente si puede satisfacer sus obligaciones contraídas en todos los contratos en cualquier momento, o por lo menos bajo la mayoría de circunstancias. Además, establece que la medida solvencia o salud financiera de la compañía corresponde al margen de solvencia (*surplus capital*), que se define en el texto como el exceso de los activos sobre los pasivos, evaluados de acuerdo con las normas de contabilidad o reglas de supervisión.

diendo del ramo en seguros de no vida<sup>8</sup>. En seguros de vida, el fondo de garantía será, en general, como mínimo de 3 millones de euros.

El *margen de solvencia* requerido varía en seguros no vida o generales (A) y de vida (B).

A. El margen de solvencia en seguros de no vida o generales se establece en función del mayor valor entre el Índice de primas y el Índice de siniestros (Real Decreto 297/2004, de 20 de febrero).

A.1. La cuantía del margen de solvencia en *función de las primas* se determina mediante la siguiente fórmula:

*Índice de primas* = (18% de los primeros 50 mill. de euros de las primas brutas + 16% de las primas brutas restantes) × tasa de retención

*Tasa de retención* = siniestros netos/siniestros brutos, (Promedio de los tres últimos años sin que dicha tasa pueda ser inferior al 50%).

En el concepto de primas se incluirán las devengadas por seguro directo en el ejercicio que se contemple, netas de sus anulaciones y extornos, más las primas aceptadas en reaseguro en el mismo ejercicio, o bien, si fuera más elevado, el de las primas imputadas por seguro directo en el ejercicio que se contemple, netas de sus anulaciones y extornos, más las primas aceptadas en reaseguro en el mismo ejercicio. La tasa de retención se calcula como la relación existente en los últimos tres ejercicios<sup>9</sup>, entre el importe de la siniestralidad neta de reaseguro cedido y retrocedido, y el importe bruto de dicha siniestralidad, sin que esta relación pueda, en ningún caso, ser inferior al 50 por 100.

A.2. La aplicación única del criterio de primas pudiera dar lugar a que un asegurador con primas insuficientes en relación a los riesgos cubiertos, tendría un margen de solvencia inferior a la de un asegurador prudente en la tarificación de los contratos, y por ello se estableció una cuantía en base al índice de siniestros. La cuantía del margen de solvencia en *función de los siniestros* se establece como:

*Índice de siniestros* = (26% de los primeros 35 mill. de euros de los siniestros brutos<sup>10</sup> + 23% de los siniestros brutos restantes) × tasa de retención.

---

<sup>8</sup> El Real Decreto Legislativo 6/2004, de 29 de octubre dispone: «La tercera parte de la cuantía mínima del margen de solvencia constituye el fondo de garantía, que no podrá ser inferior a tres millones de euros para las entidades que operen en alguno de los ramos de vida, caución, crédito y cualquiera de los que cubran el riesgo de responsabilidad civil, así como para las que realicen actividad exclusivamente reaseguradora, y a dos millones de euros para las restantes».

<sup>9</sup> No obstante, cuando la empresa de seguros sólo cubra esencialmente uno o varios de los riesgos de crédito, tormenta, granizo o helada, se tendrán en cuenta, como período de referencia para el cálculo de la siniestralidad media, los siete últimos ejercicios.

<sup>10</sup> Teniendo en cuenta la siniestralidad promedio de los últimos 3 ejercicios.

El fondo de garantía mínima y los umbrales de primas y de siniestros están sujetos a un control anual, y han de ajustarse en caso de que el índice europeo de precios al consumo publicado por Eurostat varíe en más de un 5% desde el último ajuste. Por Resolución del 6 de julio de 2006 de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones<sup>11</sup> se actualizaron dichas cantidades a partir del 1 de Enero de 2007. De esta forma el fondo de garantía mínima pasó a 3,2 y 2,2 millones de euros en función del ramo, en el Índice de primas el cálculo del 18% se estableció sobre la cantidad que exceda de 53,1 millones y, en el Índice de siniestros, el cálculo del 26% se estableció sobre 37,2 millones. Además, la Resolución de 19 de mayo de 2009<sup>12</sup> actualiza dichos importes con efecto a partir del 1 de enero de 2010. Las cantidades actualizadas ascenderán a 3,5 y 2,3 millones de euros para el fondo de garantía, en el Índice de primas se establece la cantidad de 57,5 millones y en el Índice de siniestros de 40,3 millones.

Otro aspecto a tener en cuenta en el cálculo del margen de solvencia sucede cuando la cuantía mínima del margen de solvencia obligatorio calculado es inferior a la cifra del año precedente. En este caso, el margen de solvencia obligatorio será por lo menos igual al del año precedente multiplicado por el coeficiente que resulte de dividir las provisiones técnicas para siniestros al final del último ejercicio económico entre las provisiones técnicas para siniestros al comienzo del último ejercicio. En estos cálculos las provisiones técnicas se computarán netas de reaseguro, y el citado coeficiente no podrá ser en ningún caso superior a uno.

B. Para el seguro de vida, el margen de solvencia requerido se calcula como la suma de los 2 siguientes apartados:

B.1. El 4 por 100 del importe de las provisiones de seguros de vida por seguro directo, sin deducir el reaseguro cedido, y por reaseguro aceptado, por la relación que exista, en el ejercicio que se contemple, entre el importe de las provisiones de seguros de vida, deducidas las correspondientes al reaseguro cedido y retrocedido, y el importe bruto de las mismas, sin que esta relación pueda ser, en ningún caso, inferior al 85 por 100.

B.2: Para los contratos cuyos capitales en riesgo sean positivos se multiplicará el 0,3 por 100 de los capitales en riesgo, sin deducir reaseguro cedido ni retrocedido, por la relación existente, en el ejercicio que se contemple, entre los capitales en riesgo deducido el reaseguro cedido y retrocedido y el importe bruto de dichos capitales, sin que esta relación pueda ser, en ningún caso, inferior al 50 por 100.

Por lo tanto, la fórmula para el cálculo del margen de solvencia resulta:

---

<sup>11</sup> Debido a que el índice europeo de precios al consumo se incrementó en el 6,07 por 100 en el período de cálculo que se extiende entre el 20 de marzo de 2002 y el 20 de marzo de 2005.

<sup>12</sup> Resolución de 19 de mayo de 2009, de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones.

*Margen de solvencia= 4% provisiones matemáticas brutas × tasa de retención de las provisiones matemáticas + 0.3<sup>13</sup>% × capital en riesgo × tasa de retención del capital en riesgo.*

Siendo:

*Tasa de retención de las provisiones matemáticas = provisiones netas/provisiones brutas (pero no menos de un 85%)*

*Tasa de retención del capital en riesgo = capital en riesgo neto/capital en riesgo bruto (pero no menos del 50%)*

La fortaleza principal del método del cálculo del capital establecido en Solvencia I radica en su sencillez, ya que está basado en ratios fijos fáciles de entender. Además, es un método objetivo que puede ser comparable entre compañías. Pero Solvencia I presenta múltiples limitaciones, resumidas en la siguiente tabla, y que se derivan principalmente de su incapacidad para reflejar los riesgos a los que se enfrentan realmente las compañías aseguradoras. Además, dicho sistema es fuertemente criticado por ser meramente retrospectivo, estar basado simplemente en datos financieros y no fomentar una cultura de gestión de los riesgos en las compañías aseguradoras.

---

<sup>13</sup> Para los seguros temporales en caso de muerte de una duración máxima de tres años, dicho porcentaje será del 0,1%. Para aquellos de una duración superior a 3 años y no más de 5, será del 0,15%.

Limitación	Razón
Refleja inadecuadamente el riesgo de las compañías	Los requisitos de solvencia dependen de parámetros que representan inadecuadamente el riesgo técnico subyacente. En concreto las primas y los siniestros en seguros no vida, y las provisiones matemáticas y el capital en riesgo en vida. Riesgos distintos de los técnicos, no se tienen en cuenta o sólo parcialmente <sup>14</sup> . Es especialmente preocupante que el actual sistema de solvencia no contemple el riesgo operacional.
Basado exclusivamente en datos financieros de la compañía	El sistema actual basa los criterios de solvencia de una entidad en datos financieros. Por el contrario, deberían considerarse adicionalmente otros aspectos como su exposición al riesgo, tamaño, estrategias, etc.
No recoge adecuadamente los mecanismos de reducción del riesgo	Ni la diversificación, ni ciertas formas de transferencia del riesgo <sup>15</sup> dan lugar a un descuento del capital requerido. Además, el reconocimiento por reaseguro es parcial y no está influenciado por su calidad crediticia.
Sistema estático y retrospectivo	El sistema de solvencia actual no tiene poder de predicción sobre la evolución futura de la solvencia de las compañías.
No favorece la medición ni gestión del riesgo	El sistema no favorece que las compañías destinen recursos a la mejora del conocimiento y gestión de sus riesgos, ya que no se traduce en una reducción de la cifra de capital.
No es un sistema homogéneo en la UE	La capacidad de fijar requisitos de capital adicionales y la libertad para determinar las reglas de valoración de activos y pasivos para propósitos reguladores, ha conducido a diferencias significativas entre los distintos Estados Miembros de la Unión Europea.

Fuente: Elaboración propia a partir de Swiss Re (2006) y Ernest & Young (2002).

<sup>14</sup> El riesgo de inversión se aborda en las regulaciones relativas a la inversión de provisiones técnicas. Se establecen las clases de activos en las que estas reservas se pueden invertir y la cuota máxima. La no inclusión del riesgo de inversión en el cálculo del capital propio requerido es uno de los principales puntos de crítica del sistema actual.

<sup>15</sup> El sistema europeo actual no recoge generalmente de forma adecuada las técnicas y productos avanzados de reducción del riesgo, que en muchos casos no existían cuando el sistema fue ideado.

Las anteriores limitaciones provocan una insatisfacción generalizada con el sistema de Solvencia I. Dicho descontento viene derivado de la incapacidad de aportar soluciones adecuadas a las nuevas exigencias del entorno en el que las compañías aseguradoras desarrollan su actividad. Dichas exigencias se refieren a los desarrollos de los mercados financieros y del ámbito empresarial, al nuevo rol de los supervisores, a la minimización de efectos no deseables y la deseada transparencia hacia los consumidores (véase la siguiente tabla).

Exigencia	Motivo de insuficiencia de Solvencia I
Mercado Financieros	La internacionalización, los conglomerados financieros y la apuesta por crear un mercado financiero único exigen la homogeneización de criterios y la aplicación de repuestas similares para medir el nivel de solvencia de las distintas entidades financieras.
Empresariales	La evaluación de la solvencia de una aseguradora mediante el actual sistema resulta incompleta. Además, las aseguradoras son cada vez más conscientes de la importancia de desarrollar modelos de control interno de riesgos.
Supervisión	Los supervisores deben adoptar un rol de supervisión preventiva, dinámica y prospectiva. Esto requiere que el supervisor tenga que valorar la habilidad de una aseguradora para ser capaz de hacer frente a sus compromisos.
Minimización de efectos no deseables	El sistema actual penaliza a aquellas aseguradoras que aplican y mantienen criterios de dotación de provisiones técnicas prudentes y no incentiva a que las aseguradoras mejoren sus sistemas de gestión y control interno.
Consumidores	La transparencia informativa es necesaria a fin de favorecer los procesos de optimización en su toma de decisiones. Además, la continua demanda de nuevos productos exige una actualización de los sistemas de gestión de riesgos.

Fuente: Bernaldo de Quirós (2002).

#### 4. EL NUEVO PROYECTO DE LA UE: SOLVENCIA II

Solvencia I establece normas generales que permiten la determinación del nivel de recursos propios de las aseguradoras sin considerar el perfil de riesgo específico de cada compañía. Estas normas generales dan lugar a posibles situaciones contradictorias<sup>16</sup>. De esta forma los estados miembros de la Unión Europea han co-

<sup>16</sup> Podemos ver varios ejemplos contradictorios del actual sistema:

Caso 1: Dos entidades con similares volúmenes de primas y de provisiones tendrían unos requerimientos de recursos propios similares, sin tener en cuenta su política de inversiones.

menzado a modificar el marco actual. La Comisión Europea (1999) estableció una lista de criterios que debiera cumplir el nuevo régimen de solvencia, y que citamos a continuación:

- Proteger a los asegurados, ofreciendo a los supervisores un intervalo adecuado para determinar y poner remedio a situaciones adversas o fallos en una determinada compañía de seguros.
- Garantizar la comparabilidad y la transparencia, impulsando así la igualdad de condiciones entre los integrantes del mercado. Esto exigirá una mayor colaboración entre los distintos supervisores de los Estados Miembros de la UE debido a la armonización de normas y prácticas.
- Establecer un margen de solvencia obligatorio más adecuado a los verdaderos riesgos que asume cada compañía.
- Evitar un grado innecesario de complejidad y reflejar la evolución del mercado.
- Establecer principios y no tener un carácter excesivamente preceptivo.
- Basarse, en la medida de lo posible, en políticas contables comunes, lo que permitirá ahorrar gastos y evitar la duplicación y/o multiplicación de sistemas de información financiera.
- Evitar costes de capital innecesarios para la industria y perjudiciales para la competitividad global del sector asegurador europeo.

Bajo el nombre de Solvencia II, se agrupan todas las iniciativas encaminadas a llevar a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera de las compañías aseguradoras europeas con el objetivo de mejorar el control y medición de todos los riesgos. Por lo tanto, podemos afirmar que Solvencia II surge de la preocupación de que las compañías operen con unos fondos propios adecuados a los riesgos que asumen. Para alcanzar este objetivo, se definirá un amplio espectro de indicadores cualitativos y cuantitativos que delimitarán la capacidad de las entidades para mantener su situación de solvencia actual y futura (Lozano, 2005). De esta forma, según la Comisión Europea (2003) el sistema no debe consistir únicamente en una serie de coeficientes e indicadores cuantitativos, sino que también debería incluir los aspectos cualitativos que influyen en el tipo de riesgo de una empresa: la gestión realizada, el control interno del riesgo, la situación competitiva, etc.

Solvencia II supondrá un nuevo marco regulador y unos nuevos de requerimientos de capital. Este proceso no puede ser evaluado al margen del entorno en el que se desarrolla. En este sentido además de la insatisfacción con el sistema actual de

---

Caso 2: Penaliza a aquellas aseguradoras con una política más prudente de constitución de provisiones técnicas para prestaciones. A mayor volumen de provisiones mayores necesidades de recursos propios. Caso 3: Una compañía que aumenta sus primas sin cambios en su exposición al riesgo asegurador estaría reduciendo su riesgo de insolvencia, sin embargo, sus requisitos de capital se verían aumentando.

solvencia, destaca la fuerte influencia de Basilea II, el procedimiento Lamfalussy y los desarrollos en materia de solvencia y de valoración de diversas asociaciones. La siguiente tabla resume los principales acontecimientos externos e internos, que han impulsado en cierta medida a Solvencia II.

Acontecimiento	Efecto
Insatisfacción con Solvencia I	Necesidad de establecer una modificación de los sistemas actuales de cálculo de la solvencia de las entidades de seguro.
Doble influencia de Basilea II	Por un lado actúa como referente y estímulo y por otro, dado la creciente integración del negocio asegurador y bancario, se debe dar una respuesta regulatoria similar a riesgos semejantes. Por lo tanto, Solvencia II busca una normativa coherente con el negocio bancario, tratando de conseguir que a igual riesgo se establezca igual capital en ambos negocios.
El procedimiento o enfoque Lamfalussy	Este procedimiento se ha establecido para la elaboración de regulación financiera comunitaria. Establece en el ámbito de los servicios financieros a nivel europeo, un conjunto de recomendaciones diseñadas para agilizar la creación y aprobación de nuevas normas de forma más ágil <sup>17</sup> .
Desarrollos internacionales	Los trabajos de la Asociación Internacional de Supervisores de Seguros (IAIS), la Asociación Internacional de Actuarios (IAA), las normas sobre contratos de seguro del Consejo de Normas Internacionales de Contabilidad ( <i>International Accounting Standards Board</i> o IASB) y los modelos de solvencia elaborados por países como Australia, Canadá, Estados Unidos, Países Bajos, Suiza, Reino Unido o Alemania han llevado a la Unión Europea a establecer la necesidad de modificar el sistema actual de solvencia.

Fuente: Solá (2006).

Como consecuencia de la implantación de Solvencia II, las compañías deberán disponer de herramientas modernas y estructuras que permitan gestionar sus riesgos y garantizar su solvencia dinámica. Según Swiss Re (2006), Solvencia II su-

<sup>17</sup> Este método estructura la puesta en marcha de las normativas europeas en cuatro niveles en los cuales la Comisión Europea recibe informes de opiniones de todos los participantes del mercado sobre la legislación antes de la implantación oficial. El enfoque Lamfalussy está insertado dentro del Plan de Acción para los Servicios Financieros (*Financial Services Action Plan* o FSAP) 1999-2005. Este plan ha sido elaborado por la Comisión Europea con la finalidad de impulsar la integración del mercado financiero europeo. El objetivo del FSAP es hacer a Europa más competitiva consolidando un mercado interno de servicios financieros eficiente.

pondrá un reto especial para aquellos aseguradores que en el pasado no han considerado de forma suficiente o adecuada las características subyacentes de sus riesgos<sup>18</sup>. Además, es de esperar efectos muy positivos de Solvencia II principalmente en los asegurados, industria y economía europea, y que pueden verse resumidos en la siguiente tabla.

Institución	Efecto
Asegurados	La mejora de las prácticas de gestión del riesgo de las compañías y el establecimiento de unos niveles más apropiados de capital, darán a los asegurados una mayor protección contra el riesgo de impago de la compañía. Una segunda ventaja provendrá de la asignación más eficiente del capital en la industria, que se reflejará en última instancia en unos menores costes para los consumidores. La mayor competencia y transparencia del mercado deben también conducir a un producto mejorado y a menores primas.
Compañías aseguradoras	Solvencia II proporcionará incentivos a la industria para adoptar prácticas modernas de gestión del riesgo ( <i>risk management</i> ) que se han ido extendiendo después de las recientes crisis de los mercados financieros.
Economía europea	Solvencia II debe conducir a una industria mejor dirigida, que satisfaga mejor su función originaria de proporcionar estabilidad financiera en un mundo con riesgo. Además, la aplicación uniforme en la Unión Europea, la mayor transparencia y divulgación pública debe contribuir a lograr un verdadero mercado único de los servicios financieros (estrategia de la UE en Lisboa 2000).

Fuente: Towers Perrin y CEA (2006).

#### 4.1. Fases del proyecto Solvencia II

El proceso técnico y legislativo de Solvencia II se dividió en dos fases. La primera fase tuvo lugar entre Mayo de 2001 y Diciembre de 2002 y tenía por objeto determinar el marco general del futuro sistema. La segunda se inició en el 2003 y continúa en la actualidad con el objeto de definir los detalles del sistema de solvencia de la UE. Estas fases y el contenido de cada una pueden verse resumidos en la siguiente tabla.

<sup>18</sup> Este podría ser el caso, especialmente, del seguro de vida, donde las prácticas actuariales tradicionales a menudo no han abarcado la valoración y evaluación de las garantías y opciones inherentes a los productos. En general, Solvencia II incitará a los aseguradores a concentrarse más en los fundamentos de riesgo/rendimiento, la fijación de precios adecuados al riesgo, y la gestión del riesgo y del capital en el sector asegurador.

Fases del proyecto Solvencia II		
Primera fase (Mayo de 2001 - Diciembre de 2002)	Segunda fase (Enero 2003 a 2012)	
Informe KPMG Informe Sharma	Proceso técnico y legislativo:	Evaluación del impacto
	<i>Olas de peticiones</i> <i>Propuesta de Directiva</i> <i>Redacción de la Directiva Marco</i> <i>Aprobación y puesta en práctica</i>	QIS1 QIS2 QIS3 QIS4 QIS5

A continuación se destacan los aspectos más importantes de cada fase:

A. La primera fase tenía por objeto el diseño general del nuevo sistema de solvencia procediéndose a recopilar información básica para su elaboración. En esta fase destaca el denominado *informe KPMG* (Comisión Europea y KPMG, 2002) sobre las distintas metodologías existentes para evaluar la solvencia global de una compañía de seguros y el denominado *informe Sharma*. Además, en esta etapa también destacan otros informes elaborados por la Comisión Europea sobre aspectos como los modelos internos o los sistemas de capital basado en el riesgo o RBC (*Risk-Based Capital*), entre otros.

El *informe KPMG*, elaborado por la consultora KPMG en el año 2002 a petición de la Comisión Europea, estudia los siguientes temas: riesgos y modelos de riesgos, pasivo técnico (principalmente en seguros no vida), valoración del activo y de los riesgos de inversión, reaseguro, transferencia alternativa de riesgos (técnicas ART) y técnicas de reducción de riesgos, impacto de las modificaciones de las normas contables, papel de las agencias de calificación y mecanismo del mercado y, por último, un análisis comparativo de los sistemas de solvencia. Una conclusión importante del informe es que un enfoque con "tres pilares", similar al adoptado en Basilea, resultaría oportuno para el proyecto Solvencia II. Además, dicho informe aconseja el uso del DFA como la técnica adecuada para el desarrollo de modelos internos que sirvan para el cálculo de los requerimientos de capital y la gestión del riesgo.

El *informe Sharma*<sup>19</sup> analizaba los riesgos de las compañías de seguros que habían tenido graves dificultades financieras en los últimos años de los países analizados. Este informe concluye que la causa final de una quiebra es siempre el impacto de un riesgo concreto, pero en la mayoría de los casos la causa verdadera es anterior y más abstracta, introduciendo el concepto de "cadena causal" (*causal*

<sup>19</sup> Este informe titulado "*Prudential Supervision of Insurance Undertakings*" fue redactado en 2002 por un Grupo de trabajo de la Conferencia de Autoridades Supervisoras de Seguros de los Estados Miembros de la Unión Europea. Recibe el nombre de informe Sharma en honor al Presidente del Grupo de trabajo que lo elaboró.

*chain*) de acontecimientos que conducen a la quiebra. Por ello se establece que un sistema de supervisión prudencial debe comportar toda una serie de instrumentos normativos, preventivos o correctivos, que permitan actuar desde las fases tempranas de deterioro de la condición financiera de la compañía hasta sus últimas fases. Dicho informe también recomienda una mayor diferenciación de los niveles de intervención en función de las características financieras de cada empresa.

B. La segunda fase, en donde nos encontramos en la actualidad, tiene por objeto la elaboración de una Directiva Marco y su puesta en marcha. La Comisión Europea ha remitido al Comité de Supervisores Europeos de Seguros (CESSPJ) o CEIOPS<sup>20</sup> una serie de peticiones de asesoramiento sobre cuestiones básicas del futuro sistema. Se han elaborado tres conjuntos de peticiones de asesoramiento, las denominadas *Wave of Calls for Advice*: el primero en Julio de 2004, el segundo en Diciembre de 2004 y el tercero en Marzo de 2005. El contenido de cada uno de los tres conjuntos puede verse en la siguiente tabla.

Conjunto de peticiones	Contenido
Primero	Nº1. Control interno y gestión del riesgo, Nº2. Revisión del proceso supervisor (general), Nº3. Revisión del proceso supervisor (herramientas cuantitativas), Nº4. Transparencia de la acción supervisora, Nº5. Reglas de gestión de inversiones, Nº6. Gestión de activos y pasivos (ALM).
Segundo	Nº7. Provisiones técnicas Vida, Nº8. Provisiones técnicas no vida, Nº9. Medidas de suficiencia, Nº10. SCR: fórmula estándar, Nº11. SCR: Modelos internos y su validación, Nº12. Reaseguro y otras técnicas de mitigación del riesgo, Nº13. Estudios de impacto (QIS), Nº 14. Acciones del supervisor, Nº15. Niveles de control de solvencia, Nº16. Criterios <i>fit &amp; proper</i> (aptitud y honorabilidad) de gobierno corporativo, Nº17. Procesos de supervisión coordinados ( <i>Peer reviews</i> ), Nº18. Grupos.
Tercero	Nº19. Activos elegibles que cubran los requisitos de capital, Nº20. Cooperación entre supervisores, Nº21. Información al supervisor y de acceso público, Nº22. Prociclividad, Nº23. Pequeñas y medianas compañías.

<sup>20</sup> Son la sigla de *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*, organismo creado por la Comisión Europea (CE Decisión 2004/6/EC de 2003) en parte para gestionar el Proyecto Solvencia II. El CEIOPS está compuesto de representantes de alto nivel de las autoridades de supervisores de seguros y fondos de pensiones de Estados Miembros de la Unión Europea. El CEIOPS está formado por cinco grupos de trabajo formados por supervisores de seguros de toda la UE. Un grupo se ocupa de los temas del Pilar I, otro grupo estudia el Pilar II, el tercero se centra en la contabilidad y en el Pilar III, el cuarto se encarga de aspectos de grupos e intersectoriales, y el quinto y último de la mediación del seguro.

La contestación del primer conjunto, constituido principalmente por temas del Pilar II, fue sometido a la Comisión Europea el 30 de junio de 2005 (CEIOPS, 2005a). La segunda formada por temas del Pilar I (CEIOPS, 2005b) data del 1 de Noviembre de 2005, mientras que la tercera, formada por aspectos de diversa índole, es del 3 de Mayo de 2006 (CEIOPS, 2006a). En el contenido de estas contestaciones, que no son imperativos ni contemplan en la mayor parte de los casos un único criterio u opción, la Comisión avanzó en la redacción de la Directiva Marco.

En este sentido, la Comisión Europea adoptó el 10 de julio de 2007 la Propuesta COM (2007) 361 o Propuesta de Directiva Solvencia II (Comisión Europea, 2007). Dicha propuesta refunde en un mismo texto 13 Directivas vigentes del ámbito de los seguros y reaseguros, a la que se añaden una serie de nuevas disposiciones en materia de solvencia, y a las que se denominan Solvencia II. El 26 de febrero de 2008 dicha propuesta sería modificada por el Consejo, dada la necesidad de incorporar las modificaciones efectuadas en diversas directivas y al acuerdo político en el Consejo y en el Parlamento Europeo acerca del denominado Reglamento Roma I. De esta forma, surgía la propuesta modificada de Directiva Solvencia II COM (2008) 119 de la Comisión (Comisión Europea, 2008). El 22 de abril de 2009 el Parlamento Europeo aceptó la Propuesta modificada elaborada por la Comisión, introduciéndole novedades sobre la versión original (Parlamento Europeo, 2009). El 10 de noviembre de 2009, el Consejo de Ministros de Economía y Finanzas de la Unión Europea (Ecofin) ha dado el visto bueno a la Directiva una vez alcanzado un acuerdo en primera lectura con el Parlamento Europeo bajo el procedimiento de co-decisión (Parlamento Europeo y Consejo, 2009). Por lo tanto, el proyecto Solvencia II inicia ahora su proceso de transposición a las distintas legislaciones nacionales, con el imperativo de estar incorporado a la legislación española antes del 31 de octubre de 2012.

De forma paralela al proceso técnico y legislativo se realiza el proceso de evaluación del impacto de la futura normativa. En la segunda ola de peticiones de asesoramiento la Comisión Europea requirió al CEIOPS un estudio sobre el posible impacto cuantitativo del nuevo sistema de solvencia a través de los denominados estudios del impacto cuantitativos (*Quantitative Impact Studies* o QIS). Con la colaboración del sector y del CEIOPS se ha elaborado la primera valoración del impacto cuantitativo QIS 1 durante 2005, y que se centra en el nivel de prudencia de las provisiones técnicas (CEIOPS, 2006b). Posteriormente se ha elaborado el QIS 2 (CEIOPS, 2006c), que se centra sobre los sistemas de cálculo de los requerimientos de capital (SCR y MCR). A partir de este estudio los siguientes tienen principalmente el mismo propósito, pero realizan y testan modificaciones en la fórmula estándar sobre su predecesor. Las especificaciones de QIS 3 fueron publicadas en abril de 2007, y las compañías participantes pudieron realizar sus contribuciones al supervisor nacional hasta el 29 de junio de 2007 (CEIOPS, 2007a). El estudio de impacto más actual a la hora de elaborar este trabajo de investigación es QIS4 o cuarto análisis de impacto cuantitativo elaborado para la calibración de la fórmula estándar (CEIOPS, 2008a). Dicho estudio fue realizado entre Abril y Julio de 2008 y la publicación de sus resultados se realizó en el mes de Noviembre. En la actualidad se prevé que a mediados de Junio de 2010 estén disponibles

las especificaciones del quinto estudio de impacto, el QIS5. El sector asegurador espera que las lecciones aprendidas de estos estudios de impacto permitan el desarrollo de las fórmulas para el SCR y MCR y la esperada implantación de Solvencia II en 2012.

#### 4.2. La Directiva de Solvencia II

A continuación detallaremos los principales aspectos de la Directiva de Solvencia II, en lo que a los objetivos de este trabajo se refiere, mencionando los cambios más importantes respecto a la Propuesta de la Comisión.

En la Directiva de Solvencia II se establece que el principal objetivo de la regulación y supervisión del sector de seguros y reaseguros consiste en proteger adecuadamente a los tomadores y beneficiarios<sup>21</sup> de seguros. Para ello, bajo el nuevo sistema la orientación de la supervisión de las entidades se basará en un planteamiento prospectivo orientado al riesgo económico de las compañías. Finalmente, el proceso de revisión supervisora de las compañías aseguradoras por parte de las autoridades deberá abarcar no sólo aspectos cuantitativos de las mismas, sino también las estrategias, los procesos y los procedimientos de información establecidos. Las anteriores consideraciones generales sobre la Directiva son resumidas en la siguiente tabla.

Aspecto	Consideración
Finalidad principal y secundaria <i>Artículo 27 y 28</i>	Principal: Proteger adecuadamente a los tomadores y beneficiarios de seguros. Secundaria: la estabilidad financiera de los mercados.
Principios generales de supervisión <i>Artículo 29</i>	El planteamiento del régimen implantado será prospectivo y tratará de reflejar el verdadero perfil de riesgo económico de las aseguradoras. Se intenta evitar que el nuevo régimen de solvencia resulte gravoso para las pequeñas y medianas empresas, ya que los requisitos del régimen de solvencia se deben aplicar de forma proporcionada (principio de proporcionalidad).

<sup>21</sup> El término beneficiario se refiere a cualquier persona física o jurídica que sea titular de derechos con arreglo a un contrato de seguros.

Aspecto	Consideración
<p>Alcance y proceso de revisión <i>Artículo 30 y 36</i></p>	<p>La supervisión deberá abarcar no sólo aspectos cuantitativos, sino que comprenderá el análisis de los requisitos cualitativos relativos al sistema de gobernanza, los riesgos a los que las empresas afectadas se enfrentan o podrían enfrentarse, y la capacidad de dichas empresas para evaluar tales riesgos, teniendo en cuenta el entorno en el que éstas desarrollan su actividad.</p> <p>De forma particular se revisarán y evaluarán: el sistema de gobernanza, las provisiones técnicas, los requisitos de capital, las normas de inversión, las características cualitativas y cuantitativas de los fondos propios establecidas, y cuando la compañía utilice un modelo interno completo o parcial, el cumplimiento continuo de los requisitos aplicados a tales modelos.</p>
<p>Incrementos o Adición de capital <sup>22</sup> <i>(Capital add-on)</i> <i>Artículo 37</i></p>	<p>En circunstancias excepcionales y mediante decisión motivada, las autoridades de supervisión podrán fijar un incremento del capital de una aseguradora temporalmente, cuando la entidad se vea expuesta a riesgos que no son capturados por la fórmula estándar o los modelos internos aprobados, o se perciban deficiencias en el sistema de gobernanza.</p>
<p>Informe sobre la situación financiera y de solvencia <i>Artículo 51 a 56</i></p>	<p>Se exige a que las compañías publiquen, con carácter anual, un informe sobre su situación financiera y de solvencia. El informe contendrá, entre otras, la siguiente información: descripción para cada categoría de riesgo de la exposición, concentración, reducción y sensibilidad; una descripción de la gestión del capital donde se proporcionará la estructura e importe de los fondos propios y el importe del SCR y del MCR.</p> <p>La Comisión adoptara medidas de ejecución en las que se especifique más pormenorizadamente la información que deberá publicarse y los medios para ello.</p>

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

<sup>22</sup> La imposición de adiciones de capital es excepcional en el sentido de que debe recurrirse a ella únicamente en última instancia, cuando otras medidas de supervisión resulten ineficaces o inadecuadas.

Un aspecto importante que establece la Directiva sobre Solvencia II es que las compañías de seguros deben asumir como práctica habitual la evaluación periódica interna de sus necesidades globales de solvencia, atendiendo a su perfil de riesgo específico<sup>23</sup>. Dicha evaluación deberá realizarse inmediatamente después de cualquier cambio significativo de su perfil de riesgo. La autoevaluación de riesgos y solvencia (Artículo 45) es un proceso con un doble sentido: por un lado es un proceso de evaluación interna que se integra en las decisiones estratégicas de la empresa y, por otra parte, constituye una herramienta en manos de las autoridades de supervisión. Por lo tanto, las entidades aseguradoras deben mantener informadas a las autoridades de supervisión de los resultados de cada autoevaluación de riesgos y solvencia de la empresa.

Los requisitos cuantitativos, o Pilar I de la Directiva, se establecen en seis secciones que forman el Capítulo VI: valoración de activos y pasivos, provisiones técnicas, fondos propios, capital de solvencia obligatorio, capital mínimo obligatorio e inversiones. Dichos requisitos se basan en un planteamiento económico centrado en el balance total, valorando los activos y pasivos de manera coherente con el mercado. A continuación resumiremos cada una de las seis secciones anteriormente citadas.

### **Sección 1. Valoración de Activos y Pasivos (Artículo 75)**

La Directiva establece normas de valoración respecto de todos los activos y pasivos, basadas en la actual definición de valor razonable de las normas internacionales de información financiera (NIIF). La valoración de los activos se realizará por el importe por el cual podrían intercambiarse entre partes interesadas y debidamente informadas que realicen una transacción en condiciones de independencia mutua. Los pasivos se valorarán por el importe por el cual podrían transferirse o liquidarse, entre partes interesadas y debidamente informadas que realicen una transacción en condiciones de independencia mutua. Al valorar los pasivos, no se realizará ajuste alguno para tener en cuenta la solvencia propia de la empresa.

### **Sección 2. Provisiones técnicas (Artículos 76 a 86)**

Se establece que las aseguradoras deben segmentar sus obligaciones en grupos de riesgo homogéneos, y como mínimo por líneas de actividad, al calcular sus provisiones técnicas. El cálculo de las provisiones técnicas se efectúa mediante el importe actual que la aseguradora tendría que pagar hoy si transfiriera todas sus obligaciones y derechos contractuales de manera inmediata a otra entidad. El valor de las provisiones técnicas es la suma del mejor la mejor estimación y de un margen de riesgo, salvo en el caso de riesgos susceptibles de cobertura. Las definiciones y las formas de calcular ambos conceptos son recogidas en la siguiente tabla.

---

<sup>23</sup> Dicha evaluación abarcará, como mínimo, lo siguiente: a) las necesidades globales de solvencia teniendo en cuenta el perfil de riesgo específico, los límites de tolerancia de riesgo aprobados y la estrategia comercial de la empresa; b) el cumplimiento continuo de los requisitos de capital y de los requisitos en materia de provisiones técnicas; y c) el grado en que el perfil de riesgo de la empresa se aparta significativamente de las hipótesis en que se basa el capital de solvencia obligatorio calculado mediante la fórmula general o mediante un modelo interno completo o parcial.

Ítem	Definición y cálculo
Mejor estimación o <i>Best Estimate</i>	<p>Es la media de los todos los flujos de caja futuros ponderada por su probabilidad, teniendo en cuenta el valor temporal del dinero mediante la actualización a la estructura temporal de tipos de interés sin riesgo oportuna.</p> <p>Las empresas tendrán en cuenta: todos los gastos en que incurrirán para satisfacer las obligaciones; la inflación; todos los pagos a los tomadores y beneficiarios de seguros, y finalmente, el valor de las garantías financieras y de las posibles opciones contractuales incluidas en los contratos de seguro y de reaseguro.</p> <p>Las aseguradoras dispondrán de procesos y procedimientos para garantizar que las mejores estimaciones y las hipótesis en las que se base su cálculo se comparen periódicamente con la experiencia.</p>
Margen de riesgo o <i>Risk Margin</i>	<p>El margen de riesgo garantiza que el valor global de las provisiones técnicas sea equivalente al importe que las empresas de seguros y de reaseguros previsiblemente necesitarían para poder asumir y cumplir las obligaciones de seguro y reaseguro.</p>
Cálculo	<p>Las empresas de seguros y de reaseguros calcularán la mejor estimación y el margen de riesgo por separado. No obstante, cuando los flujos de caja futuros asociados a las obligaciones de seguro o reaseguro puedan replicarse utilizando instrumentos financieros con un valor de mercado directamente observable, el valor de las provisiones técnicas se determinará a partir del valor de mercado de dichos instrumentos financieros.</p> <p>En el supuesto de que las empresas de seguros y de reaseguros calculen la mejor estimación y el margen de riesgo por separado, el margen de riesgo se calculará aplicando el método del coste de capital.</p>

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

Las autoridades de supervisión podrán exigir a las empresas que incrementen el importe de las provisiones técnicas hasta situarlas en el nivel oportuno. Finalmente, la Comisión adoptará medidas de ejecución que establezcan: las metodologías actuariales y estadísticas para calcular la mejor estimación, la ETTI pertinente para la actualización de los flujos, los métodos y las hipótesis que deberán utilizarse en el cálculo del margen de riesgo (incluida la calibración de la tasa de coste del capital), etc.

### **Sección 3. Fondos propios (Artículos 87 a 99)**

Los fondos propios representan los recursos financieros de los que dispone una aseguradora para protegerse frente a los riesgos y absorber, en su caso, las pérdidas financieras. La determinación de los importes de fondos propios admisibles para la cobertura de los requisitos de capital se basa en un proceso en tres

fases: la determinación de los importes de fondos propios, la clasificación en niveles y los límites establecidos a los fondos propios. A continuación profundizamos en los aspectos más relevantes de cada fase.

En la *primera fase* se realiza la determinación de los importes de fondos propios. Los fondos propios estarán constituidos por la suma de los fondos propios de base, básicos o elementos del balance (Artículo 88), y de los fondos propios complementarios o elementos de fuera del balance (Artículo 89). Los fondos propios de base se compondrán del excedente<sup>24</sup> de los activos con respecto a los pasivos y los pasivos subordinados. Por contra, los fondos propios complementarios estarán constituidos por elementos distintos de los fondos propios de base que puedan ser exigidos para absorber pérdidas. Dichos fondos están sujetos a la aprobación previa de las autoridades de supervisión (Artículo 90).

La *segunda fase* consiste en la clasificación en niveles. Los elementos que constituyen los fondos propios tienen diferentes características y distinta capacidad para absorber pérdidas, por lo que se deben clasificar en tres niveles, en función de las siguientes características (véase la siguiente tabla): disponibilidad permanente y subordinación. Al valorarse estas características deberá atenderse o considerarse los siguientes factores: duración suficiente, ausencia de incentivos de reembolso, ausencia de costes de servicio de la deuda obligatorios y ausencia de compromisos.

<b>Características y factores</b>	<b>Cumplimiento</b>
Disponibilidad permanente (Permanencia)	El elemento está disponible, o puede ser exigido, para absorber pérdidas de forma total tanto si la empresa está en funcionamiento como en caso de liquidación.
Subordinación	En caso de liquidación, no se reembolsa el elemento a su poseedor tanto no se hayan satisfecho todas las demás obligaciones, incluidas las obligaciones frente a los asegurados.
Duración suficiente (Perpetuidad)	El elemento no tiene duración definida o tiene una duración suficiente atendiendo a la de las obligaciones de la compañía.
Ausencia de incentivos de reembolso	El elemento está libre de obligaciones o incentivos para el reembolso del importe nominal.
Ausencia de costes de servicio de la deuda obligatorios	El elemento está libre de gastos fijos obligatorios
Ausencia de compromisos	El elemento está libre de compromisos.

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

<sup>24</sup> De este excedente se deducirá el importe de las acciones propias que posea directamente la empresa.

Los fondos propios se clasifican en 3 niveles, el tier 1, 2 y 3, en función del cumplimiento de las citadas características (criterios cualitativos) y de si son fondos de balance o de fuera de balance (véase la siguiente tabla). De esta forma<sup>25</sup>:

- Los elementos de los fondos propios de base se clasificarán en el nivel o tier 1 cuando posean las características de disponibilidad permanente y subordinación habida cuenta de los factores.
- Los elementos de los fondos propios de base se clasificarán en el nivel 2 cuando posean la característica de subordinación habida cuenta de los factores.
- Los elementos de los fondos propios complementarios se clasificarán en el nivel 2 cuando posean las características de disponibilidad permanente y subordinación habida cuenta de los factores.
- El resto se clasificarán en el nivel 3.

Calidad/Naturaleza	Consignados en el balance (Fondos propios de base)	No consignados en el balance (Fondos propios complementarios)
Elevada	Nivel 1	Nivel 2
Media	Nivel 2	Nivel 3
Baja	Nivel 3	-

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

La Comisión adoptará medidas de ejecución que establezcan una lista de los elementos de los fondos propios, que se considere que cumplen los criterios de clasificación para cada elemento de los fondos propios, y una descripción precisa de las cualidades que han determinado su clasificación. Además, la Comisión revisará periódicamente la lista y, cuando resulte oportuno, la actualizará conforme a la evolución del mercado (Artículo 97).

La *tercera fase* impone un criterio de admisibilidad y límites a los fondos propios a la hora de determinar los importes a efectos de supervisión. Dichos límites se refieren a los fondos admisibles para cubrir el capital de solvencia obligatorio (SCR) y el capital mínimo obligatorio (MCR), y son resumidos en la siguiente tabla.

<sup>25</sup> En la Propuesta de Directiva se establecían 5 características; Subordinación, Capacidad de absorción de pérdidas, Permanencia, Perpetuidad y Ausencia de gastos de administración obligatorios. La clasificación de los fondos propios se efectuaba en base a: a) los elementos de los fondos propios de base se clasifican en el nivel o tier 1 cuando posean las características 1, 2 y 3, y en grado sustancial, las señaladas en sus puntos 4 y 5, b) los elementos de los fondos propios de base se clasifican en el nivel 2 cuando posean las características 1 y 2, y en grado sustancial, las 4 y 5, c) los elementos de los fondos propios complementarios se clasifican en el nivel 2 cuando posean las características 1, 2 y 3, y en grado sustancial, las 4 y 5, d) el resto se clasifican en el nivel 3.

Capital de solvencia	Límite establecido
SCR	La proporción de elementos del nivel o TIER 1 en los fondos propios admisibles debe ser, como mínimo, de un tercio, y la proporción de elementos del nivel o TIER 3 no debe superar un tercio. Por lo tanto el importe admisible es suma del importe del nivel 1, del importe admisible del nivel 2 y del importe admisible del nivel 3.
MCR	No son admisibles los elementos de fondos propios complementarios, y la proporción de elementos admisibles del tier 2 debe limitarse a la mitad ya que la otra mitad debe ser de nivel o tier 1. Por lo tanto el importe admisible es suma del importe del nivel 1 y del importe admisible de elementos de los fondos propios básicos clasificados en el nivel 2.

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

Los anteriores límites se consideran una condición necesaria ya que la Comisión adoptará medidas de ejecución que establezcan los límites cuantitativos precisos (Artículo 99).

#### **Sección 4. Capital de solvencia obligatorio (SCR) (Artículos 100 a 127)**

Las aseguradoras europeas deben tener fondos propios admisibles para cubrir el capital de solvencia obligatorio o SCR. El cálculo del capital de solvencia obligatorio se realizará partiendo del principio de continuidad de negocio de la empresa, y refleja el verdadero perfil de riesgo de la empresa teniendo en cuenta todos los riesgos cuantificables, así como el efecto neto de las técnicas de reducción del riesgo<sup>26</sup>. Las empresas de seguros y de reaseguros calcularán el capital de solvencia obligatorio con una periodicidad mínima anual<sup>27</sup> y comunicarán los resultados de ese cálculo a las autoridades de supervisión. Las consideraciones fundamentales acerca de la fórmula general del capital de solvencia obligatorio pueden verse resumidas en la siguiente tabla. De este modo, el capital de solvencia obligatorio se corresponderá al valor en riesgo (*VaR*) con un nivel de confianza del 99,5 % y será igual a la suma del capital de solvencia obligatorio básico (BSCR) (Artículo 104), el capital frente al riesgo operativo u operacional (Artículo 107) y el importe del ajuste destinado a tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos (Artículo 108).

<sup>26</sup> Al calcular el capital de solvencia obligatorio, se debe tener en cuenta el efecto de las técnicas de reducción del riesgo, siempre que el riesgo de crédito y otros riesgos derivados del uso de tales técnicas se reflejen debidamente en el capital de solvencia obligatorio.

<sup>27</sup> En caso de que el perfil de riesgo se aparte significativamente de las hipótesis en las que se basa el último SCR notificado, se procederá a un nuevo cálculo.

<b>SCR</b>	
Definición	El capital de solvencia obligatorio se corresponderá al valor en riesgo (VaR) de los fondos propios de base, con un nivel de confianza del 99,5 %.
Composición	El capital de solvencia obligatorio será igual a la suma del capital de solvencia obligatorio básico (BSCR), el capital de solvencia obligatorio frente al riesgo operativo y el importe del ajuste destinado a tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos.
Estructura	Para el cálculo del capital de solvencia obligatorio se emplea una estructura modular basada en técnicas de agregación lineal.
Fórmula concreta	La Comisión adoptará disposiciones de aplicación que definan una fórmula general dada la probabilidad de que los módulos y submódulos varíen con el tiempo.
Simplificaciones	Las empresas de seguros podrán efectuar un cálculo simplificado en relación con un módulo o submódulo de riesgo específico si la naturaleza, envergadura y complejidad de los riesgos que asumen así lo justifica, y siempre que resulte desproporcionado exigir a todas las empresas de seguros y de reaseguros que apliquen el cálculo general.
Substitución de parámetros	Se podrá sustituir un subconjunto de parámetros de la fórmula general, previa autorización de las autoridades de supervisión, en el cálculo de los módulos de riesgo de suscripción <sup>28</sup> por parámetros específicos a la empresa (Artículo 104.7). Además, dicha sustitución podrá ser exigida cuando el perfil de riesgo de la compañía se aparte significativamente de las hipótesis aplicadas en el cálculo de la fórmula estándar (Artículo 110).

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

El capital de solvencia obligatorio básico (BSCR) para una compañía que opere en el negocio de seguros no vida será igual a la suma de los siguientes módulos: riesgo de suscripción del seguro no vida, riesgo de mercado y riesgo de incumplimiento de la contraparte.

<sup>28</sup> Esos parámetros se determinarán a partir de datos internos de la empresa o datos que resulten directamente pertinentes para las operaciones de esa empresa y mediante métodos normalizados. Las autoridades de supervisión comprobarán la integridad, exactitud y adecuación de los datos utilizados.

El *módulo de riesgo de suscripción del seguro no vida* reflejará el riesgo derivado de la suscripción de contratos de seguro no vida, atendiendo a los eventos cubiertos y los procesos seguidos en el ejercicio de la actividad. En él, se tendrá en cuenta la incertidumbre de los resultados de las aseguradoras en relación con las obligaciones de seguro y de reaseguro vigentes y las nuevas actividades que se espere realizar en los siguientes doce meses. El riesgo de suscripción no vida se calculará como una combinación del capital obligatorio correspondiente de, al menos, los submódulos de riesgo de primas y de reserva y riesgo catastrófico (véase la siguiente tabla). Además, se establece que en relación con los riesgos de suscripción catastróficos podrán utilizarse especificaciones geográficas.

Submódulo	Definición
Riesgo de prima y de reserva	Es el riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de las responsabilidades debidas de las fluctuaciones en relación con el momento de ocurrencia, la frecuencia y gravedad de los sucesos asegurados, y en el momento y el importe de la liquidación de siniestros.
Riesgo catastrófico	Es el riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de los pasivos por seguros, debido a una notable incertidumbre en las hipótesis de tarificación y constitución de provisiones correspondientes a sucesos extremos o excepcionales.

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

El *módulo de riesgo de mercado* reflejará el riesgo derivado del nivel o de la volatilidad de los precios de mercado de los instrumentos financieros que influyan en el valor de los activos y pasivos de la empresa. Reflejará adecuadamente la falta de correspondencia estructural entre los activos y los pasivos, en particular, a la mala casación de los flujos respecto a la duración. Este módulo se calculará como una combinación del capital obligatorio correspondiente a los siguientes submódulos o cargas (véase la siguiente tabla): riesgo de tipo de interés, renta variable, inmobiliario, de divisa, de *spread* y de concentraciones en el mercado.

<b>Submódulo</b>	<b>Definición</b>
Riesgo de tipo de interés	Mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros frente a las variaciones en la estructura temporal de los tipos de interés o la volatilidad de los tipos de interés.
Riesgo de renta variable	Mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los precios de mercado de la renta variable.
Riesgo inmobiliario	Mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los precios de mercado inmobiliario.
Riesgo de diferencial de crédito o <i>spread</i>	Mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los diferenciales de crédito en relación con la estructura temporal de tipos de interés sin riesgo.
Riesgo de divisa	Mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los tipos de cambio de divisas.
Riesgo de concentraciones de mercado	Riesgos adicionales a que esté expuesta una compañía aseguradora como consecuencia de una falta de diversificación de la cartera de activos o de una importante exposición al riesgo de incumplimiento de un mismo emisor o grupo de emisores vinculados.

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

Una modificación importante introducida por el Parlamento en la Directiva sobre la Propuesta realizada por la Comisión es el Artículo 106. Con el fin de mitigar los posibles efectos pro cíclicos del sistema financiero y evitar situaciones en que las compañías se vean indebidamente obligadas a conseguir capital adicional o a vender sus inversiones a raíz de movimientos discontinuos adversos en los mercados financieros, el módulo de riesgo de mercado de la fórmula estándar para el capital de solvencia obligatorio incluirá un mecanismo de ajuste simétrico con respecto a las variaciones en el nivel de los precios de las acciones. El mecanismo de ajuste se basará en una función del nivel actual de un índice de las acciones adecuado y un nivel medio ponderado de dicho índice durante un plazo adecuado. El ajuste no dará lugar a la aplicación de una carga de capital propio que sea inferior o superior en 10 puntos porcentuales al requisito estándar. La Comisión adoptará medidas de ejecución que establezcan el mecanismo de ajuste simétrico y el plazo adecuado. Además, la Directiva también contempla en el caso de caídas excepcionales de los mercados financieros, y cuando dicho mecanismo sea suficiente para permitir cubrir el capital de sol-

vencia obligatorio, se ha de contemplar la posibilidad de permitir a las autoridades de supervisión prorrogar el plazo en el que las compañías han de restablecer el nivel de fondos propios admisibles que cubren el capital de solvencia obligatorio.

El *módulo de riesgo de incumplimiento de la contraparte* deberá reflejar las posibles pérdidas al plazo de un año derivadas de incumplimientos imprevistos, o deterioro de la solvencia de las contrapartes y los deudores de las empresas de seguros. Este módulo abarcará los contratos destinados a reducir el riesgo, tales como los contratos de reaseguro, de titulización y de derivados, así como los créditos sobre intermediarios y otros riesgos de crédito no incluidos en el submódulo de riesgo de *spread*. De esta forma debe reflejar para cada una de las contrapartes la exposición global al riesgo, independientemente de la naturaleza jurídica de sus obligaciones contractuales con respecto a esa empresa.

El capital obligatorio frente al riesgo operativo reflejará los riesgos operativos que no estén ya incluidos en los otros módulos de riesgo. Para su cálculo en seguros no vida se tomará en consideración el volumen de las operaciones determinado a partir de las primas devengadas y las provisiones técnicas constituidas. Se establece un límite superior al capital, de forma que no sobrepasará el 30% del BSCR correspondiente a tales operaciones de seguro (Artículo 107.3).

Además del BSCR y de la carga de capital por riesgo operacional, la Directiva establece que debe considerarse el ajuste destinado a tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos. Este ajuste deberá reflejar la posible compensación de pérdidas imprevistas mediante un descenso simultáneo de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos o una combinación de ambos. En el ajuste se tendrá en cuenta el efecto de reducción del riesgo generado por futuras prestaciones discrecionales de los contratos de seguro de vida, en la medida en que las empresas de seguros y de reaseguros puedan demostrar que una reducción de esas prestaciones puede servir para cubrir posibles pérdidas imprevistas cuando se produzcan. Dicha reducción del riesgo no deberá ser mayor que la suma de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos correspondientes a esas futuras prestaciones discrecionales.

La subsección 3 de la sección 3 de la Directiva establece la posibilidad de emplear modelos internos para el capital de solvencia obligatorio (SCR). En este sentido, las aseguradoras podrán calcular el capital de solvencia obligatorio utilizando un modelo interno para calcular el capital de solvencia obligatorio (modelo completo) o uno o varios módulos o submódulos del capital de solvencia obligatorio (modelo parcial). También se contempla la obligación de elaborar un modelo cuando no proceda calcular el capital de solvencia obligatorio conforme a la fórmula general, debido a que el perfil de riesgo de una compañía se aparta significativamente de las hipótesis de base de la fórmula estándar (Artículo 119).

La Directiva describe los requisitos aplicables a las compañías que se proponen o utilizan un modelo interno para el cálculo del SCR. En Solvencia II se podrán utilizar modelos internos parciales para el cálculo de uno o varios de los siguientes

elementos: uno o varios módulos o submódulos de riesgo del capital de solvencia obligatorio básico, el capital de solvencia obligatorio frente al riesgo operativo o al ajuste destinado para tener en cuenta la absorción de pérdidas (Artículo 112.2). Además, un modelo parcial podrá aplicarse al conjunto de la actividad o únicamente a uno o varios segmentos importantes de actividad.

Las aseguradoras que deseen emplear un modelo deben presentar una solicitud que acredite que se satisface la prueba de utilización, así como las normas de calidad estadística, de calibración, de validación y documentación. Posteriormente, las autoridades de supervisión deberán decidir si aceptan o rechazan la solicitud en los seis meses siguientes al recibo de la solicitud completa presentada. A pesar de que una compañía sea autorizada a aplicar un modelo interno, se podrá establecer mediante decisión motivada el requisito de que la compañía facilite una estimación del capital de solvencia obligatorio (SCR) calculado con arreglo a la fórmula general. Una vez autorizadas a usar un modelo interno, las compañías no podrán volver a calcular el capital de solvencia obligatorio con arreglo a la fórmula general, a no ser en circunstancias debidamente justificadas y previa autorización de las autoridades de supervisión (Artículo 117). Los requisitos que debe satisfacer un modelo interno para que mediante las autoridades de supervisión aprueben su uso se resumen en la siguiente tabla. La aplicación de un modelo o de datos obtenidos de terceros no exime del cumplimiento de estos requisitos (Artículo 126).

Requisito	Definición
Prueba de utilización <i>Artículo 120</i>	Las aseguradoras deberán demostrar que el modelo interno se utiliza extensamente y desempeña una importante función por lo que respecta a su sistema de gobernanza, en particular: a su sistema de gestión de riesgos y sus procesos de toma de decisiones, y sus procesos de evaluación y asignación de su capital económico y de solvencia. Además se establece que son los órganos de administración, dirección o supervisión los encargados de velar por que el diseño y el funcionamiento del modelo interno sean siempre adecuados, y por que dicho modelo siga reflejando apropiadamente el perfil de riesgo de las empresas.
Normas de calidad estadística <i>Artículo 121</i>	Los modelos internos y, en particular, el cálculo de la distribución de probabilidad prevista en que se basa deberán satisfacer los siguientes requisitos: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Los métodos utilizados se basarán en técnicas actuariales y estadísticas adecuadas.</li> <li>- Los datos utilizados en el modelo interno deberán ser exactos, completos y adecuados. Las empresas deberán actualizar las series de datos utilizadas en el cálculo de la distribución de probabilidad prevista al menos anualmente.</li> </ul>

Requisito	Definición
<p>Normas de calidad estadística <i>Artículo 121</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No se establecerá ningún método concreto para el cálculo de la previsión de distribución de probabilidad.</li> <li>- Los modelos internos podrán considerar las dependencias existentes dentro de una misma categoría y entre distintas categorías de riesgos.</li> <li>- Se podrá tener en cuenta plenamente el efecto de las técnicas de reducción del riesgo en un modelo interno, a condición de que el riesgo de crédito y otros riesgos derivados del uso de estas técnicas se reflejen adecuadamente en el modelo.</li> <li>- Los modelos internos deberán recoger con exactitud los riesgos específicamente vinculados a las garantías financieras y posibles opciones contractuales, siempre que resulten significativos.</li> <li>- El modelo interno podrá tener en cuenta futuras decisiones de gestión, cuya adopción se juzgue razonablemente probable en determinadas circunstancias. Se debe prever el periodo de tiempo necesario para ejecutar tales decisiones.</li> </ul>
<p>Normas de calibración <i>Artículo 122</i></p>	<p>Los modelos internos podrán contemplar un horizonte temporal o una medida de riesgo distintos a los del VaR al 99,5% durante un año, siempre y cuando los resultados del modelo interno puedan ser utilizados para calcular el SCR de forma tal que éste suponga para los asegurados un nivel de protección equivalente. Sin embargo, siempre que sea posible, se calculará el SCR directamente a partir de la previsión de distribución de probabilidad generada por su modelo interno, utilizando el VaR con un nivel de confianza del 99,5 % y a un horizonte de un año. Además, las autoridades de supervisión podrán exigir a las compañías que apliquen su modelo interno a carteras de referencia y utilizando hipótesis basadas en datos externos a fin de comprobar la calibración del modelo interno y verificar que sus especificaciones son acordes con las prácticas de mercado generalmente aceptadas.</p>
<p>Asignación de pérdidas y ganancias <i>Artículo 123</i></p>	<p>Las aseguradoras deberán analizar, con una periodicidad mínima anual, las causas y orígenes de las pérdidas y ganancias que se deriven de cada uno de los principales segmentos de actividad y demostrar de qué modo la categorización del riesgo elegida en el modelo explica estas causas y orígenes.</p>

Requisito	Definición
<p>Normas de validación <i>Artículo 124</i></p>	<p>Se debe prever un ciclo periódico de validación de los modelos internos, que permita demostrar a las autoridades de supervisión que los requisitos de capital resultantes son adecuados. Dicha validación está dirigida a comprobar su funcionamiento, verificar que sus especificaciones sigan siendo adecuadas y comparar sus resultados con los obtenidos en la realidad. Además la validación incluirá el examen de la exactitud, integridad y adecuación de los datos utilizados por el modelo y un análisis de la estabilidad del modelo interno y, en particular, de la sensibilidad de los resultados del modelo frente a modificaciones de las hipótesis de partida.</p>
<p>Normas sobre documentación <i>Artículo 125</i></p>	<p>Las compañías deberán justificar documentalmente la estructura y los detalles de funcionamiento de su modelo interno. La documentación deberá demostrar que se cumple con la prueba de utilización, las normas de validación, la asignación de pérdidas y ganancias, las normas de calidad estadística y las normas de calibración. Además, debe contener una descripción detallada de la teoría, hipótesis y fundamentos matemáticos y empíricos en que se basa el modelo interno. También se debe indicar toda circunstancia en la que el modelo interno no funcione eficazmente o todo cambio importante que introduzcan en su modelo interno.</p>

Fuente: Parlamento Europeo y Consejo (2009).

Además cuando se trate de un modelo interno parcial se establecen las siguientes condiciones adicionales (Artículo 113): la empresa debe justificar adecuadamente las razones por las que se utiliza un modelo de alcance parcial, el capital de solvencia obligatorio resultante debe reflejar mejor el perfil de riesgo de la empresa y, finalmente, el modelo interno parcial debe integrarse plenamente en la fórmula estándar de determinación del capital de solvencia obligatorio. Cuando un modelo interno parcial sea sólo aplicable solo a ciertos submódulos de un riesgo concreto o a algunos segmentos de actividad, las autoridades de supervisión podrán exigir a que las compañías presenten un plan de transición factible para ampliar el alcance del modelo a otros submódulos o segmentos. La Comisión adoptará medidas de ejecución que establezcan el procedimiento que debe seguirse para la aprobación de un modelo interno y las adaptaciones en las normas sobre validación.

### **Sección 5. Capital mínimo obligatorio (MCR) (Artículos 128 a 131)**

Las aseguradoras deberán poseer fondos propios de base admisibles para cubrir el capital mínimo obligatorio o MCR. El MCR se corresponde con un nivel de capi-

tal por debajo del cual los intereses de los tomadores, en caso de continuar la empresa su actividad, se verían seriamente comprometidos por estar expuestos a un nivel de riesgo inaceptable. El MCR debe calcularse con periodicidad trimestral, con arreglo a una fórmula sólida y sencilla, y de tal modo que el cálculo pueda ser auditado. Se calibrará el capital mínimo obligatorio en función de un nivel de confianza del 85%<sup>29</sup> a un año. Además se establece su mínimo absoluto en un 2,2 millones de euros cuando se trate de empresas de seguros y de reaseguros no de vida, y 3,2 millones de euros en el caso de vida (Artículo 129.1.d)<sup>30</sup>.

Debido a que el capital mínimo obligatorio actúa como último nivel de intervención debería ser sensible al riesgo a fin de reflejar adecuadamente el riesgo verdadero de la empresa y por tanto la exposición del riesgo para los asegurados; el mejor cálculo del riesgo lo proporciona el capital de solvencia obligatorio. De esta forma, se establece que el MCR deberá ser entre un 25% y un 45% del SCR de la compañía, siendo la cantidad exacta un cálculo basado en las variables<sup>31</sup> que indican la capacidad de la empresa de permanecer operativa. Para facilitar la transición al nuevo régimen, las compañías que cumplan los requisitos correspondientes al régimen Solvencia I en la fecha de entrada en vigor de la Directiva, pero no satisfagan el MCR de Solvencia II, dispondrán de un plazo de un año para adaptarse al nuevo régimen<sup>32</sup>. En caso contrario le será revocada la autorización, con sujeción a los procedimientos previstos en la legislación nacional (Artículo 131).

### **Sección 6. Inversiones (Artículos 132 a 135)**

Los activos de las aseguradoras se clasifican en aquellos que cubren las provisiones técnicas, los que cubren el capital de solvencia obligatorio y los activos de libre disposición. Todas las inversiones que mantengan las aseguradoras deben invertirse, gestionarse y controlarse con arreglo al principio de prudencia, que obliga a las compañías a invertir sólo en activos e instrumentos cuyos riesgos puedan vigilar, gestionar y controlar buscando siempre el mayor beneficio de los tomadores. El Artículo 133 establece la libertad de inversión, de forma que los Estados miembros no podrán exigir a las empresas que inviertan en determinadas categorías de activos<sup>33</sup>. Finalmente, el Artículo 134 prohíbe a los Estados miembros exigir

---

<sup>29</sup> La Propuesta de Directiva contemplaba un nivel de confianza de entre el 80% y el 90% a un año. El 80% se obtiene como un tercio de un capital de solvencia obligatorio calibrado en función de un VaR con un nivel de confianza del 99,5%, en el supuesto de una distribución normal.

<sup>30</sup> La Propuesta de Directiva establecía un límite inferior de 1 y 2 millones de euros respectivamente.

<sup>31</sup> Se calculará como una función lineal de un conjunto o subconjuntos de las siguientes variables: las provisiones técnicas, las primas suscritas, los capitales en riesgo, los impuestos diferidos y los gastos de administración de la empresa (Artículo 129.2).

<sup>32</sup> El borrador del texto de la nueva Ley de Supervisión de los Seguros Privados por la que se transpondrá a la legislación española la Directiva de Solvencia II contempla una prórroga de un año, hasta el 31 de octubre de 2013, para que las aseguradoras cumplan con las nuevas exigencias de capital.

<sup>33</sup> Puesto que esta exigencia podría ser contraria a la liberalización de los movimientos de capital establecida en el artículo 56 del Tratado Constitutivo de la Comunidad Europea.

la localización en la Comunidad Europea o en un estado miembro de los activos que cubran las provisiones técnicas de una compañía.

Debemos concluir este apartado afirmando que se espera que del régimen de Solvencia II se derive una protección aun mejor de los tomadores de seguros. En este sentido, la Directiva exige a los Estados miembros que faciliten a las autoridades de supervisión los recursos para cumplir las obligaciones que ella establece.

#### **4.3. Los tres pilares de Solvencia II**

Solvencia II supone una profunda revisión del sistema de valoración actual de la situación financiera de una compañía aseguradora europea. Dicho sistema ha sido diseñado para alcanzar los siguientes objetivos generales (Ernest & Young, 2002):

- El desarrollo y establecimiento de un nuevo sistema que permita determinar los recursos propios requeridos a cada entidad aseguradora en función de los riesgos asumidos y de su gestión.
- El establecimiento de nuevas competencias y mecanismos de actuación de los supervisores, con el fin de que sean capaces de anticipar y evitar posibles situaciones de deterioro del nivel de solvencia.
- Establecer la información que las entidades debieran proporcionar con objeto de potenciar la disciplina de mercado. De esta forma, todos los participantes en el mercado dispondrían de información suficiente sobre el nivel de solvencia actual y futura de las entidades para su toma de decisiones.

Fruto de estos objetivos se establecerá un sistema que incentivará una mejor medición y gestión de los riesgos por parte de las compañías. Además la detección temprana de situaciones de crisis financiera y la transparencia del mercado, posibilitarán una mayor estabilidad al sistema asegurador europeo, y por lo tanto, de la economía de la euro región. Los objetivos se han formulado en los llamados *Tres Pilares*, coincidentes con los acordados por el sector bancario en Basilea II (Directiva sobre los requerimientos de capital). El Pilar I trata las exigencias cuantitativas, el Pilar II las exigencias cualitativas y el Pilar III la disciplina del mercado. Esta estructura, los contenidos y objetivos de cada pilar, pueden verse en la siguiente tabla.

Solvencia II		
Pilar I Requisitos cuantitativos	Pilar II Requisitos cualitativos	Pilar III Disciplina de mercado
<p><i>Exigencia de Fondos Propios:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Requisito de capital mínimo (MCR).</li> <li>- Requisito de capital de solvencia (SCR).</li> </ul> <p><i>Objetivo: los recursos propios de las compañías aseguradoras deben ser sensibles al riesgo.</i></p>	<p><i>Asegurador:</i> Principios de control interno y de gestión del riesgo.</p> <p><i>Objetivo:</i> La gestión de riesgos y auto evaluación del nivel de recursos necesarios.</p>	<p><i>Asegurador:</i> Informar al mercado mediante la divulgación de información.</p> <p><i>Objetivo:</i> Evaluar los niveles de riesgo asumidos por cada compañía.</p>
	<p><i>Supervisor:</i> Principios para el proceso de supervisión.</p> <p><i>Objetivo:</i> Detectar situaciones de crisis con suficiente antelación, es decir, supervisión preventiva y dinámica.</p>	<p><i>Supervisor:</i> Transparencia.</p> <p><i>Objetivo:</i> Evaluar los niveles de riesgo asumidos por cada compañía.</p>

Fuente: Elaboración propia a partir de Bernaldo de Quirós (2002).

Los tres pilares y sus aspectos más destacables son resaltados a continuación:

#### A. El primer pilar: “Niveles mínimos de capital y gestión del riesgo”

El primer pilar establece y desarrolla las exigencias cuantitativas del nuevo sistema, es decir, las normas y exigencias de carácter financiero, de acuerdo con el nivel real de riesgo asumido por la entidad. El sistema se diseña de tal manera que se incentive a las entidades supervisadas a medir y gestionar de forma adecuada sus riesgos. Así, se diferencia el capital mínimo o MCR (*Minimum Capital Requirement*) y el capital de solvencia SCR (*Solvency Capital Requirement*), ambos basados en los principios de valor y de capital económico.

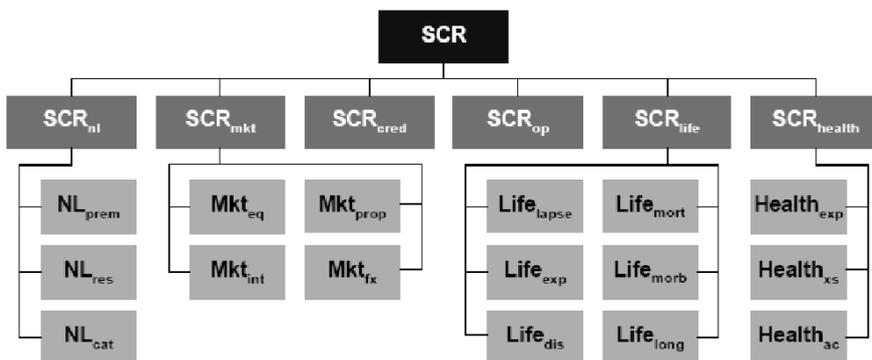
##### A.1. El requerimiento de capital a efectos de solvencia (SCR).

Se realizará el cálculo del Requisito de Capital de Solvencia o nivel de recursos óptimo (SCR) mediante modelos internos aprobados por el regulador o empleando la fórmula que se establezca con carácter general. El SCR refleja el nivel de capital que permite a una entidad absorber pérdidas significativas e imprevistas con una determinada probabilidad de ruina y horizonte temporal. El SCR queda esta-

blecido en la Directiva de Solvencia II en el nivel de capital requerido de modo que haya un 0,5% de probabilidad de que los activos no sean suficientes para asumir las obligaciones durante el próximo año, considerado para tal efecto el VaR al 99,5% a un año. Como el Pilar I y el SCR estarán basados en una base de valor anual, cualquier riesgo no considerado en este pilar debe considerarse en el Pilar II de análisis cualitativo de los riesgos. Para estudiar la forma de implantar el SCR, el Comité Europeo de Seguros ha estudiado los modelos prospectivos de solvencia ya existentes en otros países europeos (Suiza, Reino Unido y Holanda).

La fórmula definitiva del cálculo del SCR no está todavía definida, sino que se está calibrando en los estudios de impacto cuantitativos realizados (QIS1, QIS2, QIS3 y QIS4) y que se esperan realizar (QIS5). El CEIOPS (2006d) propuso en QIS 2 la primera aproximación analítica general para el cálculo del SCR basándose en varios módulos. Dicho cálculo se basaba las siguientes categorías de riesgo (véase el siguiente gráfico):

- El  $SCR_{mkt}$  es el elemento de carga de capital para el riesgo de mercado.
- $SCR_{life}$  es el elemento de carga de capital para el riesgo asegurador en vida.
- $SCR_{health}$  es el elemento de carga de capital para el riesgo asegurador en salud.
- $SCR_{nl}$  es el elemento de carga de capital para el riesgo asegurador en no vida.
- $SCR_{cred}$  es el elemento de carga de capital para el riesgo de crédito.
- $SCR_{op}$  es el elemento de carga de capital para el riesgo operacional.



Fuente: CEIOPS (2006d).

Para cada apartado se desarrolla un método de cálculo, que puede verse detallado en dicho estudio. Estas cargas de capital de los módulos principales de riesgo se combinaban usando una matriz de correlaciones, de esta forma:

$$SCR_1 = \sqrt{\sum_{rxc} CorrSCR^{rxc} * SCR_r * SCR_c}$$

donde:

$CorrSCR^{rxc}$  son los elementos de la matriz de correlaciones  $CorrSCR$

$SCR_r, SCR_c$  son las cargas de capital para los riesgos individuales del  $SCR$ .

Cada compañía debía terminar las celdas de la matriz de correlaciones ( $CorrSCR$ ) usando sus propias hipótesis. Sin embargo, el CEIOPS sugería las relaciones de la siguiente tabla, donde L indica correlación baja; ML, medio-baja; M, media; MH, medio-alta y H indica alta correlación.

	$SCR_{mkt}$	$SCR_{cred}$	$SCR_{life}$	$SCR_{health}$	$SCR_{nl}$	$SCR_{op}$
$SCR_{mkt}$	1					
$SCR_{cred}$	MH	1				
$SCR_{life}$	ML	ML	1			
$SCR_{health}$	ML	ML	ML	1		
$SCR_{nl}$	ML	M	L	L	1	
$SCR_{op}$	M	ML	ML	ML	M	1

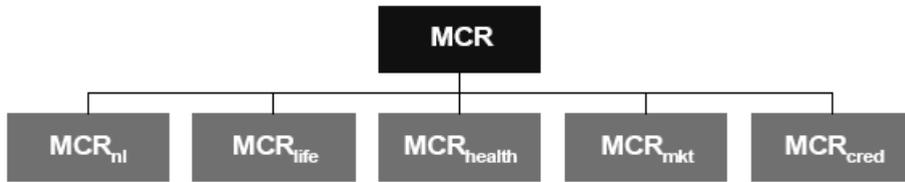
Fuente: CEIOPS (2006d).

## A.2. El Requerimiento mínimo de capital (MCR)

El MCR es el nivel o cantidad mínima absoluta de capitales que las compañías de seguros deben mantener para responder a variaciones adversas en la totalidad de sus pasivos asumidos. Representa el nivel por debajo del cual el supervisor debe adoptar medidas especiales para garantizar la solvencia de la entidad. La finalidad de “capital mínimo”, justifica que el sistema de cálculo que se pueda establecer sea simple, y sea una medida sencilla, sólida y objetiva (CEIOPS, 2005b). Cuando una empresa de seguros no alcance el MCR, estará obligada a restablecer, en un plazo determinado, el importe correspondiente al MCR. Este proceso se realizará conforme a un plan concreto y viable sometido a la aprobación de la autoridad de supervisión (Comisión Europea, 2006).

El CEIOPS en la petición de asesoramiento número nueve se comprometió a desarrollar una fórmula basada en un factor simple para el MCR simplificando el SCR, de forma que se conservaran sus objetos más significativos, pero usando una técnica más directa para la agregación y valorando los factores con un nivel inferior de confianza. El CEIOPS (2006d) desarrolló una fórmula que simplificaba el cálculo del MCR. La forma de cálculo era similar a la del SCR pero tenía en cuenta el riesgo operacional (véase el gráfico inferior):

$$MCR_1 = \sqrt{\sum_{rxc} CorrMCR^{rxc} * MCR_r * MRC_c}$$



Fuente: CEIOPS (2006d).

La matriz de correlaciones entre las 5 categorías de riesgo se muestra en la siguiente tabla.

	SCR <sub>mkt</sub>	SCR <sub>cred</sub>	SCR <sub>life</sub>	SCR <sub>health</sub>	SCR <sub>ni</sub>
SCR <sub>mkt</sub>	1				
SCR <sub>cred</sub>	0,75	1			
SCR <sub>life</sub>	0,25	0,25	1		
SCR <sub>health</sub>	0,25	0,25	0,25	1	
SCR <sub>ni</sub>	0,25	0,5	0	0	1

Fuente: CEIOPS (2006d)

Otra propuesta estudiada para implantar el MCR fue la realizada por la CEA<sup>34</sup> (CEA, 2006c). La CEA sugirió fijar el MCR como porcentaje del SCR aprobado por el supervisor, tanto si éste fue calculado por la técnica estándar o mediante un modelo interno. De esta forma el SCR sería:

El factor de ponderación estaba en dicha propuesta sin determinar, pero se citaron como ventajas fundamentales de este método en contraposición al de QIS 2 las siguientes: es un método objetivo, relativamente simple y fácil de comunicar, es justificable pues toma una base económica racional, es sensible al riesgo y por lo tanto permitirá la diversificación y la mitigación del riesgo, el MCR no puede ser mayor que el SCR y la técnica es consistente con el uso de los modelos internos para el cálculo del SCR.

De esta forma, y a pesar de que las fórmulas de cálculo está por concretar, podemos afirmar que el capital del asegurador estará compuesto de: un nivel mínimo

<sup>34</sup> Son las siglas de *Comité Européen des Assurance*. La CEA es la Federación Europea de Seguro y Reaseguro. Está formada por 33 asociaciones nacionales miembros, entre las que destacamos a UNESPA, que representan a más de 5.000 compañías aseguradoras y reaseguradoras. Para más información puede consultarse su página web: <http://www.cea.eu/>

absoluto por debajo del cual no se permitirá la continuidad del negocio (MCR), un nivel objetivo de capital por debajo del cual se incrementará la vigilancia de la empresa pero que mantendrá la continuidad de la empresa (SCR) y, por último, un nivel de sobrecapitalización que estará influenciado por la estrategia de cada compañía (véase la siguiente figura).

Nivel de sobrecapitalización o Fondos Propios libres	
	<i>"Zona de comodidad"</i>
SCR (calculado por fórmula estándar o modelo interno)	
	<i>"Zona mixta"</i>
MCR (mínimo imprescindible de capital)	
	<i>"Zona de peligro"</i>

## B. El segundo pilar: "Revisión del organismo supervisor"

El Pilar II establece las exigencias cualitativas del proceso de supervisión y gestión del riesgo. Uno de los principios inspiradores de Solvencia II es que el margen de solvencia correspondiente a cada tipo de riesgo dependerá de la naturaleza de las operaciones realizadas por las entidades, de la configuración y de la eficacia de las estructuras de gestión y control interno de cada aseguradora (Lozano, 2005). Esto implicará la evaluación, por parte del supervisor, de la efectividad de los sistemas de gestión de riesgos y de control interno. Por tanto, este segundo pilar atribuye un nuevo papel a las entidades, el principio de responsabilidad de las entidades en el desarrollo de su gestión, y al propio supervisor ante los procedimientos de supervisión, ya que deben tener la capacidad de prever las situaciones de crisis con suficiente antelación. Estos nuevos papeles otorgados están en línea con lo expuestos por IAIS (2003a). En este documento guía sobre los niveles de control de la solvencia se establece que los aseguradores deben estar motivados para desarrollar y revisar, periódicamente, sus propios niveles esperados de solvencia para asegurarse que tales niveles reflejan prudencialmente su perfil de riesgo. En relación con el papel del supervisor en este documento se establece que el nivel de control debe establecerse lo suficientemente alto como para permitir una temprana intervención, de manera que exista una probabilidad elevada de que la situación será rectificada.

El principio de responsabilidad de las entidades proporciona a las empresas la oportunidad de gestionar activamente los riesgos, y mediante el desarrollo de modelos internos establecer los niveles de capital necesarios para soportar esos riesgos. Esta mayor libertad empresarial va a exigir un mayor grado de responsabilidad de la gerencia. Solvencia II pretende implantar una nueva cultura de gerencia empresarial orientada a conseguir una mayor calidad en la gestión mediante la consideración de nuevos elementos (Bernaldo de Quirós, 2003). El reconocimiento de los modelos internos, ya sean parciales o completos, estará supeditado a que

contribuyan a una mejor gestión del riesgo por parte de la entidad y reflejen su verdadero perfil de riesgo de manera más exacta que la fórmula estándar.

La capacidad de prever las situaciones de crisis con la suficiente antelación obliga a modificar las competencias y capacidades del organismo supervisor, que tendrá que pasar del enfoque estático de Solvencia I a uno dinámico. Esto supone un cambio cultural para el supervisor que deberá determinar, no sólo la salud financiera al cierre del balance, sino sus perspectivas a futuro. El objetivo es detectar con la suficiente antelación desequilibrios de solvencia y evaluar las distintas soluciones aportadas. Una herramienta para dicha labor será la aplicación de medidas preventivas y de diagnóstico (“*Diagnostic and Preventive tools*”) en el que tendrán un papel importante los denominados sistemas de alerta o de detección temprana (“*Early Warnings Systems*”)<sup>35</sup> y la nueva orientación de las comprobaciones inspectoras (Bernaldo de Quirós, 2003). La Comisión Europea (2006) establece que se debe proporcionar a las autoridades de supervisión las herramientas necesarias y dotarles de las facultades oportunas para evaluar la solvencia global de todas las entidades, conforme a un planteamiento prospectivo y basado en el riesgo.

### C. El tercer pilar: “Disciplina del mercado (Transparencia)”

El pilar III versa sobre la divulgación de información y transparencia, de forma que se fortalezcan los mecanismos de mercado y de supervisión del riesgo. Como afirma Harrington (2004) la disciplina de mercado puede tener más éxito en la creación de un sector asegurador solvente que la regulación. El papel de las aseguradoras en este ámbito se puede analizar desde un punto de vista dual. Por un lado, en la relación compañía aseguradora-mercado se incrementará la divulgación de información relativa al nivel de solvencia, exposición al riesgo y mecanismos de control interno. De esta forma, cualquier integrante del mercado (asegurados, inversores, agencias de *rating*, etc.) verá facilitada su capacidad de analizar la solvencia de la compañía para la toma de sus decisiones. Por otro lado, en las relaciones de las compañías-organismo supervisor se procederá a una armonización de las exigencias de comunicación de información.

## 4.4. Modelos de control interno en Solvencia II

Solvencia I es un modelo estático y simple, basado fundamentalmente en magnitudes contables, mientras que Solvencia II es un modelo dinámico, basado en principios. El nuevo sistema de solvencia supone un cambio de visión de control por parte del regulador a una visión moderna en la que éste confiará en mayor medida en la capacidad de las entidades para gestionar sus riesgos. Los meca-

---

<sup>35</sup> El establecimiento de sistemas de “alerta temprana” de insolvencias supondría un ahorro en los costes, en tiempo y dinero, que conlleva la actividad supervisora. Los trabajos de Segovia (2003), Segovia *et al.* (2003), Segovia *et al.* (2004), Díaz *et al.* (2004), Díaz *et al.* (2004b), del Pozo *et al.* (2006), se encuadran en este ámbito, al examinar la predicción de las insolvencia en el sector asegurador a partir de un conjunto de ratios financieros.

nismos y herramientas que deben desarrollar los aseguradores que deseen emprender este proceso son los modelos de control interno (Lozano, 2005).

Un modelo de control interno se fundamenta en el compromiso de la organización por la medición y gestión de los riesgos, y supone la obligación de realizar una serie de actividades. A nivel interno deben realizarse las siguientes actividades: identificar los riesgos fijando el mapa de riesgos (*risk map*) al que se enfrenta la entidad; establecer sistemas que permitan una evaluación periódica de los riesgos, fijar niveles de tolerancia y estrategias de gestión e implantar mecanismos de control. A nivel externo requerirá de una mayor comunicación con el resto del sector, posibilitando que los grupos de interés conozcan su verdadera situación financiera de la compañía (Lozano, 2005).

Solvencia II otorga un papel importante a los modelos internos ya que se permitirá que los aseguradores calculen los requisitos de capital de solvencia si éstos han sido validados y aprobados por el regulador. Tales modelos necesitarán tener medidas del riesgo, horizontes del tiempo y alcance de los riesgos al menos tan prudentes como los que subyacen el modelo estándar. Desde el punto de vista de los reguladores los modelos internos presentan las siguientes ventajas: animan a los aseguradores a medir y manejar sus riesgos, son más flexibles que los modelos estándares de la industria y pueden ser actualizados a medida que los mercados financieros y el negocio de la compañía se desarrolla y tienen la capacidad de poder representar el negocio de un asegurador más fielmente que el de un estándar basado en reglas.

Tanto las compañías aseguradoras que desarrollen el modelo como los supervisores van a necesitar disponer de recursos para la implantación de tales modelos. Estos costes provocan que dichos modelo no sólo deban cuantificar el capital necesario, sino que actúen como potentes herramientas de gestión para la toma de decisiones. Es decir, tal y como establece la Directiva de Solvencia II, en caso de que una aseguradora haya desarrollado un modelo interno para el cálculo del capital de solvencia obligatorio deberá realizar la autoevaluación de riesgos y solvencia utilizando dicho modelo.

Solvencia II, a semejanza de Basilea II, permitirá la implantación de modelos parciales para facilitar su desarrollo e implantación. De esta forma, se podrán utilizar modelos internos parciales para el cálculo de uno o varios de los siguientes elementos: uno o varios módulos o submódulos de riesgo del capital de solvencia obligatorio básico, el capital de solvencia obligatorio frente al riesgo operativo o al ajuste destinado para tener en cuenta la absorción de pérdidas. Además, un modelo parcial podrá aplicarse al conjunto de la actividad o únicamente a uno o varios segmentos importantes de actividad. En el Informe elaborado por KPMG para la Comisión Europea se destaca que de las grandes aseguradoras analizadas, sólo una minoría de los modelos intenta cubrir el espectro completo de riesgos asumidos, siendo la mayoría modelos parciales. Para el resto de categorías de riesgo no sean capturados por el modelo interno, la empresa estará sujeta a la fórmula estándar.

En el último estudio de impacto realizado (QIS4) se realizó un cuestionario a las empresas acerca del grado de utilización de los modelos internos. La muestra de las compañías españolas participantes en dicho estudio ascendió a 112, de las cuales 23 eran compañías de vida, 56 de no vida, 2 reaseguradoras y 31 mixtas, siendo principalmente compañías de un tamaño medio y grande. Los resultados para las entidades españolas participantes, resumidos en la siguiente tabla, muestran la concienciación creciente de la importancia de desarrollar o adquirir un modelo interno.

<b>Aspectos evaluados</b>	<b>Respuesta</b>
Grado de utilización actual	El 25% de las entidades españolas participantes en QIS4 dispone y emplea un modelo interno.
Modelo completo o parcial	De los participantes que disponen de modelos internos actualmente, el 30% tiene un modelo interno completo mientras que el 70% sólo lo aplica parcialmente.
Tipología de riesgos	Los riesgos gestionados mediante modelos internos son principalmente el requerimiento de capital de solvencia de los riesgos aseguradoras de no vida, el riesgo de mercado y el riesgo operacional.
Razón de utilización del modelo	Obtención de una mejor gestión de dichos riesgos
Carga de capital resultante	La ratio de capital de solvencia del modelo estándar entre el resultante de aplicar el modelo estándar (SCR Modelo Interno/SCR Fórmula Estándar) resulta de un 108% para el conjunto de compañías analizadas. Sin embargo, existen amplias diferencias ya que dicho ratio varía entre el 86,2% de las compañías de no vida, el 101,5% de las compañías de vida y el 119,3% de las compañías mixtas.
Grado de utilización esperado	El 36,5% dice tener en consideración el uso de un modelo interno para el futuro.

Fuente: Araque (2008).

#### 4.5. Principales diferencias entre Solvencia I y Solvencia II

Una vez analizados los sistemas de solvencia actuales en la Unión Europea y el nuevo proyecto Solvencia II, resulta útil resumir las principales diferencias entre ambos enfoques. Solvencia II tiene una visión totalmente opuesta a la de su predecesor al posibilitar y/o exigir la automedición y gestión activa de los riesgos que una compañía asume, para que evaluado su impacto determine la cuantía de fondos necesarios. El Pilar I establecerá unos fondos mucho más sensibles al riesgo

que los actuales de Solvencia I. De esta forma se trata de abolir las situaciones contradictorias que produce el sistema actual basado en ponderaciones fijas, y por otro lado fomentar una cultura de medición y gestión del riesgo por parte de las compañías. Además, en el nuevo sistema el margen de solvencia no va a ser el único parámetro para determinar la situación financiera global de cada compañía, como en Solvencia I. En el nuevo proyecto se van a valorar otros aspectos de la compañía como su capacidad para tratar esos riesgos y, como consecuencia, las compañías necesitarán de herramientas y estructuras de gestión y control que les permitan desarrollar su cometido.

El mayor protagonismo otorgado a las compañías, también viene de la mano de un papel más activo del regulador y del mercado. Los supervisores en Solvencia II dejan su viejo rol de controladores estáticos, esperando que sean capaces de detectar situaciones de reducción de solvencia con la suficiente antelación para evitar, en la medida de lo posible, crisis financieras en el sector. Por parte del mercado, se establece la necesidad de que los agentes que operan (accionistas, prestamistas, asegurados...) conozcan en todo momento los niveles de riesgo realmente asumidos por cada compañía, de forma que sus decisiones sirvan de estímulo al mantenimiento de los niveles de solvencia adecuados (Bernaldo de Quirós, 2002). Otro conjunto importante de diferencias entre el sistema actual y Solvencia II reside en que bajo el nuevo régimen se realizará una valoración de mercado de las cuentas del Activo y Pasivo de las aseguradoras, la consideración de la diversificación y mitigación de los riesgos, los niveles de capital y de acción del supervisor. Estas diferencias se recogen resumidas en las siguientes tablas.

	<b>Partida de Balance</b>	<b>Solvencia I</b>	<b>Solvencia II</b>
(1)	Activos	Valor en libros ( <i>Book value</i> ) / Valor de mercado ( <i>Market value</i> )	Valor de mercado
(2)	Pasivos	Valor en libros	Valor de mercado
(3)	Otros pasivos	Valor en libros	Valor de mercado
(4)	Capital disponible	(1)-(2)-(3)	(1)-(2)-(3)
(5)	Otro capital disponible/ elementos absorbentes de riesgo	P.ej. Deuda subordinada	P.ej. Deuda subordinada
(6)	Total	(4)+(5)	(4)+(5)
(7)	Requerimientos de capital	Solvencia I	SCR
(8)	Exceso de capital elegible	(6)-(7)	(6)-(7)

Fuente: CEA (2006b).

	<b>Solvencia I</b>	<b>Solvencia II</b>
Valoración de activos	Valor de Mercado/Contable sujeto a que criterios de admisibilidad	Valor de mercado
Valoración de pasivos	En la mayor parte de los casos se incluyen márgenes prudenciales en las provisiones técnicas	Valor de mercado
Capital disponible	Reconocimiento parcial basado en la designación de ciertos <i>ítems</i>	Técnica de Balance total basada en la capacidad económica de absorber riesgo
Diversificación	No reconocida	Totalmente reconocida
Mitigación del riesgo	Parcialmente reconocida	Totalmente reconocida
Niveles de control de solvencia	Sólo un nivel de control complementado por varias reglas nacionales	Dos niveles (SCR y MCR) y zona de intervención.
Aspectos sobre grupos	Reconocidos parcialmente en la Directiva de Grupos, pero no en una base económica	Totalmente reconocidos sobre una base económica
<i>Estimación</i>	<i>Subjetiva y no específica a las circunstancias de la compañía</i>	<i>Más objetiva. Los factores son estimados sobre una base económica usando datos de mercado/ históricos y la experiencia real de la compañía</i>

Fuente: CEA (2006b).

Las diferencias de Solvencia II respecto a su predecesor lo convierten en un sistema más adecuado para velar por la solvencia de las compañías aseguradoras y preservar así los intereses de los asegurados. Es útil analizar Solvencia II bajo el marco establecido por Cummins *et al.* (1994), quienes establecieron siete criterios que debe satisfacer un sistema de solvencia. Dichos criterios y la medida en la que Solvencia II los satisface se detalla a continuación:

1. Debe proporcionar los incentivos necesarios a las compañías con debilidad financiera para aumentar su capital o reducir su exposición al riesgo sin distorsionar las decisiones de aquellas más fuertes. Así, mayores exposiciones al riesgo deben requerir mayores requerimientos de capital.  
En principio Solvencia II satisface este criterio a diferencia de Solvencia I, en la que no se proporcionaban tales incentivos dado que incluso entra en conflicto con el establecimiento adecuado de primas y provisiones técnicas.

2. La fórmula estándar debe ser sensible al riesgo y reflejar las categorías de riesgo más importantes para un asegurador.  
La fórmula de Solvencia II es sensible al riesgo y cubre las principales categorías de riesgo. Los riesgos no considerados en el Pilar I serán tratados en el Pilar II.
3. La fórmula estándar debe estar adecuadamente calibrada, de forma que las cargas de capital resultantes sean proporcionales al impacto de cada riesgo sobre la solvencia de un asegurador.  
En el momento de elaboración de este trabajo, la fórmula estándar final no ha sido diseñada por lo que este criterio es difícil de valorar. En la última propuesta (QIS4) ya se ha calibrado la carga resultante de muchas categorías de riesgo y la diversificación entre ellas, pero todavía existen coeficientes de correlación no ajustados. Además, la consideración del horizonte temporal de un año para la evaluación de la solvencia puede provocar una infravaloración del riesgo realmente asumido especialmente para el seguro de vida y los ramos de colación larga en no vida. Sin embargo, el empleo de modelos internos en los que cada compañía calibre el impacto de los riesgos a su propia experiencia y la posibilidad de analizar periodos temporales de duración superior motiva la aceptación de este criterio.
4. Se debe centrar en las grandes insolvencias, identificando aquellos aseguradores que provoquen mayores costes. Ello se debe a que analizando las quiebras de las compañías aseguradoras se encontró que la mayor parte de los costes de insolvencia estaban inducidos por un número pequeño de aseguradoras de gran tamaño.  
En la medida en que los grandes aseguradores son más proclives a elaborar modelos internos que las más pequeñas, si la fórmula estándar es muy conservadora este principio puede ser violado. Sin embargo, debido a que el modelo interno debe reflejar en mayor medida que el estándar el riesgo realmente asumido por una compañía, consideramos que Solvencia II si satisface este criterio. Un aspecto particular es que el empleo como medida del riesgo del VaR y no del TVaR pudiera violar este principio, dado que no se concentra en los escenarios más perjudiciales para el asegurado al no incorporar el coste de la insolvencia sino sólo su probabilidad.
5. Debe estar basado en el valor económico de los activos y pasivos.  
Solvencia II adopta una valoración consistente con el mercado del Balance de una compañía aseguradora.
6. Debe fomentar la transparencia o declaración de datos exactos, evitando la manipulación de los mismos.  
Solvencia II trata los aspectos derivados al gobierno corporativo en el Pilar II.
7. La fórmula estándar debe ser sencilla.  
La fórmula estándar actualmente elaborada (QIS4) no es excesivamente compleja.

Como conclusión podemos afirmar que, en línea con el exhaustivo examen realizado por Doff (2008) y Holzmueller (2009)<sup>36</sup>, Solvencia II satisface en términos

---

<sup>36</sup> Holzmueller (2009) añade a los anteriores criterios cuatro adicionales y realiza la comparación para el modelo americano de la NAIC, el Test de solvencia Suizo y Solvencia II.

globales dichos criterios proporcionando un marco adecuado que garantice la estabilidad del sector asegurador europeo.

## **5. EL CUARTO ESTUDIO DE IMPACTO CUANTITATIVO (QIS4). UN ANÁLISIS COMPARATIVO CON EL QIS3 Y EL MODELO ESPAÑOL DE SOLVENCIA**

QIS4 fue realizado entre Abril y Julio de 2008 y sus resultados han sido publicados en el mes de Noviembre de 2008. Las especificaciones técnicas de QIS4 establecen las reglas para: la valoración de activos y pasivos, la clasificación y selección de fondos propios en niveles (Tier 1, 2, 3), el cálculo del SCR mediante la fórmula estándar, el SCR mediante modelos internos, el MCR y, finalmente, el tratamiento a los grupos.

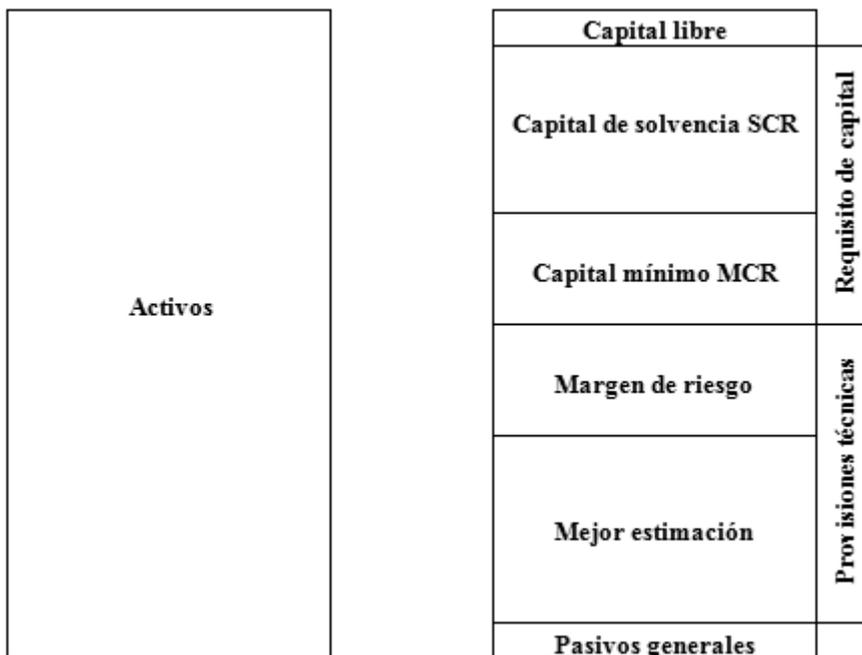
Las lecciones aprendidas de QIS4 y de los posteriores estudios de impacto permitirán el desarrollo de las fórmulas para el SCR y MCR y la esperada implantación de Solvencia II en 2012. En este apartado se realizará un análisis comparativo con QIS-3 y con el modelo español nacional de solvencia (MES v.1) desarrollado por UNESPA, ICEA y el denominado Grupo de Trabajo de Expertos en Solvencia II<sup>37</sup> en 2007. El MES v.1 ha sido desarrollado para superar algunas de las limitaciones de la fórmula estándar del QIS3 adaptándose al mercado asegurador español.

### **5.1. Valoración de activos y pasivos**

La primera sección de QIS4 fija los procedimientos de valoración de los activos y pasivos, indicando que deberá utilizarse como criterio principal la valoración a precios de mercado. Como se puede observar en el siguiente gráfico, el valor de mercado de los activos se debe comparar con la suma del valor de mercado de los otros pasivos, el valor de mercado de las provisiones técnicas y los requisitos de capital de Solvencia II (el SCR y el MCR incorporado en el primero). En caso de que el primer término sea superior (inferior) al segundo existirá un capital libre (deficiencia de capital). El valor de mercado de los pasivos se calcula mediante la adición de un margen de riesgo (RM) a la mejor estimación (BE) de los mismos. El margen de riesgo sólo se añade para los riesgos no financieros o no susceptibles de cobertura financiera, y su cálculo se efectúa por el método del coste de capital (CoC).

---

<sup>37</sup> El Grupo de Expertos estaba compuesto por las siguientes entidades AXA-WINTETHUR, AVIVA, GROUPAMA, BBVA SEGUROS, CAIFOR, CATALANA OCCIDENTE, SANTANDER SEGUROS, CASER, GENERALI, REALE, MAPFRE, PELAYO, SEGUROS RGA, ZURICH, NACIONAL DE REASEGUROS, RGA REINSURANCE, MUNICH RE, y SWISS RE.



El principio general para la valoración de activos y otros pasivos es el de precio de mercado, estableciéndose la siguiente jerarquía en la aplicación de criterios: "mark to market", "mark to model", IFRS y la contabilidad de cada país (véase el gráfico siguiente).



Por lo tanto, cuando sea posible, las aseguradoras deben emplear métodos "mark to market" o de ajuste al mercado para medir el valor económico de los activos y de los otros pasivos. Cuando no sea posible se debe emplear el criterio "mark to model", que establece el valor mediante un modelo financiero. El tratamiento bajo las normas internacionales de contabilidad (Normativas Internacionales de Informes Financieros o NIIF, *Internacional Financing Reporting Standard* o IFRS) se considera una aproximación al valor económico en QIS4. Finalmente, la contabilidad nacional puede emplearse para valorar algunas partidas en la medida de que el activo o pasivo no sea significativo o cuando el cálculo del valor económico sea injustificable de acuerdo con un análisis coste-beneficio.

Una mención especial recibe la valoración de los activos intangibles y los impuestos diferidos. El valor de los activos intangibles, incluyendo el valor del *Goodwill* o Fondo de Comercio de Consolidación, debe considerarse nulo a efectos de evaluación de la solvencia, debido a que el valor económico de la mayoría de los activos intangibles es nulo o despreciable, ya que raramente tienen un valor convertible en efectivo. Por lo tanto, fruto de las diferencias o ajustes en la valoración contable y la valoración económica se establece en el balance económico una cuenta de Fondos propios para recoger las diferencias de valoración. A diferencia de QIS3, en la nueva propuesta de QIS4 se consideran los impuestos diferidos (*deferred taxes*), a través de la provisión para impuestos diferidos. La razón reside en que de acuerdo a la Directiva de Solvencia II este pasivo presenta la propiedad de absorber riesgos bajo escenarios adversos. QIS4 permite que esta provisión se incluya en el balance en la medida en que figure en el balance contable.

## 5.2. Provisiones técnicas no vida

Las compañías deben valorar las provisiones técnicas al denominado valor actual de salida o "*current exit value*", que es el importe por el cual podrían transferirse, o liquidarse los pasivos entre partes interesadas y debidamente informadas que realicen una transacción en condiciones de independencia mutua. Las provisiones técnicas deben calcularse de una manera prudente, confiable y objetiva. El valor de las provisiones técnicas es igual a la suma de la mejor estimación y del margen de riesgo, que en general, deben ser valorados de forma separada a excepción de los riesgos con flujos replicables. Cuando los flujos de caja futuros asociados a las obligaciones pueden ser replicados por instrumentos financieros para los cuales el valor de mercado se puede observar directamente en un mercado líquido, transparente y profundo<sup>38</sup>, la provisión técnica será, simplemente, el valor de mercado de dichos instrumentos.

### *Flujos replicables o riesgos con cobertura disponible en el mercado*

Provisión Técnica = Valor de mercado de los instrumentos financieros de réplica

### *Flujos no replicables o riesgos sin cobertura*

Provisión Técnica = Mejor estimación (BE) + Margen de riesgo (RM)

---

<sup>38</sup> Los instrumentos financieros deben poder replicar completamente todos los posibles pagos futuros correspondientes a los pasivos teniendo en cuenta la incertidumbre de la cuantía y del momento de dichos pagos (cobertura perfecta). Dicha cobertura elimina completamente todos los riesgos asociados con el pasivo pero es rara, por ello a efectos prácticos se considera que el riesgo no cubierto es inmaterial debido al principio de proporcionalidad se puede considerar como susceptibles de cobertura. Los requisitos para que un mercado sea profundo, líquido y transparente se cumplen cuando de forma permanente: a) los participantes del mercado puedan ejecutar rápidamente grandes volúmenes de transacciones con un pequeño impacto en los precios y b) la negociación actual y la información de cotización estén disponibles rápidamente a todo el público.

La mejor estimación (BE) es el valor más probable o creíble que tendrán las provisiones técnicas. Se calcula como el valor actual actuarial de los flujos futuros, es decir, la media ponderada de todos los flujos futuros requeridos a lo largo del horizonte temporal, teniendo en cuenta el momento y la estructura de tipos de interés libres de riesgo. Por tanto, cada flujo esperado<sup>39</sup> se debe actualizar a la curva de interés libre de riesgo o curva *swap*. La mejor estimación se debe calcular en términos brutos, sin considerar deducciones, como por ejemplo, las cantidades recobradas según los términos de los contratos de reaseguro.

Las proyecciones de flujos deben reflejar los cambios demográficos, legales, médicos, tecnológicos sociales y económicos. Se deben establecer hipótesis apropiadas sobre la inflación futura a la hora de proyectar los flujos, identificando el tipo de inflación a la cual está expuesto cada flujo. Algunos flujos debieran estar ligados a la inflación en precios, pero puede haber otros relacionados con la inflación en salarios. La hipótesis base sobre la inflación subyacente empleada, es decir, antes de la consideración de características relevantes, debe ser consistente con el precio de mercado de instrumentos financieros relevantes. Los flujos deben ser descontados a la tasa libre de riesgo relevante para cada vencimiento a partir de la estructura temporal de tipos (ETTI). Cuando los mercados financieros no proporcionen datos para una madurez se deben interpolar o extrapolar los tipos. En QIS4 la estructura temporal de tipos se ha establecido a partir de la curva *swap*. La metodología de su derivación se ve en el anexo de QIS4 TP1 “*Adoption of interest rate term structure methodology*”. Para las monedas que no existan dichas curvas se emplean los tipos de los distintos instrumentos del gobierno. Para descontar los flujos también se puede optar por el empleo de un método interno para la ETTI, explicando las diferencias en la valoración con el método prescrito.

El CEIOPS (2008e) ha proporcionado una hoja de cálculo para la valoración del BE de las provisiones para prestaciones para los seguros no vida basada en el método *Chain Ladder*<sup>40</sup>. La hoja de Excel estima el BE para los flujos descontados y no descontados para las provisiones por prestaciones para cada línea del asegurador. Al mismo tiempo, proporciona información adicional para el análisis y validación de los resultados obtenidos: cálculo de los factores *chain-ladder* y de la predicción de los pagos futuros, ajuste de la función de cola, cálculo del error de predicción según el método Mack, etc. Para la aplicación del método desarrollado en esta hoja se necesitan las prestaciones pagadas acumuladas en cada año de ocurrencia y año de desarrollo. Se permite el uso de factores *chain-ladder* predefinidos como los proporcionados por datos de mercado o el ajuste manual del factor

---

<sup>39</sup> El horizonte temporal del BE cubre la vida entera de la cartera, lo que en la práctica supone usar un horizonte lo suficientemente amplio para asegurarse de que se capturan todos los flujos.

<sup>40</sup> El método Chain Ladder es un método para estimar las reclamaciones pendientes bajo la hipótesis de que el comportamiento pasado se proyecta al futuro. Esta proyección se realiza mediante ratios de las reclamaciones históricas acumuladas a lo largo de los sucesivos años de desarrollo (normalmente se emplean reclamaciones pagadas o incurridas). Por lo tanto, debe ser aplicado por aquellos asegurados que tengan datos históricos de siniestralidad sin distorsiones, es decir, que sean comparables los ratios obtenidos de unos años con los de otros debido a la ausencia de eventos extremos, etc.

de cola. De forma predefinida el *tail factor* se obtiene ajustando una función de cola exponencial sobre la base de una regresión log-lineal.

Los gastos futuros asociados a los contratos de seguros deben ser considerados en los *cashflows* de las provisiones técnicas. Se deben considerar todos los gastos futuros administrativos y el efecto de la tasa de inflación asociada a las hipótesis económicas. Además si las primas de renovaciones o los futuros depósitos se consideran en el BE, se deben considerar los gastos asociados a tales flujos.

En la valoración de pasivos no se tiene en cuenta la consideración de la calidad crediticia del emisor. Por tanto, la mejor estimación de los pasivos debe ser calculada bruta incluyendo los contratos de reaseguro y SPV<sup>41</sup>. Las cantidades recuperables en estos conceptos deben ser mostradas de forma separada en el activo en la partida "recobrables reaseguro y SPV". Su valor se debe ajustar para tener en cuenta las pérdidas esperadas por impago de la contraparte a causa de la insolvencia. Estos datos se calculan en base a *ratings*, informes de solvencia del regulador, información financiera de la contraparte, *spreads* de crédito, etc. Además, debe considerarse las probabilidades ponderadas en función de la cantidad pagada, los escenarios evaluados, y que las probabilidades de impago aumenten en función del tiempo.

Para obtener el valor de las provisiones técnicas debe sumarse a la mejor estimación el margen de riesgo, La finalidad del margen de riesgo es asegurar que el valor de las provisiones técnicas sea equivalente a la cuantía que un potencial (re)asegurador podría pagar por quedarse con las obligaciones de los pasivos de seguros. Para la determinación del margen de riesgo se aplica una metodología basada en el coste de capital, cuya tasa permanece inalterada respecto al QIS3 en el 6%. El margen se calcula determinando el coste de constituir una cantidad de fondos propios equivalente al SCR necesario para asumir las obligaciones de seguro a lo largo de su horizonte temporal. Por lo tanto, las empresas deben proyectar sus obligaciones hasta su extinción y, luego para cada año, se debe determinar la cantidad de SCR necesario para hacer frente a tales obligaciones. El margen de riesgo se calcula siempre neto de reaseguro.

Los riesgos a considerar en el cálculo del margen de riesgo son el riesgo operativo, el riesgo asegurador respecto al negocio existente y el riesgo de impago de la contraparte respecto al reaseguro cedido, quedando como riesgos excluidos el riesgo de mercado y de contraparte en contratos de derivados financieros. Los cálculos *del risk margin* se deben efectuar de forma separada para cada segmento en seguros de vida o línea de negocio en seguros no vida. Los pasos para realizar el cálculo a partir de la fecha de valoración al inicio del año  $t$  [ $t = 0$ ] son:

---

<sup>41</sup> Es lo que se denomina entidad con cometido especial, sociedad instrumental o *special purpose vehicle*. Una SPV es una nueva forma de compañía cautiva. La definición que le otorga la Directiva de Solvencia II puede verse en el Artículo 13.

- Para cada segmento se calcula el SCR para el año  $t = 0$  y siguientes.
- Multiplicar cada SCR futuros por la tasa de coste de capital (6%) para tener el coste de sostener los futuros SCR.
- Descontar cada una de las cantidades calculadas empleando la curva de tipos libres de riesgo en  $t = 0$ .
- La suma total de *risk margin* es la suma para todos los segmentos/líneas de negocio.

La principal dificultad de este método es la de estimar los SCR futuros para lo cual se establecen una serie de simplificaciones acerca del comportamiento futuro de los riesgos que se consideran. Cuando no se pueda calcular el margen de riesgo según el método del coste de capital se puede usar la aproximación de aplicar un porcentaje a la cantidad de BE en función de la línea de negocio.

Centrándonos en las provisiones técnicas no vida y en el seguro directo<sup>42</sup>, se deben establecer provisiones técnicas como mínimo para cada una de las líneas de negocio definidas en el Artículo 63 de la Directiva sobre cuentas anuales y cuentas consolidadas de compañías de seguro (Directiva del Consejo 91/674/EEC), que son estos 12 ramos (*LoBs*): Accidente y salud-compensación a los trabajadores (WC), Accidente y salud-seguro de salud, Accidente y salud-otros, Automóviles responsabilidad civil (auto RC), Automóviles otras garantías, Naval, aviación y transporte (Transporte de mercancías), Incendios y otros daños a los bienes, Responsabilidad Civil (RC), Crédito y caución, Defensa jurídica, Asistencia y Varios.

Las provisiones técnicas en las compañías de seguro no vida estarán formadas en Solvencia II por la provisión de primas y la provisión de prestaciones. Las provisiones por primas substituyen las actuales provisiones por primas no consumidas y las provisiones por riesgos en curso. Las provisiones por primas están relacionadas con el periodo de cobertura para el que el asegurador acepta y gestiona los riesgos de los asegurados. El cálculo del BE para las provisiones por primas se relaciona con todos los pagos futuros de reclamaciones efectuadas a partir de eventos posteriores a la fecha de valoración que serán asegurados en las pólizas actuales que no han expirado todavía, los gastos administrativos y todas las futuras primas esperadas. La provisión por primas es determinada desde una base prospectiva teniendo en cuenta los flujos de entrada y salida y el valor del dinero en el tiempo. Las provisiones técnicas para prestaciones están relacionadas con el periodo de tiempo que transcurre la ocurrencia de una reclamación y su liquidación. Durante el periodo de liquidación, el asegurador está en riesgo debido a las incertidumbres acerca del número de reclamaciones no declaradas todavía, la naturaleza estocástica de la cuantía de las reclamaciones y el momento temporal de los pagos o cambios en el entorno legal, entre otros. De esta forma incluye

---

<sup>42</sup> El reaseguro porporcional se trata como seguro directo por lo que a estos efectos la compañía debe clasificar en base a estas 12 *LoBs* (Lines of Business). Para el reaseguro no proporcional se divide en seguro personas, seguro propiedad y seguro de marina, aviación y transporte.

las provisiones para prestaciones pendientes de declaración (provisiones IBNR) y las provisiones para prestaciones pendientes de liquidación o de pago (provisiones RBNS).

### 5.3. Fondos propios

La segunda sección de QIS4 fija los aspectos relacionados con los fondos propios de las compañías aseguradoras. En QIS4, los elementos son clasificados en función de la capacidad y del momento en el que absorben las pérdidas comparados con el capital de acciones ordinarias. Existe un amplio espectro de instrumentos de capital que son potencialmente elegibles en fondos propios, que incluyen instrumentos con características mixtas entre las acciones y la deuda. Algunos estados se refieren a ellos en diferentes términos, bien como instrumentos de capital híbridos bien como pasivos subordinados. Un instrumento particular se clasificará en un tier o nivel concreto en función de sus características cualitativas.

Los elementos de capital son los elementos de capital básico y los elementos de capital fuera de balance, fondos propios complementarios o auxiliares (*Ancillary own fund*). Dentro de los fondos propios de base o elementos de balance (*Basic own funds*) está el neto de balance o diferencia de activos menos pasivos, la financiación híbrida y los pasivos subordinados. El CEIOPS ha desarrollado seis características o criterios de clasificación en niveles ampliamente en línea con la Propuesta de Directiva<sup>43</sup> de Solvencia II: subordinación de la cantidad total en caso de liquidación, capacidad total para absorber pérdidas de forma permanente, duración ilimitada o suficiente; sin requisitos/incentivos para el reembolso de la cantidad nominal; ausencia de costes fijos; y finalmente, ausencia de cargas. Sin embargo, la mayor aportación del CEIOPS consiste en la elaboración de una lista clasificada de los distintos ítems que constituyen el capital de una compañía aseguradora (véase CEIOPS, 2008a).

### 5.4. La fórmula estándar del SCR en QIS4. Análisis comparativo con el QIS3 y MES

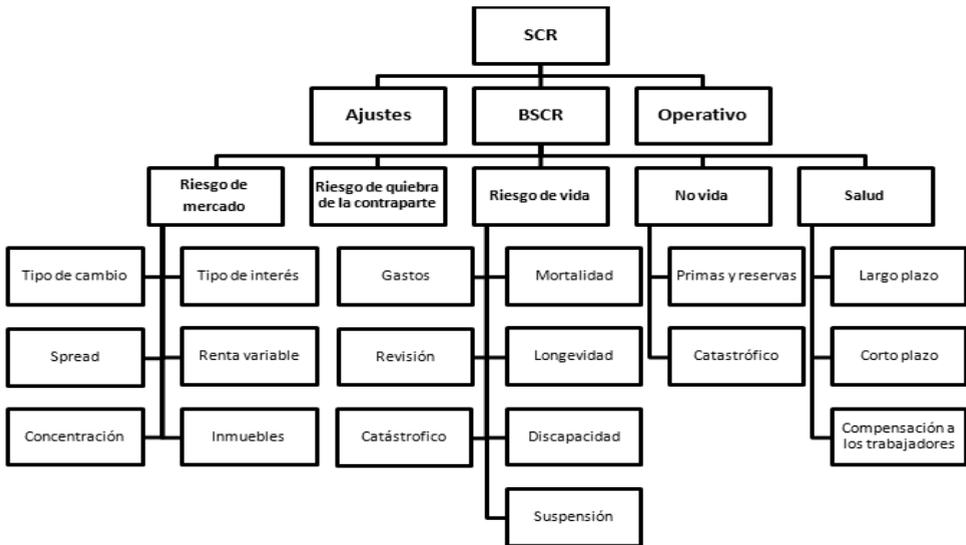
En este apartado haremos una descripción de la fórmula estándar propuesta en QIS4 indicando los cambios que se han introducido respecto a la propuesta anterior (QIS3) y el modelo de Solvencia desarrollado en España (MES v. 1). De forma paralela se aborda la calibración de las fórmulas empleadas, las simplificaciones de cálculo que se proponen en QIS4 para algunos riesgos y ejemplos prácticos de su cálculo.

Los requisitos del capital de Solvencia consisten en el denominado SCR y el MCR. La tercera sección del QIS4 fija la fórmula estándar para el cálculo del SCR. Dicha fórmula emplea un enfoque modular en el que se establecen cargas de capital para las diferentes categorías de riesgo y se agregan mediante las matrices de

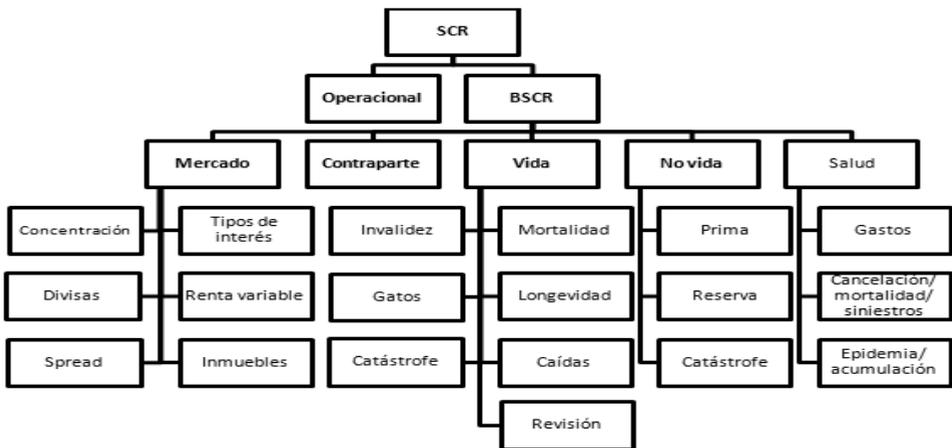
---

<sup>43</sup> Debe recordarse que la Directiva no estaba publicada cuando se realizó el QIS4.

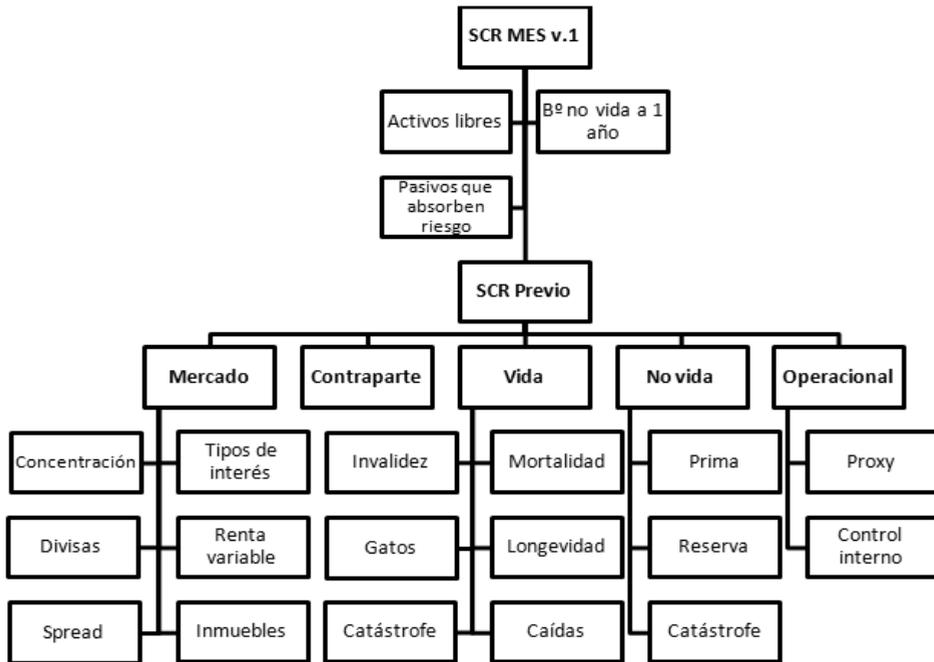
correlación establecidas. Los módulos y submódulos son los mostrados en el siguiente gráfico.



Para cada módulo, el QIS4 proporciona instrucciones acerca de la descripción del riesgo, los *inputs* requeridos y el *output* generado por el módulo, así como la fórmula de cálculo. Sin embargo, antes de entrar a detallar dichas instrucciones es útil establecer las primeras diferencias respecto al QIS3 y MES v.1. Los módulos y submódulos tratados en QIS3 son los mostrados en el siguiente gráfico. Las principales diferencias existentes son que el riesgo operacional se agregaba al BSCR para obtener el SCR, pero no se consideraba en esta expresión los ajustes. Por otro lado, se establecía una clasificación distinta de los riesgos de salud.



Los módulos y submódulos tratados en MES v.1 son los mostrados en el siguiente gráfico.



Las principales diferencias vienen derivadas de la distinta consideración de los activos libres de riesgo, los impuestos diferidos, la consideración del resultado asegurador esperado y el SCR Previo. Estas diferencias son resumidas en la tabla siguiente.

<b>Diferencias</b>	
Activos libres	MES v.1 tiene en consideración el efecto de los activos libres sobre el importe de SCR, lo cual no se considera ni en QIS4 ni en QIS3. Sin embargo el QIS3 consideraba esta opción como una propuesta a probar.
Pasivos con capacidad de absorber riesgos	A semejanza con QIS4, pero no con QIS3, se consideran los pasivos con capacidad de absorber riesgos en situaciones de estrés (impuestos diferidos). Esto está en línea con el artículo 106 de la Propuesta de Directiva, y por tanto está en consonancia con lo aplicado en QIS4.
Beneficios o pérdidas esperadas	A diferencia del QIS4 y del QIS3, se tienen en consideración los beneficios o pérdidas esperadas durante 1 año para entidades que operen en el negocio de no vida, dando como resultado un mayor o menor SCR final. Esta opción, por el contrario sí era recogida en el QIS2 en el que se sumaba al SCR los beneficios o pérdidas esperadas en los próximos años en el negocio de no vida.
Introducción del SCR Previo	El modelo español de solvencia elimina el concepto de capital de solvencia obligatorio básico (BSCR) por el de SCR Previo. En el SCR Previo se tiene en cuenta la correlación entre riesgo operacional y riesgo de suscripción no vida y el subriesgo de gastos en vida.

Antes de proceder a describir detalladamente el procedimiento de cálculo de los requerimientos de capital, es útil hacer referencia a cuatro aspectos en los que el QIS4 hace una mención especial: los activos libres (*free assets*), el empleo de parámetros propios, las simplificaciones de cálculo del SCR y los efectos de las técnicas de mitigación o reducción de riesgo.

En lo referente a los activos libres debe advertirse que en QIS3, se penalizaba los activos en exceso del SCR, sin embargo, se analizaba el efecto de la propuesta de que dichos activos no tuvieran asociada ninguna carga de capital. El MES v.1, por contra realiza un tratamiento distinto, considerando el efecto que tienen los activos libres sobre el importe de SCR. La Propuesta de Directiva de Solvencia II está basada en el balance total. De esta forma, los requisitos del Pilar I se basan en un planteamiento económico centrado en el total del balance, y por lo tanto, QIS4 ya no incorpora la propuesta que se recogía anteriormente.

Debido a la insatisfacción con QIS3, MES v.1 establecía unos parámetros más ajustados a la realidad del mercado asegurador español, en especial para los riesgos de suscripción. Sin embargo, bajo QIS4 se considera el empleo de parámetros propios de forma que las compañías aseguradoras pueden reemplazar dentro de la fórmula estándar, uno o varios de los parámetros propuestos por parámetros específicos para los módulos de riesgo asegurador. Esto está en línea con la Propuesta de Directiva en la que se establecía que las aseguradoras, previa autoriza-

ción de las autoridades de supervisión, en el cálculo de los módulos de riesgo de suscripción podrán sustituir un subconjunto de parámetros de la fórmula general por parámetros específicos. En QIS4, los propios parámetros deben ser derivados de acuerdo a las hipótesis establecidas por la fórmula estándar, incluyendo las hipótesis sobre las distribuciones subyacentes, de lo contrario debe ser empleado un modelo parcial interno. El uso de parámetros específicos está limitado a ciertos parámetros de los módulos de riesgos no vida y salud. Los parámetros que pueden ser cambiados son la desviación estándar para el riesgo de reservas y la desviación estándar para el riesgo de primas en un ramo individual.

En lo que respecta a las simplificaciones en el cálculo del SCR en QIS4, y de acuerdo con el principio de proporcionalidad contemplado en la Propuesta de Directiva, las empresas pueden usar métodos simplificados para calcular el SCR. Estos métodos pueden ser empleados en la medida en que dicha valoración no produzca diferencias materiales con la que resultaría de una valoración más exacta.

El efecto de las técnicas reductoras o mitigadoras del riesgo se reconoce en QIS4 como una reducción en las cargas de capital. La reducción del riesgo incluye los instrumentos de transferencia de riesgos tradicionales y no tradicionales como son los instrumentos de cobertura y/o el reaseguro. El SCR recoge los efectos derivados de estos instrumentos, reduciendo los requisitos de capital por el riesgo transferido pero teniendo en cuenta el riesgo adquirido en el proceso. De esta forma el riesgo que se transfiere viene recogido en el cálculo de los módulos de riesgo individuales, mientras que el riesgo adquirido se captura en el módulo de riesgo de la contraparte. Esto está en línea con la Propuesta de Directiva que establecía que al calcular el capital de solvencia obligatorio, se debe tener en cuenta el efecto de las técnicas de reducción del riesgo, siempre que el riesgo de crédito y otros riesgos derivados del uso de tales técnicas se reflejen debidamente en el cálculo del capital. Sin embargo, debe destacarse que en QIS4 los efectos de reducción del riesgo en la fórmula estándar se restringen a los instrumentos, y de esta forma los procesos y controles de la compañía quedan excluidos.

Una vez realizada una rápida revisión de las principales consideraciones respecto al modelo o fórmula estándar del SCR en QIS4 es útil proceder a su descripción. El modelo estándar propone la determinación de las necesidades de capital de solvencia (SCR) a partir de los riesgos en los que incurre la empresa, y que se calcula como:

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{operacional}$$

Siendo:

*BSCR* = Requisito de capital de solvencia básico (*Basic Solvency Capital Requirement*),

*Adj* = Ajustes<sup>44</sup>,

*SCR<sub>operacional</sub>* = Requisito de capital por riesgo operativo u operacional.

---

<sup>44</sup> Recoge el ajuste por el efecto reductor del riesgo. Los conceptos que dan lugar a un ajuste en el SCR en QIS4 son las participaciones en beneficios discrecionales (negocios de vida con participación en beneficios) y los impuestos diferidos.

De este modo, el nivel de capital que precisará la compañía de seguros será el que resulte del riesgo asumido en el negocio asegurador, financiero, de crédito y operativo. El cálculo en el modelo estándar será el resultado de la adición de las necesidades de capital derivadas de los diferentes riesgos en los que incurre la empresa, para lo cual se proponen fórmulas analíticas que calculan el VaR para un nivel de confianza del 99,5% y el horizonte temporal de un año, al tiempo que se emplea para la agregación de los riesgos matrices de correlación.

#### 5.4.1. El capital de solvencia básico (BSCR)

El capital de solvencia básico (BSCR) es el requerimiento de capital de solvencia que combina las cargas para las siguientes cinco grandes categorías de riesgo: riesgos de mercado, contraparte, suscripción de vida, no vida y salud. Para su cálculo primero se determina el capital requerido para cada una de las categorías de riesgo y luego se agregan mediante la matriz de correlación de la siguiente tabla<sup>45</sup>.

	$SCR_{\text{mercado}}$	$SCR_{\text{contraparte}}$	$SCR_{\text{vida}}$	$SCR_{\text{salud}}$	$SCR_{\text{no vida}}$
$SCR_{\text{mercado}}$	1				
$SCR_{\text{contraparte}}$	0,25	1			
$SCR_{\text{vida}}$	0,25	0,25	1		
$SCR_{\text{salud}}$	0,25	0,25	0,25	1	
$SCR_{\text{no vida}}$	0,25	0,5	0	0,25 <sup>46</sup>	1

Formalmente, el cálculo se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr SCR_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Siendo  $SCR_i$  el capital requerido para las cinco categorías de riesgos. En notación matricial la fórmula anterior se convierte en:

$$BSCR = \sqrt{SCR \cdot \Sigma \cdot SCR^t}$$

<sup>45</sup> Por lo tanto la agregación de riesgos será menor a la simple suma de éstos.

<sup>46</sup> En QIS3 el coeficiente de correlación lineal era de cero. En QIS4 el coeficiente es de 0,25 al integrarse en el módulo de salud a corto plazo negocios que antes se consideraban en el modulo de seguros no vida.

Siendo:

$SCR$  el vector que recoge los capitales propios asociados a cada uno de los riesgos individuales, es decir, el vector de dimensión  $1 \times 5$  ( $SCR_{mercado}$ ,  $SCR_{contraparte}$ ,  $SCR_{vida}$ ,  $SCR_{salud}$ ,  $SCR_{no\ vida}$ ), y  $SCR^t$  el vector traspuesto de dimensión  $5 \times 1$   
 $\Sigma$  la matriz de correlación de orden  $5 \times 5$  que recoge los coeficientes de correlación para los riesgos.

Según la Propuesta de Directiva, la determinación del capital necesario debía considerar el ajuste que tiene en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos. Dicho ajuste deberá reflejar la posible compensación de pérdidas imprevistas mediante un descenso simultáneo de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos. De esta forma, en la fórmula de cálculo del SCR,  $Adj$  es el ajuste por el efecto de reducción del riesgo derivado de la participación en beneficios en los negocios de vida y los impuestos diferidos<sup>47</sup>. Formalmente:

$$Adj = Adj_{PBD} + Adj_{ID}$$

Siendo

$Adj_{PBD}$  el efecto de la reducción del riesgo derivado de la participación en beneficios.

$Adj_{ID}$  el efecto de la reducción del riesgo derivado de los impuestos diferidos.

El  $Adj_{PBD}$  se calcula mediante la fórmula siguiente:

$$Adj_{PBD} = \min\left(PBD; \sqrt{\sum_{i,j} CorrSCR_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} - \sqrt{\sum_{i,j} CorrSCR_{i,j} \cdot nSCR_i \cdot nSCR_j}\right)$$

En notación matricial la fórmula anterior se convierte en:

$$Adj_{PBD} = \min\left(PBD; \sqrt{SCR \cdot \Sigma \cdot SCR^t} - \sqrt{nSCR \cdot \Sigma \cdot nSCR^t}\right)$$

Siendo:

$PBD$  la cantidad total o valor de los futuros bonus discrecionales.

$nSCR_i$  el capital requerido para las cinco categorías de riesgos considerando la reducción del riesgo derivado de la participación en beneficios.

---

<sup>47</sup> Además las empresas pueden calcular los ajustes mediante dos métodos simplificados. El primero propuesto por Italia evalúa el  $Adj_{PBD}$  como el 10% de PBD, mientras que el Segundo método calcula  $Adj$  mediante la generación de escenarios.

El  $Adj_{ID}$  se calcula mediante el valor absoluto de la reducción en el valor de los impuestos diferidos bajo un escenario de pérdidas en los fondos propios de cantidad  $BSCR - Adj_{PBD} + SCR_{Operacional}$ .

Finalmente, el BSCR neto se calcula como la diferencia entre el BSCR y el ajuste por el efecto de la reducción del riesgo derivado de la participación en beneficios, es decir:

$$nBSCR = BSCR - Adj_{PBD}$$

Debe destacarse que QIS3 no incluía el efecto de la reducción del riesgo derivado de los impuestos diferidos ( $Adj_{ID}$ ), por la contra, el MES v.1 consideraba tanto la reducción del riesgo derivado del negocio de vida como el efecto de los impuestos diferidos.

#### 5.4.2. SCR asociado al riesgo de mercado ( $SCR_{mercado}$ )

El BSCR es el capital requerido para los riesgos de mercado, de contraparte y asegurador. El riesgo de mercado es debido a los cambios en los precios de los instrumentos financieros. En línea con la Propuesta de Directiva, en QIS4 se establecen los submódulos de tipos de interés, renta variable, propiedades inmobiliarias, tipos de cambio, spread y concentración. Para cada submódulo se debe calcular el SCR correspondiente y la parte del efecto de reducción del riesgo debida al reparto de beneficios futuros<sup>48</sup>. Además, se debe considerar en cada submódulo el efecto de instrumentos derivados que mitiguen el riesgo<sup>49</sup>. La agregación de los riesgos se realiza a través de la matriz de correlación de mercado estipulada en la siguiente tabla.

	<b>Mkt<sub>interés</sub></b>	<b>Mkt<sub>rentavariante</sub></b>	<b>Mkt<sub>inmuebles</sub></b>	<b>Mkt<sub>spread</sub></b>	<b>Mkt<sub>concentración</sub></b>	<b>Mkt<sub>t.cambio</sub></b>
<b>Mkt<sub>interés</sub></b>	1					
<b>Mkt<sub>rentavariante</sub></b>	0	1				
<b>Mkt<sub>inmuebles</sub></b>	0,5	0,75	1			
<b>Mkt<sub>spread</sub></b>	0,25	0,25	0,25	1		
<b>Mkt<sub>concentración</sub></b>	0	0	0	0	1	
<b>Mkt<sub>t.cambio</sub></b>	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1

Por tanto la carga de capital para el riesgo de mercado se obtiene como:

<sup>48</sup> Para las pólizas en las que el asegurado soporte el riesgo de inversión.

<sup>49</sup> Cuando los instrumentos financieros de cobertura no cumplan con los principios establecidos en el punto TS.VII del QIS4 no se incluye su efecto de reducción.

$$SCR_{\text{mercado}} = \sqrt{\sum_{i \times j} \text{Corr}Mkt_{i,j} \cdot Mkt_i \cdot Mkt_j}$$

Siendo  $Mkt_i$  la carga de capital para cada subriesgo de mercado. En notación matricial la fórmula anterior se convierte en<sup>50</sup>:

$$SCR_{\text{mercado}} = \sqrt{Mkt \cdot \Sigma_{\text{mercado}} \cdot Mkt^t}$$

Siendo:

$Mkt$  el vector que recoge los capitales propios asociados a cada uno de los riesgos individuales, es decir, el vector de dimensión  $1 \times 6$  ( $Mkt_{\text{interés}}$ ,  $Mkt_{\text{rentavariante}}$ ,  $Mkt_{\text{inmuebles}}$ ,  $Mkt_{\text{spread}}$ ,  $Mkt_{\text{concentración}}$ ,  $Mkt_{\text{t.cambio}}$ ), y  $Mkt^t$  el vector traspuesto de dimensión  $6 \times 1$ .

$\Sigma_{\text{mercado}}$  la matriz de correlación de orden  $6 \times 6$  que recoge los coeficientes de correlación para los riesgos.

### Ejemplo. Agregación de riesgos de mercado.

Sean las siguientes cargas de capital para cada submódulo del riesgo de mercado

Concepto	Carga individual
$Mkt_{\text{interés}}$	100
$Mkt_{\text{rentavariante}}$	50
$Mkt_{\text{inmuebles}}$	30
$Mkt_{\text{spread}}$	10
$Mkt_{\text{concentración}}$	10
$Mkt_{\text{t.cambio}}$	5

La carga de capital por riesgo de mercado se calcula a partir de las siguiente fórmula:

$$SCR_{\text{mercado}} = \sqrt{\sum_{i \times j} \text{Corr}Mkt_{i,j} \cdot Mkt_i^* \cdot Mkt_j}$$

<sup>50</sup> En el caso de analizar seguros de vida con participación en beneficios la carga de capital para los riesgos de mercado incluyendo la reducción del riesgo por el reparto de beneficios futuros se calcularía mediante la fórmula:

$$nSCR_{\text{mercado}} = \sqrt{nMkt \cdot \Sigma_{\text{mercado}} \cdot nMkt^t}$$

Siendo  $nMkt_i$  el vector de cargas de capital por cada subriesgo de mercado, considerando la reducción del riesgo por el reparto de beneficios futuros.

$$= \sqrt{(100 \ 50 \ 30 \ 10 \ 10 \ 5) \Sigma_{\text{mercado}} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 30 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}} = 142,30 \text{ u.m.}$$

Por lo que la hipotética compañía necesitaría un capital de 142,30 u.m. para hacer frente a los riesgos que realmente soporta. Fruto de que los riesgos no son perfectamente dependientes se beneficia de una diversificación del riesgo de 62,7 u.m. que se calcula como la diferencia entre la suma aritmética de los riesgos (205 u.m.) y la carga de capital resultante (142,3 u.m.)

En la tabla siguiente recogemos el efecto que tiene la diversificación de los riesgos de mercado sobre las necesidades de capital una cartera de valor 1.000 u.m. invertida en activos formados por renta fija de un Estado miembro de la UE, una cartera de acciones bien diversificada y unos inmuebles<sup>51</sup>. Como se puede observar, el beneficio por diversificación es mayor en el caso de la cartera que invierte en renta fija y en renta variable, ya que supone una reducción de 292,89 u.m., frente a las 64,59 u.m. de la cartera B y los 133,97 u.m. de la cartera C. Esto es debido a que se asume en la matriz de correlaciones entre riesgos independencia entre  $Mkt_{\text{interés}}$  y  $Mkt_{\text{rentavable}}$ . El beneficio obtenido de esta forma es incluso superior al alcanzado mediante una cartera diversificada en renta fija, renta variable y propiedades (beneficio de 218,3 u.m.), debido a la correlación elevada entre las cargas de capital de los últimos dos submódulos (0,75).

Cartera	Carga Riesgos Individuales			Beneficio por diversificación	Total Riesgos
	$Mkt_{\text{interés}}$	$Mkt_{\text{rentavable}}$	$Mkt_{\text{inmuebles}}$		
A	500	500	0	292,89	707,11
B	0	500	500	64,59	935,41
C	500	0	500	133,97	866,03
D	333,33	333,33	333,33	218,26	781,74

### Calibración de la matriz de correlaciones de mercado<sup>52</sup>

El documento de especificación técnica de QIS2 proporcionaba la matriz de correlación para los riesgos de interés, acciones, renta variable y tipos de cambio (véase la siguiente tabla). Sin embargo, el CEIOPS reconoció que esta matriz no recogía los efectos de diversificación del riesgo, por lo que debía ser revisada. En la

<sup>51</sup> El propósito del ejemplo es restringir a tres clases el riesgo de mercado (no existe ni riesgo de concentración, ni riesgo de spread, ni riesgo de divisa).

<sup>52</sup> Debe mencionarse que en QIS4, se emplea básicamente la calibración del QIS3 ya que tiene pocos cambios sustanciales. Por lo que el documento de calibración de QIS4 básicamente remite a éste, especificando sólo las modificaciones efectuadas.

calibración del QIS3 (CEIOPS, 2007d) se calibró el coeficiente de correlación lineal entre los tipos de interés y la renta variable, ya que se considera que estos dos riesgos son los más importantes para el riesgo de mercado de un asegurador. Además, se citaba como futuras líneas realizar la calibración del resto de riesgos de mercado.

	<b>Mkt<sub>interés</sub></b>	<b>Mkt<sub>rentavARIABLE</sub></b>	<b>Mkt<sub>inmuebles</sub></b>	<b>Mkt<sub>t.cambio</sub></b>
<b>Mkt<sub>interés</sub></b>	1			
<b>Mkt<sub>rentavARIABLE</sub></b>	0,75	1		
<b>Mkt<sub>inmuebles</sub></b>	0,75	1	1	
<b>Mkt<sub>t.cambio</sub></b>	0,25	0,25	0,25	1

Para la calibración del coeficiente de correlación lineal entre los tipos de interés y la renta variable se realizó una calibración de la técnica “*top down*” empleada en el enfoque modular de la fórmula estándar. De esta forma la calibración de los riesgos individuales a un VaR del 99,5% debe ser consistente con el VaR agregado al 99,5%. Para ello se formó una cartera compuesta por renta fija en un 70% y 30% de variable<sup>53</sup>, suponiendo que la duración de los pasivos superaba en 10 años a la de los activos, y a partir de los mismos, se obtuvo el coeficiente de correlación implícito. El problema que surgió de dicho cálculo fue que dicho coeficiente era muy sensible a las hipótesis utilizadas, relativas a la estructura de la cartera y al *gap* de duración de activos y pasivos. Finalmente, la matriz de QIS3 para la agregación de riesgos de mercado resultó ser la que se presenta en la siguiente tabla. Dicha matriz incorporó el riesgo de *spread* proveniente del anterior riesgo de crédito de QIS 2, el riesgo de concentración dentro del riesgo de mercado, y se redujeron los coeficientes de correlación lineal de QIS 2 permitiendo una mayor diversificación entre riesgos.

	<b>Mkt<sub>interés</sub></b>	<b>Mkt<sub>rentavARIABLE</sub></b>	<b>Mkt<sub>inmuebles</sub></b>	<b>Mkt<sub>spread</sub></b>	<b>Mkt<sub>concentración</sub></b>	<b>Mkt<sub>t.cambio</sub></b>
<b>Mkt<sub>interés</sub></b>	1					
<b>Mkt<sub>rentavARIABLE</sub></b>	0	1				
<b>Mkt<sub>inmuebles</sub></b>	0,5	0,75	1			
<b>Mkt<sub>spread</sub></b>	0,25	0,25	0,25	1		
<b>Mkt<sub>concentración</sub></b>	0	0	0	0	1	
<b>Mkt<sub>t.cambio</sub></b>	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1

<sup>53</sup> Los datos empleados en el cálculo del coeficiente de correlación fueron los empleados en la calibración del *shock* de renta variable (datos proporcionados por Datastream ara el rendimiento total del índice MSCI con frecuencia anual disponibles desde 1972) y en la calibración de los factores de subida y bajada de los tipos de interés (datos proporcionados por el Bundesbank para los bonos cupón cero para diferentes vencimientos con frecuencia anual y disponibles desde 1972).

En QIS4 no se realiza ninguna modificación a dicha matriz, sin embargo debe recalarse que de acuerdo con el análisis de impacto de distintas correlaciones y de la situación reciente de los mercados financieros, el CEIOPS propone analizar el efecto de un factor de correlación de 0,25 y de -0.25 entre  $Mkt_{interés}$  y  $Mkt_{rentavariabile}$  lo que conducirá a una cuantía diferente del SCR.

### **Riesgo de tipos de interés ( $Mkt_{interés}$ )**

El riesgo de tipos de interés afecta a todos los activos y pasivos cuyo valor neto sea sensible a las variaciones en la estructura temporal o a la volatilidad de los tipos de interés y que no estén relacionados con pólizas en las que el tomador asuma el riesgo de inversión. En QIS4, el capital requerido se mide a través de unas variaciones predeterminadas en la estructura temporal de tipos (ETTI) vigente en el momento del análisis en función de la posición neta de los flujos de efectivo de entrada, los valores de los flujos de la renta fija, y de salida, los flujos asociados a las provisiones técnicas y préstamos. Por lo tanto, cuanto mejor casados estén los flujos de efectivo, menor será la base de cálculo del riesgo de tipo de interés. La estructura de tipos alterada se deriva de la multiplicación de la curva de tipos actuales por el factor de estrés superior  $s^{up}(t)$  y por el factor de estrés inferior  $s^{down}(t)$  para cada vencimiento  $t$ . La carga de capital para el riesgo de tipos de interés es el resultado del mayor valor entre los dos escenarios de estrés siguientes:

$$Mkt_{interés}^{subida} = \Delta VAN|_{shocksubida}$$

$$Mkt_{interés}^{bajada} = \Delta VAN|_{shockbajada}$$

Siendo  $\Delta VAN$  el cambio en el valor neto de los activos y pasivos derivados de las modificaciones en los tipos de la ETTI:

$$tipo^{subida} = tipo[1 + s^{up}(t)]$$

$$tipo^{bajada} = tipo[1 + s^{down}(t)]$$

En el caso de provisiones técnicas de no vida y de otros pasivos, se puede efectuar un cálculo simplificado para calcular el efecto del riesgo de interés. Este cálculo se estima multiplicando la duración modificada por la curva de tipos alterada por un *shock*. Los *shocks* que se evalúan se determinan a partir de un cambio paralelo que resulta de restar un 40% para todos los vencimientos en el *shock* de bajada y sumar un 55% para todos los vencimientos en el *shock* de subida.

Los factores de estrés fueron calibrados en QIS3 (CEIOPS, 2007d) a partir de dos fuentes de datos: los tipos cupón cero alemanes con vencimientos de 1 a 10 años desde 1972 con frecuencia mensual (Bundesbank) y los tipos cupón cero de los *swaps* de tipos de interés (IRS) con vencimientos de 1, 5, 10, 20, 25 y 30 años proporcionados por Datastream. El método para ajustar los factores asume un comportamiento lognormal de los tipos de interés, de modo que el tipo a  $t$  años para un horizonte temporal de 12 meses será:  $R_{12}(t) = R_0(t) e^X$  donde  $X$  se distribuye como una  $N(\mu, \sigma)$  Por lo que

$$X = \ln \left( \frac{R_{12}(t)}{R_0(t)} \right) = \ln(R_{12}(t)) - \ln(R_0(t)) \approx \frac{R_{12}(t) - R_0(t)}{R_0(t)}$$

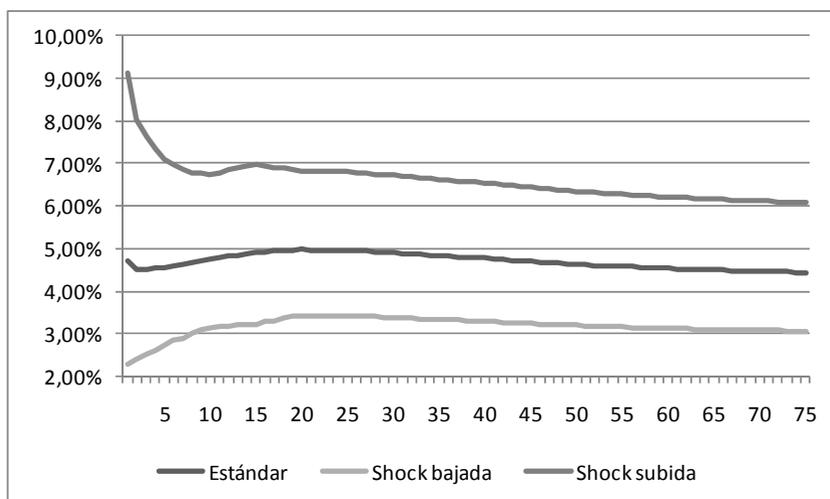
El modelo lognormal asume que el cambio absoluto en los tipos de interés  $R_{12}(t) - R_0(t)$  depende linealmente del nivel de tipo de interés  $R_0(t)$ , lo que equivale a decir que los cambios en términos absolutos son mayores cuanto mayor es el nivel de los tipos de interés (Campbell *et al.*, 1997). Por lo tanto, para la serie histórica se calculó la desviación típica o volatilidad de las diferencias logarítmicas de los tipos de interés mensuales y diarios. Posteriormente, se utilizó la regla de la raíz cuadrada para estimar la volatilidad anual. La curva de volatilidades se completa interpolando las volatilidades calculadas para distintos vencimientos. Conocidos los valores de  $\mu$  y  $\sigma$ , y debido a que el VaR al 99,5% toma el valor de 2,58 desviaciones típicas podemos calcular el factor de estrés de subida y de bajada para una año de vencimiento  $t$ . Por lo tanto  $\frac{R_{12}(t)}{R_0(t)} = e^{\mu + 2,58 \sigma} = 1 + s^{up}(t)$  y  $\frac{R_{12}(t)}{R_0(t)} = e^{\mu - 2,58 \sigma} = 1 + s^{down}(t)$ . Además de los tipos euro, se analizaron las volatilidades con datos diarios desde 1997 de los tipos cupón cero a 2, 5, 10, 20 y 30 años para la corona danesa, la corona sueca, y la libra esterlina (*Fuente Datastream*), mostrando resultados similares, excepto para la libra esterlina que se alcanzaban menores volatilidades.

Los tipos de la ETTI estándar empleada en QIS4 para el euro<sup>54</sup> y de los factores de estrés superior e inferior son los mostrados en la siguiente tabla. En el siguiente gráfico se representan gráficamente las tres estructuras temporales de tipos resultantes.

---

<sup>54</sup> Aparte de los tipos para el euro (EUR) en QIS4 se emplean para la ETTI las siguientes monedas: CZK, DKK, HUF, NOK, PLN, SEK, SKK, GBP, ISK, USD, JPY, CHF, TRY y RON. El método de cálculo de los shocks de subida y bajada se realiza de forma sencilla, por ejemplo, la tasa a 4 años "estresada" en un escenario de subida  $R_{12}(4)$  se calcula como  $R_{12}(4) = R_0(4) \cdot (1 + 0,62)$ , siendo  $R_0(4)$  la tasa a 4 años de la estructura de tipos actual.

Vencimiento <i>t</i> (años)	Factores de estrés		ETTI 2007 (QIS4) euro		
	$s^{\text{down}}$	$s^{\text{up}}$	Estándar	Shock bajada	Shock subida
1	-0,51	0,94	4,70%	2,30%	9,11%
2	-0,47	0,77	4,53%	2,40%	8,01%
3	-0,44	0,69	4,51%	2,53%	7,62%
4	-0,42	0,62	4,53%	2,63%	7,34%
5	-0,40	0,56	4,55%	2,73%	7,10%
6	-0,38	0,52	4,58%	2,84%	6,96%
7	-0,37	0,49	4,61%	2,91%	6,87%
8	-0,35	0,46	4,65%	3,02%	6,79%
9	-0,34	0,44	4,70%	3,10%	6,77%
10	-0,34	0,42	4,74%	3,13%	6,73%
11	-0,34	0,42	4,78%	3,16%	6,79%
12	-0,34	0,42	4,82%	3,18%	6,84%
13	-0,34	0,42	4,85%	3,20%	6,89%
14	-0,34	0,42	4,88%	3,22%	6,93%
15	-0,34	0,42	4,90%	3,23%	6,96%
16	-0,33	0,41	4,92%	3,30%	6,94%
17	-0,33	0,40	4,94%	3,31%	6,91%
18	-0,32	0,39	4,96%	3,37%	6,88%
19	-0,31	0,38	4,97%	3,43%	6,85%
20	-0,31	0,37	4,98%	3,43%	6,82%
>20	-0,31	0,37	...	...	...



### Ejemplo. Riesgo de tipos de interés para una determinada estructura de activos y pasivos.

En la tabla siguiente podemos ver dos compañías cuyo valor de la cartera de activo y pasivo descontado a la curva de tipos propuesta en QIS4 es el mismo, teniendo por lo tanto ambas el mismo valor del excedente. En el desglose posterior, sin embargo podemos observar que en el caso de la compañía A los flujos de activo están mejor casados que en el caso de la B, lo cual se debería traducir en un menor riesgo de tipos de interés.

	VAN Activo	VAN Pasivo	Excedente
A	561,09	553,62	7,47
B	561,09	553,62	7,47

Año (Final)	Flujos de Activo		Flujos de Pasivo
	A	B	A y B
1	110	300	100
2	160	300	150
3	180		175
4	181		200

Año(Final)	ETTI			Factores de descuento		
	Estándar	Down	Up	Estándar	Down	Up
1	4,70%	2,30%	9,11%	0,955	0,978	0,917
2	4,53%	2,40%	8,01%	0,915	0,954	0,857
3	4,51%	2,53%	7,62%	0,876	0,928	0,802
4	4,53%	2,63%	7,34%	0,838	0,901	0,753

Como podemos comprobar, el escenario que les perjudica a ambas compañías es el de bajada de tipos de interés, ya que la variación de capital es positiva, lo que significa que el valor actual de los activos respecto al de los pasivos disminuye ante ese escenario. La compañía B que tiene una estructura de flujos menos congruente, precisará de un capital de 11,56 frente a 0,32 de la compañía A.

	VAN Activo	VAN Pasivo	Activo-Pasivo Down	Variación VAN
A	590,59	583,44	7,15	0,32
B	579,36	583,44	-4,08	11,56

	<b>VAN Activo</b>	<b>VAN Pasivo</b>	<b>Activo-Pasivo Up</b>	<b>Variación VAN</b>
A	518,99	511,28	7,71	-0,24
B	532,11	511,28	20,83	-13,35

Las compañías de seguros también pueden acogerse al sistema simplificado, estimando el resultado a través de las duraciones de activo y pasivo. En la tabla siguiente puede verse el efecto que tendría la estimación a través de las duraciones, que llevan a valores similares. En concreto la compañía B precisará de un capital de 11,36 frente a 0,37 de la compañía A.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>Pasivo</b>	<b>Var. VAN A</b>	<b>Var. VAN B</b>
Duración	2,52	1,42	2,59		
<i>Downward</i>	25,65	14,66	26,03	0,37	11,36
<i>Upward</i>	35,28	20,16	35,79	-0,51	-15,63

El tratamiento del riesgo de interés permanece inalterado respecto a QIS3, si bien se realiza un pequeño ajuste en los factores de estrés<sup>55</sup>. También cabe citar que en la calibración del QIS3 se propuso como futura línea de investigación el ajuste de las colas a través de distintos métodos, entre los que se proponía el valor extremo, aspecto que no ha sido abordado en la nueva propuesta. En el modelo MES v.1 para seleccionar los factores de estrés se analizaron cuatro métodos alternativos: método basado en la volatilidad de las diferencias logarítmicas de los tipos de la curva libre de riesgo, método basado en la volatilidad de las diferencias de los tipos de la curva libre de riesgo, método basado en el modelo estocástico de Hull y White y método basado en un Análisis de Componentes Principales (ACP). Para cada modelo se calibraron los factores de estrés de subida y de bajada, alcanzándose obviamente distintos factores. Finalmente, el M.E.S. v.1 se decantó por utilizar el método basado en la volatilidad de las diferencias logarítmicas por su simplicidad y por ser el método empleado por la fórmula estándar en QIS3.

### **Riesgo de renta variable ( $Mkt_{rentavariabile}$ )**

El riesgo de renta variable o *equity* está ligado al nivel y volatilidad de los precios de mercado de la renta variable, estando expuestos a dicho riesgo los activos y pasivos cuyo valor sea sensible a los cambios en el precio de las acciones. Tam-

<sup>55</sup> Dicha simplificación consiste en que pese a que se emplean los mismos factores que QIS3, éstos permanecen inalterados a partir de un vencimiento superior a 20 años mientras que este hecho en QIS3 se producía posteriormente. De esta forma en QIS-3 se establecía un factor de estrés de subida era de 0,37 para el período de vencimiento comprendido entre 20 y 22 años, y 0,36 a partir de 23 años. Mientras que para QIS4 este factor se considera en 0,37 para vencimiento a 20 o más años.

bién se incluirán dentro de este módulo, aquellos instrumentos de inversión alternativos, como son los *hedge funds*, derivados, SPVs, etc.

Dentro del riesgo de renta variable se incluye el riesgo no diversificable, mientras que el riesgo diversificable es considerado en el submódulo de riesgo de concentración. El módulo de renta variable emplea índices de referencia en los que se producen *shocks*, ya que se asume que las carteras de las compañías aseguradoras tienen el mismo riesgo sistemático que los índices, por lo que se está asumiendo que la beta de la cartera es igual a 1. Para el cálculo de la carga de capital se deben considerar los mecanismos de cobertura y de transferencia de riesgos mantenidos en el balance en la fecha de cálculo, siempre que cumplan los principios establecidos en QIS4<sup>56</sup>.

La carga de capital por riesgo de renta variable calcula en dos fases:

- En la primera fase se determina el efecto en el valor neto de los activos y pasivos en el escenario de estrés por el *shock* producido en la caída del valor de mercado del índice en el que se agrupa, existiendo dos tipos de índices: índices globales (países EEE y OCDE) con un escenario de caída del 32 %, y otros índices (Países emergentes, no cotizadas, SPVs, CDOs, hedge fund) con un escenario de caída del 45 %. Por lo tanto la fórmula de esta fase es:

$$Mkt_{rentavariabile, i} = \max(\Delta VAN|_{shock}, 0)$$

- En la segunda fase, una vez obtenidas las cantidades individuales, se agregan mediante la aplicación de un coeficiente de correlación de 0,75, recogándose de este modo un beneficio de diversificación entre índices. Por tanto, en la agregación de las cargas de capital de los índices globales y del resto de índices se debe de emplear la matriz de correlación lineal considerada en la siguiente tabla ( $Corr_{índices}_{i,j}$  o  $\sum_{índices}$ )

	$Mkt_{rentavariabile, Índices globales}$	$Mkt_{rentavariabile, Otros}$
$Mkt_{rentavariabile, Índices globales}$	1	
$Mkt_{rentavariabile, Otros}$	0,75	1

En notación matricial el capital de solvencia para el riesgo de inversión en renta variable se calcula como<sup>57</sup>:

<sup>56</sup> Existe un método simplificado para considerar los instrumentos de cobertura de valores individuales: primero se calculan los valores de mercado estresados para cada acción con cobertura y en una segunda etapa se calculan los cambios en el valor de mercado para todos los valores pertenecientes a un mismo índice.

<sup>57</sup> Para el negocio de vida con participación en beneficios el escenario de estrés por el shock producido en la caída del índice debieran ser calculados de las dos formas siguientes (por diferencia se recoge el efecto de la reducción del riesgo): a) resultados de los escenarios suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros, b) resultados de los escenarios suponiendo que se modifican

$$Mkt_{rentavariabile} = \sqrt{Mkt_{rv} \cdot \sum_{indices} \cdot Mkt_{rv}^t}$$

Siendo:

$Mkt_{rv}$  el vector que recoge los capitales propios asociados a cada uno de los riesgos individuales de los índices, es decir, el vector de dimensión  $1 \times 2$  ( $Mkt_{rentavariabile, \text{Índices globales}}, Mkt_{rentavariabile, \text{Otros}}$ ), y  $Mkt_{rv}^t$  el vector traspuesto de dimensión  $2 \times 1$ .

$\sum_{indices}$  la matriz de correlaciones de orden  $2 \times 2$  que recoge los coeficientes de correlación para los riesgos.

### Ejemplo. Riesgo de renta variable.

Supongamos que sólo los activos de la compañía están expuestos al riesgo de renta variable a través de una cartera de 500 u.m. La carga de capital por riesgo de renta variable y el efecto diversificador se muestran en la tabla inferior para diferentes composiciones de la cartera. Como puede comprobarse, las empresas que inviertan en mercados globales tendrán unas necesidades de capital inferiores y las que inviertan en ambos mercados obtendrán un beneficio por diversificación.

Cartera	Valor de mercado de la cartera		Carga de capital asociada al riesgo		Beneficio por diversificación	Total carga cartera
	Globales	Otros	Globales	Otros		
1	500	0	160	0	0	160
2	0	500	0	225	0	225
3	250	250	80	112,5	12,07	180,43

Los factores de estrés de QIS4 permanecen inalterados desde la calibración de QIS3 y se alcanzó por el ajuste de los rendimientos cuatrimestrales medidos en términos nominales y netos de riesgo cambiario, del índice global MSCI de mercados desarrollados en el período 1970-2005. La razón por la que se emplean los rendimientos nominales del mercado es debido a que los tipos de interés son calibrados sobre la estructura temporal de tipos nominales. El análisis efectuado en la calibración emplea los rendimientos cubiertos, por lo que excluye el riesgo de movimientos del tipo de cambio. La razón es que dado que las posiciones de renta variable en otras monedas son incluidas en el módulo de riesgo de divisa, el empleo de rendimientos no cubiertos en el módulo de riesgo de renta variable llevaría a una doble contabilización del riesgo.

las tasas de reparto de beneficios futuros. De esta forma se obtiene la carga de capital para los riesgos de mercado incluyendo la reducción del riesgo por el reparto de beneficios futuros mediante la fórmula:

$nMkt_{rentavariabile} = \sqrt{nMkt_{rv} \cdot \sum_{indices} \cdot nMkt_{rv}^t}$ , siendo  $nMkt_{rv}$  el vector que recoge la carga de capital para cada índice considerando la reducción del riesgo por el reparto de beneficios futuros.

La media geométrica<sup>58</sup> de la serie temporal empleada era igual a 10,1% y la desviación estándar de 16,9%, por lo que bajo la hipótesis de normalidad el VaR se correspondía con un factor de estrés de -33,4%<sup>59</sup>. A su vez, la media aritmética anual calculada era de 11,5% y la desviación estándar era de 16,9% por lo que bajo la hipótesis de normalidad y para un VaR al 99,5% el factor a aplicar es del -32%, ( $= 2,57 \times 0,169 - 0,115$ ), cuantía que finalmente se aplicó en la propuesta. Finalmente cabe mencionar que en QIS3 se subrayaba la posibilidad de incorporar en un futuro un ajuste de la cola de la distribución de rendimientos mediante la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) dado el pobre ajuste proporcionado por la distribución normal, que sin embargo no se ha analizado en QIS4.

Un elemento novedoso que se incluye en QIS4 es la posibilidad de tener en consideración un método alternativo, que considere un efecto amortiguador o “*dampener*”. El método amortiguador es una alternativa incorporada en QIS4 para el valor de mercado invertido en un índice global a propuesta de Francia. Intenta buscar un efecto contra-cíclico, evitando que las compañías vendan activos en momentos críticos. El marco teórico de dicho método consiste en que la probabilidad de que el precio del índice aumente es reducida cuando su valor es elevado, mientras que es elevada cuando su valor es bajo, es decir, existe reversión a la media en la rentabilidad de los índices. Para ello, el valor del índice se descompone en 2 componentes: uno de tendencia y otro cíclico. El componente cíclico, denotado por  $c(t)$ <sup>60</sup>, es la media de los 10 últimos días de negociación del índice ( $\bar{Y}_t^{10}$ ) menos la media del valor del índice en el último año ( $\bar{Y}_t^{261}$ )<sup>61</sup> (los valores son respecto al día en el que se procede al cálculo del SCR). Este efecto amortiguador sólo se aplica al valor asociado a pasivos cuya duración sea mayor a 3 años. En este caso sobre el factor de estrés estándar (32%) se realiza un ajuste por amortiguación del componente cíclico que tiene en consideración la duración del pasivo. La carga de capital para el riesgo del índice global es entonces<sup>62</sup>.

---

<sup>58</sup> El análisis de las series financieras puede estar basado en la media geométrica en vez de la media aritmética para reflejar la hipótesis de reinversión.

<sup>59</sup> El problema del ajuste a través de la distribución normal era que los rendimientos observados tenían asimetría negativa y una cola derecha gruesa, lo que sugería el empleo de técnicas para corregir el ajuste a la cola de la distribución. Para ello, se propusieron dos métodos. El primer método consistía en una estimación log-lineal para los peores resultados históricos a semejanza del método propuesto por Suecia en el denominado “*traffic light system*”. El VaR al 99,5% resultante de la aplicación de dicho método fue de -34,3%. El segundo método consistió en el ajuste de la cola a través de la distribución de Gumbel donde el VaR calculado era de -34,6%. Por lo tanto, después de la corrección de la cola el *shock* correspondiente a los dos métodos estudiados fue inferior al 35%, por lo que no se producían cambios significativos. Para analizar si dicho factor era estable a lo largo de un horizonte mayor de tiempo se empleó el índice Dimson de rendimientos totales (Fuente *Ibbotson Associates*) sobre una base anual para datos de 1900 a 2005, resultando valores similares para los diferentes métodos de ajuste.

<sup>60</sup> Por lo tanto  $c(t) = \bar{Y}_t^{10} - \bar{Y}_t^{261}$ . El valor a 31 de Diciembre de 2007 del componente cíclico es de -0,013.

<sup>61</sup> Se estiman unos 261 días de negociación a lo largo del último año.

<sup>62</sup> Además se establece una simplificación sobre este método por el cual las empresas pueden utilizar una aproximación de la duración de sus pasivos ponderada por la proporción de provisiones técnicas para cada ramo, en base a las duraciones medias del mercado para cada país.

$$Mkt_{\text{amortiguador, Global}} = VM \cdot (\alpha \cdot (F(k) + G(k) \cdot c(t)) + 0,32 \cdot (1 - \alpha))$$

Siendo:

$VM$  el valor de mercado del índice Global.

$\alpha$  la proporción de las provisiones técnicas asociadas a compromisos superiores a tres años.

$F(k)$  y  $G(k)$  son coeficientes que toman los valores de la siguiente tabla, siendo  $k$  la duración de los pasivos.

$C(t)$  es el componente cíclico.

$k$	$F(k)$	$G(k)$
3-5 años	29 %	0,20
5-10 años	26 %	0,11
10-15 años	23 %	0,08
>15 años	22 %	0,07

### Ejemplo. El efecto amortiguador.

En este ejemplo recogemos el efecto que produce la introducción del nuevo sistema propuesto (*dampener*) sobre los requerimientos de capital asociados a la renta variable. En el cuadro siguiente se recoge el porcentaje de capital necesario en función de diferentes combinaciones de porcentaje de provisiones técnicas (alfa) y la duración de los pasivos ( $k$ ). Como podemos comprobar, la reducción máxima se produciría para valores de alfa elevados y duraciones elevadas, en cuyo caso el factor de *stress* se reduciría hasta el límite mínimo teórico de 21,91%.

$k/\alpha$	0%	10%	30%	50%	70%	90%	100%
3-5 años	32,00%	31,67%	31,02%	30,37%	29,72%	29,07%	28,74%
5-10 años	32,00%	31,39%	30,16%	28,93%	27,70%	26,47%	25,86%
10-15 años	32,00%	31,09%	29,27%	27,45%	25,63%	23,81%	22,90%
>15 años	32,00%	30,99%	28,97%	26,95%	24,94%	22,92%	21,91%

En base a la tabla anterior determinaremos la carga de capital necesario para un valor de mercado de 500 u.m. El cuadro inferior muestra las distintas cargas de capital comparadas con el modelo estándar que se correspondería a  $\alpha=0$ .

<b>k/alfa</b>	<b>0%</b>	<b>10%</b>	<b>30%</b>	<b>50%</b>	<b>70%</b>	<b>90%</b>	<b>100%</b>
3-5 años	160,0	158,4	155,1	151,9	148,6	145,3	143,7
5-10 años	160,0	156,9	150,8	144,6	138,5	132,4	129,3
10-15 años	160,0	155,4	146,3	137,2	128,1	119,0	114,5
>15 años	160,0	155,0	144,9	134,8	124,7	114,6	109,5

La única diferencia respecto del riesgo de mercado en QIS3, es el cambio en el coeficiente de correlación lineal entre el índice global y otros. En QIS3 dicho coeficiente de correlación lineal era de 0,5 y pasa a ser de 0,75, recogiendo un menor beneficio por la diversificación entre los índices. Por contra, en el modelo español de solvencia (MES v.1) para seleccionar los factores de estrés para el riesgo de renta variable se analizó un ajuste a través de un modelo GARCH (1,1). El modelo elegido se calibró a los siguientes datos: rendimiento total mensual del FTSE All-Share (Reino Unido) para el periodo comprendido Diciembre 1959-Diciembre de 2005, rendimiento total mensual del IBEX-35 (España) para el periodo 1940-2005, rendimiento total mensual del DJ Stoxx (Euro) para el periodo 1951-2005, rendimiento total mensual del S&P500 (EE.UU.) para el periodo 1960-2005. A partir del modelo ajustado se generaron 10.000 simulaciones, cada una compuesta por 12 rendimientos mensuales, para el rendimiento total del mercado de renta variable. El factor equivalente al percentil 99,5 para un año y para cada índice se muestra en la siguiente tabla.

<b>FTSE</b>	<b>IBEX35</b>	<b>DJ Stoxx</b>	<b>S&amp;P500</b>
-40,7%	-38,89%	-37,84%	-33,11%

Sin embargo, debido a que no obtuvieron diferencias significativas en relación con la volatilidad del IBEX35, y para facilitar la comparación con QIS3, se optó por emplear los factores de éste (32% y 45%). No obstante, se establecieron las siguientes matizaciones: un factor del 16% para los fondos de inversión de renta fija, debido a que su volatilidad se considera entre la mitad y la tercera parte de los índices de renta variable y un factor del 15% para las participaciones en empresas del grupo<sup>63</sup>.

### *C. Riesgo de los inmuebles y propiedades ( $Mkt_{inmuebles}$ )*

El riesgo de mercado de los inmuebles surge por la variabilidad de los precios de mercado de las propiedades inmobiliarias. La carga de capital se basa en el cálculo

<sup>63</sup> Este factor está basado en el documento de la *Associazione Nazionale fra le Imprese Assicuratrici* de Italia denominado "Participations in QIS4".

lo de un escenario de estrés donde el *shock* es el efecto de una caída del 20 % en el valor de todas las exposiciones individuales directas e indirectas a los precios de los inmuebles<sup>64</sup>.

$$Mkt_{\text{inmuebles}} = \Delta \text{VAN shock}_{\text{inmuebles}}$$

La caída del precio de los activos fue calibrada a partir de los índices IPD referidos al rendimiento total en inversión directa en inmuebles y con frecuencia anual para los países de Holanda, Francia, Alemania, Suecia y Reino Unido. El intervalo temporal abarcado fue distinto en función del país considerado. Así, para Holanda se empleó el intervalo 1997-2005, para Francia 1998-2005, para Alemania 1996-2005, para Suecia 1997-2005 y para el Reino Unido 1971-2005. Dado que el índice IPD se construye con datos basados en tasaciones, las series temporales serán más suaves que aquellas que resultarían de transacciones reales. Para contrarrestar este efecto (*smoothed effect*) se ha intentado calcular el índice sin suavizar. El sistema por el cual se suaviza el índice IPD es el método propuesto por Fisher y Geltner (2000). Dicho método consiste en realizar una media ponderada de los rendimientos suavizados del índice en el ejercicio anterior  $\hat{R}_{t-1}$  y del rendimiento observado en el mercado  $R_t$ . La fórmula exacta es  $\hat{R}_t = \omega \cdot R_t + (1 - \omega) \cdot \hat{R}_{t-1}$ , donde  $\omega$  representan los pesos que se obtienen por regresión de los valores suavizados sobre ellos mismos retardados un período. Mediante esta fórmula se derivan los coeficientes de regresión que mejor se ajusten a las series temporales. Mediante las ponderaciones de cada país en el índice IPD y los coeficientes de regresión de la fórmula autorregresiva se puede calibrar el VaR para el índice sin suavizar mediante su ajuste a través de una distribución normal para los rendimientos.

Respecto al riesgo de propiedades, no existen diferencias respecto al modelo empleado en QIS3. Sin embargo, debe citarse que en la anterior propuesta se desechó el ajuste de los rendimientos a través de una distribución de valor extremo debido a la escasez de datos, proponiéndose como futura línea de investigación. Además, se propusieron también como futuras líneas todavía no abordadas, una corrección de los rendimientos en función de la liquidez y tratar de solucionar el problema del truncamiento de los rendimientos obtenidos.

El modelo elegido en MES v.1 para modelizar la rentabilidad de los inmuebles fue un modelo AR(1)-GARCH (1,1). Esta elección se realizó a partir del análisis de la información histórica que indicaba que las volatilidades de los bienes inmuebles tienden a estar agrupadas, pero que el mercado inmobiliario en su totalidad se comporta de forma más suave que el mercado de renta variable. Dicho modelo fue calibrado con una mezcla de información procedente de series de rendimientos

---

<sup>64</sup> En el caso del seguro de vida se calcularían los escenarios de estrés por el *shock* producido en la caída del valor de los inmuebles deben ser de las dos siguientes formas (por diferencia se recoge el efecto de la reducción del riesgo): a) resultados de los escenarios suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros, b) resultados de los escenarios suponiendo que se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros. De esta forma se obtiene la carga de capital para los riesgos de inmuebles incluyendo la reducción del riesgo por el reparto de beneficios futuros mediante la fórmula:  $nMkt_{\text{inmuebles}}$ .

totales de la propiedad inmobiliaria comercial británica y del índice IPD de rendimientos<sup>65</sup>. A partir del modelo ajustado se generaron 10.000 simulaciones cada una compuesta por 12 rendimientos mensuales y se calculó el rendimiento total del mercado de renta variable. El factor equivalente al percentil 99,5 para un año y para el mercado inmobiliario comercial era igual a  $-11,7\%$  en un horizonte temporal de un año. Para la propiedad inmobiliaria residencial, se analizaron los precios históricos desde principios de los 90 en Reino Unido (“Nationwide HPI”) dando como resultado un estrés del  $-20\%$ . Asimismo se tuvo en consideración información disponible para el mercado inmobiliario español. El factor de estrés finalmente elegido fue del  $-20\%$  en línea con el factor de QIS3, sin embargo, se propuso un factor del  $-15\%$  para inmuebles residenciales. Además, en el modelo MES v.1 se ha considerado correlación perfecta entre las dos categorías, pero dicho coeficiente puede ser modificado por cada entidad.

#### D. Riesgo de divisa o riesgo asociado al tipo de cambio ( $Mkt_{t,cambio}$ )

El riesgo de divisa surge del nivel de volatilidad de los tipos de cambio. La carga de capital  $Mkt_{t,cambio}$  es el resultado de dos escenarios predefinidos en los que se calculan un *shock* de subida y de bajada del  $20\%$  de todas las monedas distintas a la cual la empresa presenta sus cuentas y se calcula el efecto inmediato en el valor neto de los activos y pasivos. Este factor permanece inalterado respecto a QIS3, sin embargo en QIS4 se establece un factor del  $2,25\%$  para la corona danesa (DKK) y un  $15\%$  para la corona eslovena (EEK), el lat de letonia (LVL), la lita lituana (LTL) y la corona eslovaca (SKK). Por tanto, la carga de capital por riesgo se establece como la mayor cuantía de<sup>66</sup>:

$$Mkt_{t,cambio}^{subida} = \Delta VAN \text{ shocksubida}$$

$$Mkt_{t,cambio}^{bajada} = \Delta VAN \text{ shockbajada}$$

La calibración de este factor permanece inalterada desde QIS3 donde se emplearon los tipos de cambio mensuales contra el euro durante el periodo 1958-2006 de un grupo de divisas, empleándose su hipotética cotización para el período anterior

<sup>65</sup> Sobre dichos datos se efectuaron dos ajustes: dado que no existe información disponible de IPD anterior a 1971 se estimaron dichos datos aplicando *bootstrapping*, y al igual que en la calibración del QIS3, se calculó el índice sin suavizar.

<sup>66</sup> Para seguros de vida con participación en beneficios los escenarios de shock de subida y de bajada deben ser calculados de las dos siguientes formas (por diferencia se recoge el efecto de la reducción del riesgo): a) resultados de los escenarios suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros y b) resultados de los escenarios suponiendo que se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros. De esta forma obtenemos  $nMkt_{t,cambio}^{subida}$  y  $nMkt_{t,cambio}^{bajada}$ .

Por lo tanto, la carga de capital para el tipo de cambio es aquel derivado del shock que proporciona mayor capital incluyendo la absorción del riesgo derivado de la participación en beneficios futuros:

Si  $nMkt_{t,cambio}^{subida} > nMkt_{t,cambio}^{bajada}$  entonces se establece que  $nMkt_{t,cambio} = nMkt_{t,cambio}^{subida}$  y  $Mkt_{t,cambio} = Mkt_{t,cambio}^{subida}$

Si  $nMkt_{t,cambio}^{subida} \leq nMkt_{t,cambio}^{bajada}$  entonces se establece que  $nMkt_{t,cambio} = nMkt_{t,cambio}^{bajada}$  y  $Mkt_{t,cambio} = Mkt_{t,cambio}^{bajada}$

a 1999. Tomando estas divisas se formaron una cesta de monedas<sup>67</sup> frente al euro que representaban las posiciones mantenidas por las instituciones financieras de Holanda. El ajuste de las variaciones porcentuales entre el tipo de cambio de dichas divisas frente al euro se modeliza a través de una distribución normal<sup>68</sup>. El VaR de la cesta resultante era, a partir de las volatilidades obtenidas, algo inferior al 20%<sup>69</sup>. Posteriormente se efectuaron dos análisis de sensibilidad de dicho factor. En el primero, se consideraban las variaciones en el tipo de cambio respecto a la libra esterlina para el período 1973-2006, obteniendo un factor ligeramente superior al 20%<sup>70</sup>. En el segundo, se modificaron las ponderaciones de cada divisa en la cesta de monedas frente al euro y frente a la libra esterlina, siendo los resultados consistentes con la aplicación de un factor del 20%<sup>71</sup>.

No existen diferencias respecto al modelo empleado en QIS3, a excepción del ya mencionado factor de estrés distinto para las divisas de DKK, EEK, LVL, LTL y la SKK. Sin embargo, cabe citar que en QIS3 se desechó el ajuste de los rendimientos a través de una distribución de valor extremo debido a la baja cantidad de datos, proponiéndose como futura línea de investigación. Por otro lado, en MES v.1 no se desarrolló un factor de estrés específico para este riesgo por tener una repercusión muy pequeña en el mercado asegurador español, aplicándose la fórmula estándar de QIS3.

#### *E. Riesgo de diferencial de crédito o spread (MKTspread)*

El riesgo de *spread* es la parte de riesgo de los instrumentos financieros explicada por la volatilidad de los spreads de crédito sobre la estructura temporal de tipos de interés libres de riesgo. Refleja el cambio en el valor de los activos<sup>72</sup> debido a movimientos de la curva de rendimientos respecto a la estructura temporal libre de riesgo. El riesgo de *spread* trata tanto el riesgo de movimientos en el diferencial de crédito dentro de una misma clase de calificación, como implícitamente alguna

---

<sup>67</sup> Los pesos de cada moneda en las cestas eran de un 35% para el dólar americano (USD), un 24% para la libra británica (GBP), un 13% para el peso argentino (ARS), un 8% para el yen japonés (JPY), un 7% para la corona sueca (SEK), un 7% para el franco suizo (CHF) y un 6% para el dólar australiano (AUD). El peso argentino fue empleado como una proxy de exposición del riesgo de cambio a los mercados emergentes.

<sup>68</sup> En vista a los resultados obtenidos la hipótesis de normalidad se consideró aceptable por el CEIOPS, sin embargo, también se citó que el ajuste a través de otros modelos más sofisticados podrían proporcionar un mejor ajuste.

<sup>69</sup> El valor calculado en base a las correlaciones establecidas es de -17,34%.

<sup>70</sup> El valor calculado en base a las correlaciones establecidas es de -21,10%.

<sup>71</sup> Para el caso del euro el mayor VaR obtenido resultó ser del -22,55%, mientras que para el caso de la libra dichos factores fueron superiores resultando el pero escenario un VaR del -25,41%.

<sup>72</sup> Los activos asignados a pólizas en los que los beneficiarios carguen con los riesgos de inversión están excluidos del riesgo de *spread*, siempre y cuando estas pólizas no tengan opciones implícitas o garantías.

parte del riesgo de migración entre diferentes clases (*migration risk*) y del riesgo de impago (*default risk*)<sup>73</sup>. La carga de capital para los riesgos de *spread* se determina para tres tipos de activos:

- Los títulos de renta fija corporativa, ya que en principio los títulos del gobierno están exentos del riesgo de *spread*<sup>74</sup>.
- Los productos estructurados de crédito (*structured credit products*) tales como los activos titulizados (*asset-backed securities*) y las obligaciones de deuda con colateral (*collateralised debt obligations*).
- Los derivados de crédito (CDS, etc.), en la medida en que no se empleen como parte de una política reconocida de reducción del riesgo.

La carga de capital por riesgo de *spread* es igual a la suma de estos tres componentes anteriores<sup>75</sup>:

$$Mkt_{spread} = Mkt_{spread}^{RF} + Mkt_{spread}^{PEC} + Mkt_{spread}^{DC}.$$

La carga de capital por *spread* para los títulos de renta fija ( $Mkt_{spread}^{RF}$ ) se calcula como la suma del producto del valor de mercado de cada título ( $VM_i$ ) por una función de su duración modificada del título ( $m(dur_i)$ ) y por un factor en función del *rating* de ese título  $F(rating_i)$ . Asimismo, se debe considerar el impacto en el lado del pasivo para aquellas pólizas en las que los beneficiarios soporten el riesgo de inversión con opciones implícitas y garantías ( $\Delta Pasivo_{ul}$ ):

$$Mkt_{spread}^{RF} = \sum_i VM_i \cdot m(dur_i) \cdot F(rating_i) + \Delta Pasivo_{ul}$$

La variación máxima estimada en el *spread* por categoría de *rating* se ha estimado de manera consistente con un VaR al 99,5%, y sus valores se presentan en la siguiente tabla.

---

<sup>73</sup> Esto es debido a que se empleó para su calibración una base mensual y, consecuentemente, se recogen las rebajas o mejoras en la calificación crediticia.

<sup>74</sup> Están exentos del riesgo de *spread* los préstamos emitidos por el gobierno local o garantizados por él o por un estado OCDE o del Espacio Económico Europeo siempre que sean emitidos en la divisa del gobierno local.

<sup>75</sup> Los cálculos de las cargas de capital se deben realizar suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros, es decir, que las tasas se mantienen constantes antes y después de un cambio en el diferencial de crédito. De forma adicional se debe calcular el resultado del cálculo en el que las tasas de reparto se modifican como consecuencia del cambio en el *spread*, dando como resultado la carga de capital  $nMkt_{spread}$ . Por diferencia entre ambas cargas de capital se recoge el efecto de la reducción del riesgo.

Rating <sub>i</sub>	F(Rating <sub>i</sub> )
AAA	0,25%
AA	0,25%
A	1,03%
BBB	1,25%
BB	3,39%
B	5,60%
CCC o inferior	11,20%
Sin rating <sup>76</sup>	2,00%

En cuanto a la función  $m(dur_i)$ , se establece un tope a la duración modificada en función del rating. De este modo se limita la variación máxima, ya que al asumir una relación lineal se estaría sobreestimado el riesgo y consecuentemente el nivel de capital necesario. La función toma los siguientes valores en función del rating<sup>77</sup>:

$$m(dur_i) = \left. \begin{array}{ll} \max(\min(dur_i; 8); 1) & \text{si rating}_i = \text{BB} \\ \max(\min(dur_i; 6); 1) & \text{si rating}_i = \text{B} \\ \max(\min(dur_i; 4); 1) & \text{si rating}_i = \text{CCC o inferior, sinrating} \\ \max(dur_i; 1) & \text{resto} \end{array} \right\}$$

La carga de capital por riesgo de *spread* para los productos estructurados de crédito<sup>78</sup> ( $Mkt_{spread}^{PEC}$ ) se calcula del mismo modo que en el caso anterior pero con diferentes niveles de *spread* y límites a la duración. De esta forma se sustituyen la función  $F(rating_i)$  por  $G(rating_i)$  (véase la siguiente tabla) y se establece una nueva función  $n(dur_i)$  que establece un tope a la duración modificada en función del *rating*. La función toma los siguientes valores:

$$n(dur_i) = \left. \begin{array}{ll} \max(\min(dur_i; 5); 1) & \text{si rating}_i = \text{BB} \\ \max(\min(dur_i; 4); 1) & \text{si rating}_i = \text{B} \\ \max(\min(dur_i; 2,5); 1) & \text{si rating}_i = \text{CCC or lower} \\ 1 & \text{si no calificado} \\ \max(dur_i; 1) & \text{resto} \end{array} \right\}$$

<sup>76</sup> De esta forma, una obligación con duración modificada de 5 años tendrá una carga de capital por riesgo de *spread* del 8% de su valor de mercado.

<sup>77</sup> La aproximación lineal descrita funciona bien para valores bajos de *spreads* de crédito o duraciones, pero cuando ambas son grandes la aproximación no funciona bien. Por este motivo, como posible solución se optó por limitar la duración, ya que de lo contrario se estaría sobreestimando el riesgo real.

<sup>78</sup> Las compañías deben vigilar que en las obligaciones de deuda con colateral el *rating* refleje la naturaleza de los riesgos subyacentes asociados con los activos colaterales.

Rating <sub>i</sub>	F(Rating <sub>i</sub> )
AAA	2,13%
AA	2,55%
A	2,91%
BBB	4,11%
BB	8,42%
B	13,35%
CCC o inferior	29,71%
Sin rating	100,00%

Finalmente, la carga de capital por riesgo de *spread* para los derivados de crédito ( $Mkt_{spread}^{DC}$ ) se determina como la mayor carga derivada de los siguientes cambios en el valor del derivado (caída en el activo o aumento en el pasivo) de una subida de un 300% en los spreads o de una reducción del 75% en los spreads.

### Ejemplo. Riesgo de spread.

Por ejemplo, una obligación con valor de mercado de 100€ con calificación BB y duración modificada de 9 años, la carga de capital sería  $100 \times 8 \times 0,0339 = 30,51€$ , debido a que se establece un límite a la duración igual a 8 años.

En la práctica para las carteras de títulos se procede de forma semejante, es decir, se agrupan en función de la calificación crediticia y se aplica la duración media ponderada. Es decir, si tenemos dos tipos de obligaciones BB, el primero con duración modificada de 9 y valor de mercado de 100€ y el segundo con duración modificada de 3 y valor de mercado de 1000€, se calcula la duración media ponderada de la cartera de bonos BB, que es de 3,45 años y se procede al cálculo de la carga como  $1.100 \times 3,45 \times 0,0339 = 128,82€$ .

	Bono-1	Bono-2	Cartera
Valor Mercado	100	1000	1100
Rating	BB	BB	BB
Duración	9	3	
Duración (QIS4)	8	3	3,45
Carga spread	30,51	101,7	128,82

Para calcular el riesgo de *spread* se propone una simplificación que puede ser efectuada por aquellas compañías para las cuales se cumpla el criterio general para las simplificaciones y además que el rating de crédito medio para los títulos de renta fija a largo plazo (10 o más años) no sea menor que un *rating* inferior de

los títulos de renta fija de corto plazo (5 o menos años). Este enfoque simplificado supone que la carga de *spread* de crédito es la suma de las tres categorías (renta fija, estructurados y derivados). Sin embargo, para cada categoría se simplifica su cálculo empleando las duraciones modificadas de las tres categorías.

### Ejemplo. Riesgo de *spread* método simplificado.

Supongamos una compañía que cumple los requisitos simplificados para emplear el método simplificado y cuyo valor de mercado y duración media modificada de los títulos de renta fija corporativos, estructurados de crédito y derivados de crédito es la mostrada en el cuadro inferior

	Valor de mercado	Duración modificada
Renta fija	1.100	4
Estructurados de crédito	100	3
Derivados de crédito	50	2

A partir de los anteriores datos debemos calcular las cargas de capital para cada componente para su posterior agregación. Para la renta fija la carga de capital se calcula como:

Rating	Proporción del VM de la cartera en el rating i	F(Rating <sub>i</sub> )
BBB	50,0%	1,25%
BB	30,0%	3,39%
B	20,0%	5,60%
Rating medio de la cartera		2,76%

Por lo que  $Mkt_{spread}^{RF} = 1.100 \times 4 \times 2,76 = 121,53$  u.m. Para los productos de crédito estructurados la carga de capital se calcula como:

Rating	Proporción del VM de la cartera en el rating i	F(Rating <sub>i</sub> )
AA	50,0%	2,55%
A	50,0%	2,91%
Rating medio de la cartera		2,73%

Por lo que  $Mkt_{spread}^{PEC} = 100 \times 3 \times 2,73 = 8,19$  u.m. Finalmente la carga de capital para los derivados de crédito  $Mkt_{spread}^{DC} = 50 \times 2 = 100$  u.m.

La carga de capital por riesgo de *spread* se calcula como suma aritmética de las tres categorías por lo tanto

$$Mkt_{spread} = Mkt_{spread}^{RF} + Mkt_{spread}^{PEC} + Mkt_{spread}^{DC} = 229,72 \text{ u.m.}$$

La calibración de riesgo de *spread* para los títulos de renta fija corporativa permanece inalterada desde QIS3. La única diferencia es la introducida en la fórmula de las duraciones, de manera que en QIS4 la duración modificada mínima es de 1 año. Las series de datos con frecuencia mensuales empleadas en la calibración fueron obtenidas de Moody's para la mediana de los diferenciales de bonos desde 1991 hasta 2006 y para los diferenciales de crédito de títulos a largo plazo desde 1950 hasta 2006. Todas las series de datos proceden de información sobre carteras de crédito, y cada serie está disponible para varias clases de *rating*. Dada la falta de datos referidos al euro, el diferencial de crédito se mide usando como referencia los títulos del Tesoro americano. Los datos observados muestran que los *spreads* de crédito con valor más alto han estado asociados con cambios absolutos en los *spreads* de crédito con valor más alto. Esta propiedad está implícita en el modelo lognormal. Siguiendo dicho modelo el spread de crédito a 12 meses se puede escribir como:  $CS_{12}(t) = CS_0(t) e^X$  siendo  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Por lo que  $X = \ln\left(\frac{CS_{12}(t)}{CS_0(t)}\right) = \ln(CS_{12}(t)) - \ln(CS_0(t)) \approx \frac{CS_{12}(t) - CS_0(t)}{CS_0(t)}$ .

Las principales diferencias con QIS3 provienen del tratamiento especial que en QIS4 se le da a los estructurados de crédito y a los derivados de crédito. Además, en QIS4 se establece un mínimo para la duración de un año, a diferencia de QIS3 en donde no se establecía este mínimo. En MES v.1 se analizaron tres técnicas alternativas: modelo basado en componentes principales, modelo basado en el enfoque lognormal y un modelo simplificado<sup>79</sup>. Finalmente, se eligió la metodología basada en el modelo lognormal propuesta por la fórmula estándar de QIS3.

#### F. Riesgo de concentración ( $Mkt_{concentración}$ )

El riesgo de concentración surge como consecuencia de la volatilidad adicional existente en carteras concentradas de activos y de la posible pérdida total o parcial de valor por *default* o incumplimiento del emisor. Por simplicidad y consistencia, la definición de concentración se restringe a los riesgos respecto a la acumulación de exposiciones con la misma contraparte, pero no incluye otro tipo de concentraciones como la geográfica, el sector industrial, etc. Los títulos del gobierno están exentos en principio del riesgo de concentración<sup>80</sup>, al igual que los depósitos bancarios hasta 3 meses y hasta 3 millones de euros en bancos con una calificación crediticia igual o superior a AA.

Las exposiciones al riesgo en activos deben ser agrupadas de acuerdo con las contrapartes implicadas. Las siguientes partidas son necesarias para efectuar el cálculo de concentración:  $E_i$  o exposición neta a la quiebra de la contraparte  $i$ ,  $Activo_{xi}$  o cantidad total de activos excluyendo aquellos en los que el beneficiario

<sup>79</sup> Es empleado en el modelo Sueco "the traffic light model" y contemplado como enfoque alternativo en QIS3.

<sup>80</sup> Están exentos los préstamos emitidos por el gobierno local o garantizados por él o por un estado OCDE o del Espacio Económico Europeo siempre que sean emitidos en la divisa del gobierno local.

soporte el riesgo de inversión y *rating<sub>i</sub>*; o calificación externa del *rating* de la contraparte *i*. Cuando una empresa tiene más de una exposición a una contraparte, entonces  $E_i$  es la suma agregada de esas exposiciones y *rating<sub>i</sub>* debe ser un rating ponderado por la exposición neta de impago<sup>81</sup>. Todas las compañías que pertenezcan al mismo grupo se considerarán como parte de la misma contrapartida a efectos del cálculo del riesgo de concentración. La exposición neta de la contraparte comprenderá la renta variable y los productos de renta fija, incluyendo instrumentos híbridos de deuda, por lo que a semejanza del QIS3 no se incluirá los inmuebles. Finalmente, los derivados financieros sobre renta variable o los bonos susceptibles de quiebra deben ser asignados teniendo en cuenta su sensibilidad o *delta* a la exposición neta. Es decir, una opción put y un CDS sobre una compañía, reducen la exposición a la renta variable y la exposición a la renta fija para la compañía subyacente.

La fórmula de la carga de capital para soportar en riesgo de concentración en QIS4 incluye unos límites de concentración y unas cargas distintas en función del *rating* de la contraparte. Su cálculo se realiza en tres etapas: exceso de exposiciones, carga de concentración de riesgo y agregación.

El primer paso consiste en el cálculo de las exposiciones en exceso ( $XS_i$ ). Los activos deben ser agrupadas de acuerdo con las contrapartes implicadas, y se calcula el exceso de exposiciones para cada contraparte como el porcentaje que la exposición neta ( $E_i$ ) en renta fija y renta variable representa sobre el total de activos ( $Activo_{xi}$ ), excluyendo aquellos en los que el beneficiario soporte el riesgo de inversión, menos el límite de concentración permitido (CT). El límite de concentración (véase la siguiente tabla) se aplica a la suma de la renta variable y la renta fija y está en función del *rating* de la contraparte. De esta forma, se establece que el límite para la renta variable y la renta fija de los títulos A o superior es del 5% mientras que para los títulos BBB o inferior es del 3%<sup>82</sup>. La fórmula para el cálculo de las exposiciones en exceso es, por tanto, la siguiente:

$$XS_i = \left\{ 0; \frac{E_i}{Activo_{xi}} - CT \right\}$$

<b>rating<sub>i</sub></b>	<b>CT</b>
AA-AAA-A	5%
BBB, BB o inferior	3%

El segundo paso consiste en el cálculo de la concentración en la contraparte *i*. Se establece la carga de concentración de riesgo para cada contraparte mediante el

<sup>81</sup> Lo que se denomina en terminología anglosajona como “*weighted average credit quality step*”.

<sup>82</sup> Además, en el caso de ciertos valores de deuda el límite de concentración se fija en un 40% lo que refleja la mayor seguridad de estos valores.

producto del valor de las exposiciones que exceden el límite por la función del rating<sup>83</sup>:

$$\text{Conc}_i = \text{Assets}_{x_i} \cdot \text{XS}_i \cdot g_i + \Delta \text{Liab}_{ul}$$

Los parámetros de  $g_i$  dependen del rating de crédito de la contraparte tomando los valores de la siguiente tabla.

Rating <sub>i</sub>	Calidad crediticia <sup>84</sup>	$g_i$
AAA- AA	1	0,15
A	2	0,18
BBB	3	0,30
<i>BB o inferior, sin calificar</i>	4-6	0,73

Finalmente, el tercer paso consiste en la agregación del riesgo. Se procede a la agregación de las distintas cargas de concentración suponiendo total independencia entre ellas, obteniendo así el  $Mkt_{concentración}$ <sup>85</sup>, lo que formalmente se traduce en:

$$Mkt_{concentración} = \sqrt{\sum_i \text{Conc}_i^2}$$

### Ejemplo. Riesgo de concentración.

Suponemos que el total de activos excluyendo aquellos en los que el beneficiario soporte el riesgo de inversión es de 1.000€ ( $\text{Activo}_{x_i}$ ) y tenemos dos carteras de renta fija con dos emisores calificados respectivamente como AA y BBB con valores de 200 y 100 respectivamente. Si calculamos el exceso de concentración ( $\text{XS}_i = (200/1.000 - 5\%) = 0,15$ ), obtenemos los valores de 15% y 7%, respectivamente.

<sup>83</sup>  $\Delta \text{Liab}_{ul}$  es el impacto del escenario de estrés en el pasivo para aquellas pólizas en las cuales el beneficiario soporte el riesgo de inversión. El escenario de estrés tendrá un valor mínimo de 0 (un signo positivo significa pérdidas). El escenario se define como una caída en el valor de los activos de la contraparte  $i$  empleados como referencia en la valoración de los pasivos, siendo el valor de dicha caída de  $\text{XS}_i \cdot g_i$ .

<sup>84</sup> Este término se emplea como traducción del término anglosajón empleado en QIS4 "Credit Quality Step".

<sup>85</sup> Para calcular el riesgo de concentración para los seguros de vida, los cálculos de las cargas de capital se deben calcular suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros, es decir, que las tasas se mantienen constantes antes y después de un cambio en la volatilidad y/o nivel de impago de los activos concentrados. De forma adicional se debe calcular el resultado del cálculo en el que las tasas de reparto se modifican dando como resultado la carga de capital  $nMkt_{concentración}$ . Por diferencia entre ambas cargas de capital se recoge el efecto de la reducción del riesgo.

	Importe	Calificación	Límite	$XS_i$	$g_i$
Total Activos	1000				
Cartera A	200	AA	5%	15%	15%
Cartera B	100	BBB	3%	7%	30%

Por tanto la carga por concentración para cada una de las carteras será: Posteriormente calculamos la carga de concentración ( $Conc_i$ ) como:

$$Conc_a = 0,15 \times 1000 \times 0,15 = 22,5\text{€}.$$

$$Conc_b = 0,07 \times 1000 \times 0,30 = 21\text{€}.$$

El cálculo del riesgo de concentración total sería igual a

$$Mkt_{\text{concentración}} = \sqrt{22,5^2 + 21^2} = 30,78$$

Como podemos comprobar, la diversificación de contrapartes (emisores en renta fija o entidades en renta variable) mitiga el riesgo de concentración, ya que la carga de capital es menor que la suma de las cargas individuales, debido a que se considera que ambos riesgos son independientes. Esto puede entenderse mejor mediante el análisis comparativo de dos carteras: la cartera 1 formada por un título con calificación crediticia AAA y la cartera 2 formada por cuatro títulos calificados como BBB.

Para la primera cartera la carga de capital será de 22,5€.

Cartera1	Importe	Calificación	Límite	$XS_i$	$g_i$	$Conc_i$
Emisor 1	200	AAA	5%	15%	15%	22,5

Para la segunda cartera la carga de capital será también de 22,5€.

Cartera2	Importe	Calificación	Límite	$XS_i$	$g_i$	$Conc_i$
Emisor 2	100	BBB	3%	7,0%	30%	21,0
Emisor 3	50	BBB	3%	2,0%	30%	6,0
Emisor 4	48	BBB	3%	1,8%	30%	5,4
Emisor 5	2	BBB	3%	0,0%	30%	0,0

El objetivo de la calibración efectuada en QIS4 para el riesgo de concentración (CEIOPS, 2008d) era proporcionar evidencia del impacto que una contraparte puede tener en el riesgo de una cartera bien diversificada de activos. La metodo-

logía empleada fue similar a la empleada en QIS3 (CEIOPS, 2007d). La calibración de este riesgo siguió los siguientes pasos:

- *Paso 1 o diseño de una cartera bien diversificada.* La cartera modelo es la misma tomada en QIS3, es decir, representa la cartera media de los aseguradores europeos según lo expuesto en el *Financial Stability Report Conglomerates 2005-2006*, manteniendo un porcentaje del 70% en renta fija y del 30% en renta variable. A su vez, un 25% de la renta fija se invierte en deuda del estado y el 75% restante en bonos empresariales. En cuanto a la cartera invertida en renta variable, se seleccionó el Eurostoxx50 y se determinó su VaR al 99,5% para el periodo 1993-2006.
- *Paso 2 o efecto del aumento de la concentración en la cartera inicial.* Se incrementa en sucesivos pasos del 1% el peso de una empresa y su bono asociado con el consiguiente aumento de la concentración de la cartera. Posteriormente, se calculan las diferencias que se producen en el VaR de la cartera.
- *Paso 3 o cálculo del factor g.* Se estiman los polinomios a partir de la interpolación lineal de los pares de puntos derivados del incremento de la concentración y de la variación del VaR resultante, derivándose por el método de mínimos cuadrados ordinarios el valor del parámetro  $g_i$ .

La diferencia del modelo de riesgo por concentración de QIS3 respecto a su sucesor QIS4 está en el paso 2 del cálculo del capital necesario. En QIS 4 se procede a una simplificación de la fórmula, de forma que se pasa de una fórmula cuadrática a una lineal. Bajo QIS3, tanto la etapa de cálculo de la exposición en exceso como la agregación de riesgo son idénticas, por lo que sólo se explicará este paso 2. En QIS3 el cálculo de la concentración en la contraparte  $i$  se calcula como:

$$Conc_i = Assets_{xl} \cdot XS_i \cdot (g_0 + g_1 \cdot XS_i) = Assets_{xl} \cdot XS_i \cdot g_0 + Assets_{xl} \cdot g_1 \cdot XS_i^2.$$

Los parámetros de  $g_0$  y  $g_1$  dependían del rating de crédito de la contraparte tomando los valores de la siguiente tabla.

Rating <sub>i</sub>	$g_0$	$g_1$
AAA	0,1840	0,0401
AA		
A	0,2684	-0,0163
BBB	0,3862	-0,0416
<i>BB o inferior, sin calificar</i>	0,9227	-0,4314

En MES v.1 no se realizó un análisis de este riesgo, proponiéndose la fórmula estándar desarrollada en QIS3.

### 5.4.3. Riesgo asociado a la contraparte ( $SCR_{contraparte}$ )

El riesgo de contraparte es el riesgo asociado a las posibles pérdidas derivadas de la quiebra o del deterioro del crédito de la contraparte en contratos de mitigación de riesgo como el reaseguro, los derivados financieros, los intermediarios, así como cualquier otra exposición al crédito no cubierta en el submódulo de riesgo de *spread*. Por lo tanto, este módulo recoge principalmente el riesgo derivado de la quiebra de los reaseguradores y de los emisores de derivados financieros.

Para cada contraparte, se debe considerar la exposición global al riesgo, independientemente de la forma legal de las obligaciones contractuales. La información necesaria para el cálculo del capital asociado al riesgo de contraparte son la probabilidad de impago (*probability of default* o PD) y la pérdida estimada dado el impago o cuantía de la pérdida estimada en caso de incumplimiento de la contraparte (*loss-given-default* o LGD). El  $LGD_i$  global en relación a la contraparte  $i$  es la suma de las pérdidas dado un impago derivadas del reaseguro y SPVs, derivados financieros, riesgo de intermediarios y otras exposiciones al crédito.

En relación a una contraparte de contratos de reaseguro o SPV, la pérdida LGD se define como:

$$LGD = 50\% \cdot \max(\text{Recobrable} + SCR_{Asegurador}^{bruto} - SCR_{Asegurador}^{neto} - \text{Colateral}; 0)$$

Siendo:

Recobrable la mejor estimación de la parte recobrable de un contrato de reaseguro o SPV.

$SCR_{Asegurador}^{neto}$  el SCR de los riesgos aseguradores calculados en base a la fórmula estándar, sin considerar la capacidad de absorción de las pérdidas futuras derivadas de los impuestos diferidos o de las modificaciones de las tasas de reparto.

$SCR_{Asegurador}^{bruto}$  el SCR de los riesgos aseguradores calculados en base a la fórmula estándar, sin considerar el efecto reductor del riesgo de los contratos de reaseguro, y sin considerar la capacidad de absorción de las pérdidas futuras derivadas de los impuestos diferidos o de las modificaciones de las tasas de reparto.

Colateral el colateral que cubre la pérdida en relación con la contraparte.

El factor del 50% considera el hecho de que incluso en caso de quiebra del reasegurador, éste puede a menudo hacer frente a una parte elevada de sus obligaciones<sup>86</sup>.

---

<sup>86</sup> Este factor se considera una elección conservadora de acuerdo con los estudios comparativos elaborados por Standard & Poor's y Fitch.

En relación a una contraparte de derivados financieros, la pérdida LGD se define como:

$$LGD = 50\% \cdot \max (VM + SCR_{Mercado}^{bruto} - SCR_{Mercado}^{neto} - Colateral; 0)$$

Siendo:

*VM* el valor de mercado del derivado financiero según el artículo 74 de la Propuesta de Directiva de Solvencia II.

$SCR_{Mercado}^{bruto}$  el SCR de los riesgos de mercado calculados en base a la fórmula estándar, sin considerar la capacidad de absorción de las pérdidas futuras derivadas de los impuestos diferidos o de las modificaciones de las tasas de reparto.

$SCR_{Mercado}^{neto}$  el SCR de los riesgos de mercado calculados en base a la fórmula estándar sin considerar el efecto reductor del riesgo de los contratos de reaseguro, y sin considerar la capacidad de absorción de las pérdidas futuras derivadas de los impuestos diferidos o de las modificaciones de las tasas de reparto.

Colateral la garantía que cubre la pérdida en relación con la contraparte.

En relación con el riesgo de intermediarios y otras exposiciones al crédito, el LGD se define como la mejor estimación (BE) del crédito a los intermediarios y a cualquier otra exposición del crédito.

La probabilidad de impago de la contraparte (PD) se obtiene a partir de los datos de agencias de *rating*. En la siguiente tabla se muestran las probabilidades de Standard & Poor's, que son las empleadas en QIS4.

Rating <sub>i</sub>	Categoría	PD <sub>i</sub>
AAA	1	0,002%
AA		0,01%
A	2	0,05%
BBB	3	0,24%
BB	4	1,20%
B	5	6,04%
CCC o inferior, no calificado	6	30,41%

En el caso de que para una misma exposición estén disponibles varias calificaciones crediticias se debe aplicar el segundo mejor *rating*. Además, los aseguradores

y reaseguradores no calificados y no sujetos a la regulación de Solvencia II serán tratados como clase 6, siendo equivalentes por tanto a los CCC o inferior. Sin embargo, en el caso de que estén sujetos a la regulación de Solvencia II serán tratados como clase 3 (BBB).

Para determinar el capital necesario para soportar el riesgo de contraparte<sup>87</sup> se efectúa un cálculo en tres etapas: a) cálculo de la concentración en reaseguro, derivados financieros, recibos de los intermediarios y otras exposiciones al crédito a partir del índice de concentración de Herfindahl, b) cálculo de los requerimientos de capital para cada contraparte, c) agregación.

*1º Paso: Cálculo de la concentración.* El índice de concentración de Herfindahl para las exposiciones al riesgo de la contraparte se calcula como<sup>88</sup>:

$$H = \frac{\sum_i LGD_i^2}{\left(\sum_i LGD_i\right)^2}$$

*2º Paso: Cálculo de los requerimientos de capital para cada contrapartida.* La correlación implícita entre cada contrapartida y el índice de concentración de Herfindahl del grupo al que pertenece (reaseguro, derivados financieros, intermediarios y otras exposiciones al crédito) se calcula como:

$$R_i = 0.5 + 0.5H_i$$

Para  $i$  = reaseguro, derivados financieros, intermediarios y otras exposiciones al crédito.

Posteriormente y en función de la correlación implícita se calculan las exigencias de capital para una determinada contrapartida ( $Def_i$ ) para una exposición  $i$ <sup>89</sup>. Las posibilidades son que la correlación implícita sea menor a 1 o igual a 1.

---

<sup>87</sup> Como resultados de este módulo se obtiene la carga de capital derivada del riesgo de la contraparte ( $SCR_{contraparte}$ ) y para el negocio de vida se obtendría también la carga de capital derivada del riesgo de la contraparte incluyendo los efectos reductores del riesgo derivados de la participación en beneficios futuros ( $nSCR_{contraparte}$ ). Por lo tanto, los cálculos de las cargas de capital se deben calcular suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros, es decir, que las tasas se mantienen constantes antes y después de un cambio en el impago de la contraparte derivado de los contratos de reducción del riesgo. De forma adicional se debe calcular el resultado del cálculo en el que las tasas de reparto se modifican como consecuencia del cambio en las tasas de reparto, dando como resultado la carga de capital  $nSCR_{contraparte}$ . Por diferencia entre ambas cargas de capital se recoge el efecto de la reducción del riesgo.

<sup>88</sup> Debe advertirse que existe una errata en el documento original que fue subsanado en el CEIOPS (2008b). En el documento original se establecía que se debía calcular el índice de concentración de forma separada para el reaseguro, derivados financieros, intermediarios así como otras exposiciones al crédito.

<sup>89</sup> Además, se establecen dos casos alternativos para el reaseguro interno intra grupo para un reasegurador  $i$  sin clasificación crediticia. En el primer caso la probabilidad de impago de la contraparte de  $i$  se

- Para una correlación implícita  $R_i$  menor a 1, la determinación de  $Def_i$  se obtiene en base a la distribución de Vasicek:

$$Def_i = LGD_i \cdot N \left( \left( \frac{N^{-1} \cdot (PD_i)}{\sqrt{1 - R_i}} \right) + N^{-1}(0,995) \cdot \sqrt{\frac{R_i}{1 - R_i}} \right)$$

Siendo

$N$  la función de distribución de la Normal (0,1) y  $N^{-1}$  su inversa.

Para una correlación implícita  $R_i$  igual a 1, la determinación de  $Def_i$  se obtiene basada en la fórmula

$$Def_i = LGD_i \cdot \min(100 \cdot PD_i; 1)$$

**3º Paso: Agregación.** Las cargas individuales de capital  $Def_i$  para las exposiciones de reaseguro, derivados financieros, intermediarios y otras exposiciones al crédito son sumadas algebraicamente para obtener el requerimiento de capital para el riesgo de crédito de la contraparte ( $SCR_{contraparte}$ ).

Se establece una simplificación para el cálculo de la carga de capital para el riesgo de contraparte siguiendo el principio de proporcionalidad. Las compañías aseguradoras pueden determinar la pérdida  $LGD_i$  y el requerimiento  $Def_i$  empleando clases de *rating* a nivel agregado, en vez de hacerlo a nivel individual para cada contraparte.

### Ejemplo. Riesgo de contraparte.

Supongamos que tenemos una exposición al riesgo de contraparte derivada de un reasegurador con los siguientes datos:

reemplaza por la proporción del reaseguro retrocedido por el reasegurador  $i$  al reasegurador  $j$  externo al grupo por la probabilidad de impago de la contraparte  $j$ . Para la proporción de reaseguro retenido por el reasegurador  $i$  debe emplearse la probabilidad de impago de la contraparte  $i$ . En el segundo caso, el caso del reaseguro que no cumpla el requisito anterior, se debe emplear el *rating* regulatorio para determinar la probabilidad de impago de la contraparte de la reaseguradora del grupo. De esta forma la probabilidad de impago viene derivada de la ratio de solvencia calculada como la proporción de fondos propios sobre el SCR, dependiendo sus valores en función de la siguiente tabla.

Ratio solvencia contraparte	> 200%	> 160%	> 130%	> 100%	> 70%	> 50%	≤ 50%
$PD_i$	0.002%	0.01%	0.05%	0.24%	1.20%	6.04%	30.41%

Rating	Recobrables (BE)	$SCR_{Asegurador}^{neto}$	$SCR_{Asegurador}^{bruto}$	Colateral
BBB	3.000 u.m.	500 u.m.	600 u.m.	1.100 u.m.

Por lo tanto la pérdida estimada dado el impago o loss-given-default  $LGD_i$  será de 1.000 u.m.

$$LGD_i = 50\% \max(3.000 + 600 - 500 - 1.100; 0) = 1.000$$

Dado que la probabilidad de impago ( $PD_i$ ) para un rating BBB es de 0,24% la Defi será de 240 u.m.

$$Def_i = 1.000 \cdot \min(100 \cdot 0,24\%; 1) = 1.000 \cdot 24\% = 240$$

Supongamos ahora que tenemos 4 contrapartes según lo expresado en la tabla inferior:

Contraparte	Rating	$LGD_i$
A	BBB	222,00
B	BBB	240,00
C	BB	278,00
D	BB	260,00

A partir de los anteriores datos podemos calcular el índice de concentración de Herfindahl que en este ejemplo es de 0,252 y por lo tanto R es de 0,626.

$$H = 251.768 / 1000^2 = 0,252$$

$$R = 0,5 + 0,5 \cdot 0,252 = 0,626$$

Contraparte	$LGD_i$	$LGD_i^2$
A	222	49.284
B	240	57.600
C	278	77.284
D	260	67.600
Suma	1.000	251.768

La tabla inferior establece las probabilidades de impago para cada contraparte y la carga de capital asociada a cada una de ellas.

Contraparte	LGD <sub>i</sub>	PD <sub>i</sub>	Def <sub>i</sub>
A	222,00	0,240%	22,30
B	240,00	0,240%	24,10
C	278,00	1,200%	100,07
D	260,00	1,200%	93,59
Suma			240,06

Por ejemplo  $Def_A$  es igual a:

$$Def_A = 222 \cdot N \left( \frac{N^{-1} \cdot (0,24\%)}{\sqrt{1 - 0,626}} \right) + N^{-1}(0,995) \cdot \sqrt{\frac{0,626}{1 - 0,626}} = 22,3$$

Sumando los  $Def_i$  para las cuatro contrapartes obtenemos la carga de capital por riesgo de contraparte, que es de 240,06 u.m. cantidad similar a la del ejemplo anterior. Por lo tanto la diversificación de contrapartes reduce el riesgo de contraparte.

Imaginemos ahora que empleamos el método simplificado en el que las cargas de capital se calculan de forma agregada para cada calificación de rating

Rating	LGD <sub>i</sub>	Nº de contrapartes
BBB	462	2
BB	538	2

El índice  $H$  se calcula ahora como  $H = \frac{502,888}{1000^2} = 50,29\%$ . Por lo que  $R = 0,5 + 0,5 \cdot 50,29\% = 75,14\%$ .

Empleando la distribución de Vasicek las cargas de capital obtenidas son las siguientes:

Rating	LGD <sub>i</sub>	PD	Def <sub>i</sub>
BBB	462	0,24%	55,17
BB	538	1,20%	258,56

Por lo tanto la carga de capital por riesgo de contraparte agregado es de 313,73 u.m. lo que es superior a la cantidad empleada en el enfoque desagregado o no simplificado.

Para calibrar este riesgo se realizaron estimaciones de la probabilidad de impago (PD) extraídas de Standard & Poor's (2006) y Moody's <sup>(2006)</sup>. Posteriormente se estimaron para cada una de las 17 categorías de rating (CR)<sup>90</sup> la probabilidad de impago (PD) en base a la categoría de rating a través de regresiones de tipo  $PD = \exp(a + b \cdot CR)$ . Sin embargo, se considero dicha clasificación era demasiado extensa por lo que se estimó la regresión para siete bloques de categorías de riesgo. Además, bajo la hipótesis de que las categorías de Moody's son comparables con las de Standard & Poor's se agregaron los impagos. Los siete bloques finalmente formados así como el número de impagos de Moody's, Standard & Poor's y el número agregado se muestran en la siguiente tabla.

Moody's		Standard and Poor's		Agregada
Categoría de rating	Nº de impagos	Categoría de rating	Nº de impago	Tasa de impago
Aaa	0	AAA	0	0
Aa	1	AA	1	1
A	2	A	4	3
Baa	21	BBB	27	24
Ba	131	BB	120	125
B	569	B	591	580
Caa-C	2098	CCC/C	3041	2570

Por lo tanto se realizó regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios para la ecuación  $PD = \exp(a + b \cdot CR)$ <sup>91</sup> para las categorías de riesgo equivalentes a AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC/C donde las puntuaciones otorgadas eran de 1 para AAA hasta 7 para CCC/C. Para dicha regresión se calcularon los coeficientes de regresión lineal R<sup>2</sup> mostrados en la siguiente tabla<sup>92</sup>.

<sup>90</sup> En el caso de S&P dichas categorías eran: AAA, AA+, AA, AA-, A+, A, A-, BBB+, BBB, BBB-, BB+,BB , BB-, B+, B, B-, CCC/C. La muestra empleada eran 11.605 compañías de todo el mundo pertenecientes al sector industrial, servicios públicos, servicios financieros y asegurador. En el caso de Moody's las categorías eran: Aaa, Aa1, Aa2, Aa3, A1, A2, A3, Baa1, Baa2, Baa3, Ba1, Ba2, Ba3, B1, B2, B3, Caa-C, siendo la muestra de 16.000 empresas.

<sup>91</sup> También se realizaron regresión no lineal y no lineal ponderada, que mejoraban el ajuste de la regresión lineal simple.

<sup>92</sup> El coeficiente R<sup>2</sup> es una medida de la bondad del ajuste para una regresión lineal que toma valores entre 0 y 1. De esta forma valores próximos a 1 indican un muy buen ajuste, mientras que valores próximos a 0 indican muy mal ajuste.

	<b>Moody's (7 categorías)</b>	<b>S&amp;P (7 categorías)</b>	<b>Agregada (7 categorías)</b>
$R^2$	0,9988	0,9887	0,9887

Por tanto, los resultados muestran que en principio se pueden emplear varias calibraciones basadas en las tasas de impago de Standard & Poor's o Moody's<sup>93</sup>. Sin embargo, debido a que el propósito de la fórmula estándar es proporcionar una técnica de prudencia se sugiere emplear las mayores tasas de impago publicadas por Standard & Poor's (véase la siguiente tabla).

<b>Rating<sub>i</sub></b>	<b>Categoría</b>	<b>PD<sub>i</sub></b>
AAA	1	0,002%
AA		0,01%
A	2	0,05%
BBB	3	0,24%
BB	4	1,20%
B	5	6,04%
<i>CCC o inferior, no calificado</i>	6, -	30,41%

Una vez revisado el modelo empleado en QIS4 estableceremos las dos diferencias respecto a QIS3. La primera reside en que en QIS3 se empleaba el coste de reemplazamiento de la contrapartida en caso de quiebra en vez de la pérdida LGD<sub>i</sub>. La segunda reside en una simplificación efectuada en el cálculo del SCR asociado al riesgo de la contraparte. De esta forma, en QIS3 se diferenciaba en la segunda etapa del cálculo de las exigencias de capital en función de tres valores de la correlación implícita. Para un valor de 0,5 se empleaba la distribución de Vasicek, para un valor de 1 se empleaba la fórmula que multiplicaba el coste de reemplazamiento (ahora LGD) por el mínimo entre la probabilidad de impago por cien y uno, y para un valor entre 0,5 y 1 se empleaba una interpolación lineal. Como hemos visto, en QIS4, este cálculo se simplifica, ya que para valores entre 0,5 y 1 también se emplea la distribución de Vasicek. En lo que respecta a las diferencias de QIS4 con el MES v.1, debe citarse que en el modelo español no se realizó un análisis de este riesgo, proponiéndose por tanto la fórmula estándar desarrollada en QIS3.

#### 5.4.4. Riesgo asegurador no vida ( $SCR_{no\ vida}$ )

El riesgo de suscripción no vida es el riesgo específico de las entidades aseguradoras derivado de los contratos de seguro. Este riesgo está relacionado con la incertidumbre acerca del resultado asegurador de una compañía. Esta incertidum-

<sup>93</sup> Además el ajuste para los datos de ambas agencias de rating para la clasificación basada en 17 categorías de rating proporciona coeficientes  $R^2$  superiores a 0,95 en ambos casos.

bre incluye: la cantidad y el calendario de los pagos posibles por siniestros en relación con los pasivos existentes, el volumen de negocio suscrito y las primas a las cuales debieran ser suscritas, y finalmente, las primas necesarias para cubrir los pasivos originados por el negocio suscrito.

La carga de capital para los riesgos aseguradores no vida ( $SCR_{novida}$ ) se obtiene agregando las cargas para los riesgos de primas y reservas ( $NV_{primas+reservas}$ ) y la carga para el riesgo catastrófico ( $NL_{CAT}$ ) suponiendo que dichos riesgos son independientes. Por lo tanto, para su cálculo se emplea la fórmula siguiente:

$$SCR_{novida} = \sqrt{\sum_{rxc} CorrNV^{rxc} \cdot NV_r \cdot NV_c}$$

Donde:

$CorrNV^{rxc}$  son las celdas de la matriz de correlación  $CorrNV$ .

$NV_r$  y  $NL_c$  son las cargas de capital de los subriesgos aseguradores.

En notación matricial la fórmula anterior se convierte en:

$$SCR_{novida} = \sqrt{NV \cdot \Sigma_{no\ vida} \cdot NV^t}$$

Siendo:

$NV$  es el vector que recoge los capitales propios asociados a cada uno de los riesgos individuales de no vida, es decir, el vector de dimensión  $1 \times 2$ , ( $NV_{primas+reservas}$ ,  $NV_{CAT}$ ) y  $NV^t$  el vector traspuesto de dimensión  $2 \times 1$

$\Sigma_{no\ vida}$  es la matriz de correlaciones de orden  $2 \times 2$  que recoge los coeficientes de correlación para los riesgos.

El riesgo de suscripción no vida se subdivide en riesgo de reserva y riesgo de prima. Además, debe añadirse el riesgo catastrófico que no está incluido en los dos riesgos anteriores.

El *riesgo de reserva* está relacionado con la incertidumbre derivada de la variabilidad de la provisión para prestaciones hasta la liquidación de todos los siniestros respecto a su valor esperado. Mediante el cálculo de la variabilidad se cuantifica la probabilidad de que ésta no sea suficiente para cubrir los siniestros en los que se ha incurrido. Este riesgo proviene de dos fuentes: el nivel absoluto de provisiones puede estar mal calculado, y segundo, debido a la naturaleza estocástica de los pagos por siniestros futuros, los siniestros fluctúan alrededor de su valor medio.

El *riesgo de primas* se refiere a los futuros siniestros que puedan surgir durante y después del período hasta el cual se realice el cálculo de la solvencia. Por tanto,

es el riesgo de que la prima imputada para el año de análisis no sea suficiente para afrontar los siniestros que ocurran durante el periodo de cobertura (siniestros incurridos en el año y siniestros que están por ocurrir y que deben estar recogidos en las provisiones) más los gastos necesarios para la gestión del negocio. El riesgo por prima está presente en el momento de emisión de la póliza, antes de que ocurra cualquier siniestro. El riesgo por primas se refiere a las pólizas a suscribir incluidas las renovaciones durante el periodo, y a los riesgos no expirados de los contratos existentes.

Para realizar el cálculo de los riesgos por primas y por reservas se debe segmentar el negocio por ramos (Lob). Se aplica la clasificación de la siguiente tabla<sup>94</sup>:

Número	Ramo
1	Automóviles responsabilidad civil
2	Automóviles otras garantías
3	Naval, aviación y transporte (Transporte de mercancías)
4	Incendios y otros daños a los bienes
5	Responsabilidad Civil
6	Crédito y caución
7	Defensa jurídica
8	Asistencia
9	Varios
10	Reaseguro no proporcional- <i>seguro propiedad</i>
11	Reaseguro no proporcional- <i>seguro personas</i>
12	Reaseguro no proporcional-MAT

Para considerar la diversificación geográfica, las compañías aseguradoras deben calcular el índice de Herfindahl basado en la localización geográfica de sus riesgos subyacentes para las primas y reservas. Si una compañía aseguradora tiene más del 95% de sus actividades medidas a través de primas y reservas en seguros no vida en la misma área geográfica, no se beneficiará de la diversificación geográfica. En este sentido las primas y las provisiones deben ser asignadas a las siguientes áreas geográficas<sup>95</sup>: cada país del Espacio Económico Europeo, Suiza, el resto de Europa, Asia (excluyendo Japón y China), Japón, China, Oceanía (excluyendo Australia), Australia, Norte América (excluyendo Canadá y los Estados Unidos), Canadá, Estados Unidos, cada país de Sur América, América Central y África.

<sup>94</sup> La segmentación es la misma que la aplicada en la valoración de las provisiones técnicas excluyendo los ramos de salud, para los que en términos del cálculo del SCR se tratan en el modulo específico de SCR de salud.

<sup>95</sup> Esta segmentación geográfica es propuesta a efectos del QIS4 pero será desarrollada con más énfasis posteriormente.

## A. Riesgo de primas y reservas

El capital necesario para el riesgo de primas y reservas se estima a través del producto de una función de la volatilidad por el nivel de exposición al riesgo:

$$NLp r = \rho(\sigma) \cdot V$$

Siendo:

$\rho(\sigma)$  una función de la volatilidad

$V$  el volumen de primas y reservas.

La función  $\rho(\sigma)$  equivale aproximadamente a tres desviaciones estándar. De este modo, una compañía que tenga una volatilidad de la ratio combinado de primas y reservas del 5%, la carga equivalente de capital se determinará de forma aproximada como  $\rho(\sigma) = 3 \times 0,05 = 0,15$  por el volumen. El valor exacto de la función de la volatilidad (0,13) se determina a partir de la siguiente ecuación:

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(N_{0,995} \cdot \sqrt{\ln(1+\sigma^2)}\right)}{\sqrt{(1+\sigma^2)}} - 1$$

La medida de volumen  $V$  y la desviación estándar  $\sigma$  global para la cartera no vida o agregada (primas y reservas) se determina en un proceso de tres etapas. En una primera etapa, para cada ramo individual se calcula la desviación estándar y la medida de volumen para los riesgos por primas y por reservas. En una segunda etapa se determina la diversificación geográfica para cada línea de negocio. Finalmente, en la tercera etapa se agregan las desviaciones estándar y las medidas de volumen para los riesgos por primas y por reservas individuales. De esta forma se deriva la medida de volumen global  $V$  y la desviación estándar global  $\sigma$ .

### 1º Etapa: Determinación de $V$ y $\sigma$ para cada ramo.

Para cada ramo individual (LOB), se deben calcular las siguientes medidas:

- $V(\text{primas}, j, \text{ramo})$  que es la medida de volumen en el área geográfica  $j$  para el riesgo de primas,
- $V(\text{reservas}, j, \text{ramo})$  que es la medida de volumen en el área geográfica  $j$  para el riesgo de reservas,
- $\sigma(\text{primas}, \text{ramo})$  que es la desviación estándar para el riesgo de primas,
- $\sigma(\text{reservas}, \text{ramo})$  que es la desviación estándar para el riesgo de reservas.

La medida de volumen en el área geográfica  $j$  para el riesgo de reservas para un ramo de negocio individual se determina como:

$$V_{(\text{reservas},j,\text{ramo})} = PSP_{j,\text{ramo}}$$

Siendo:

$PSP_{j,\text{ramo}}$  la mejor estimación para la provisión para prestaciones pendientes en el área geográfica  $j$  en cada uno de los ramos.

La medida de volumen en el área geográfica  $j$  para el riesgo de primas para un ramo de negocio individual se determina como:

$$V_{(\text{primas},j,\text{ramo})} = \max(P_{\text{ramo}}^{f,\text{suscritas}}, P_{\text{ramo}}^{f,\text{ganadas}}, 1,05 \cdot P_{\text{ramo}}^{f-1,\text{suscritas}})$$

Siendo:

$P_{\text{ramo}}^{f,\text{suscritas}}$  la estimación de las primas netas suscritas en el próximo año en el área geográfica  $j$  en ese ramo,

$P_{\text{ramo}}^{f,\text{ganadas}}$  la estimación de las primas netas ganadas en el próximo año en el área geográfica  $j$  en ese ramo,

$P_{\text{ramo}}^{f-1,\text{suscritas}}$  la estimación de las primas netas suscritas en el año anterior en el área geográfica  $j$  en ese ramo  $P_{\text{ramo}}^{f,\text{suscritas}}$ .

La desviación estándar para el riesgo de reservas  $\sigma_{(\text{reservas},\text{ramo})}$  para cada ramo se determina en base a la siguiente tabla.

Ramo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_{(\text{reservas},\text{ramo})}$	12%	7%	10%	10%	15%	15%	10%	10%	10%	15%	15%	15%

La desviación estándar para el riesgo de primas para cada ramo  $\sigma_{(\text{primas},\text{ramo})}$  se deriva en función de la credibilidad, de la estimación específica de la empresa y del mercado, empleando la fórmula siguiente:

$$\sigma_{(\text{primas},\text{ramo})} = \sqrt{c_{\text{ramo}} \cdot \sigma_{(A,\text{primas},\text{ramo})}^2 + (1 - c_{\text{lob}}) \cdot \sigma_{(M,\text{primas},\text{ramo})}^2}$$

Siendo:

$c_{\text{ramo}}$  el factor de credibilidad para el ramo,

$\sigma_{(A,\text{primas},\text{ramo})}^2$  la estimación de la aseguradora de la desviación estándar para el riesgo por primas,

$\sigma_{(M,\text{primas},\text{ramo})}^2$  la estimación del mercado de la desviación estándar para el riesgo por primas.

La estimación del mercado  $\sigma_{(M,primas,ramo)}^2$  de la desviación estándar para el riesgo de primas para un ramo individual se determina a partir de la siguiente tabla.

LOB =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_{(M,primas,ramo)}$	9%	9%	12.5%	10%	12.5%	15%	5%	7.5%	11%	15%	15%	15%

El factor de credibilidad histórico  $c_{ramo}$  se determina a partir de la siguiente tabla.

		Número de años históricos para los cuales existen datos (excluyendo los 3 primeros años desde su puesta en marcha)														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Máximo valor $n_{ramo}$	15	0	0	0	0	0	0	0,64	0,67	0,69	0,71	0,73	0,75	0,76	0,78	0,79
	10	0	0	0	0	0,64	0,69	0,72	0,74	0,76	0,79	-	-	-	-	-
	5	0	0	0,64	0,72	0,79	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

La estimación específica de la empresa de la desviación estándar  $\sigma_{(A,primas,ramo)}$  para el riesgo por primas se determina en base a la volatilidad histórica de la ratio de siniestralidad (*loss ratio*) empleando la fórmula siguiente:

$$\sigma_{(A,primas,ramo)} = \sqrt{\frac{1}{(n_{ramo} - 1) \cdot V_{(primas,ramo)}} \cdot \sum_y P_{ramo}^{y, ganadas} \cdot (LR_{ramo}^y - \mu_{ramo})^2}$$

Donde:

$\mu_{ramo}$  es la estimación específica de la compañía del valor esperado de la ratio de siniestralidad de un ramo, definida como la media ponderada histórica de la ratio de siniestralidad calculada sin considerar la diversificación geográfica de cada ramo, es decir:

$$\mu_{ramo} = \frac{\sum_y P_{ramo}^{y, ganadas} \cdot LR_{ramo}^y}{\sum_y P_{ramo}^{y, ganadas}}$$

$$P_{ramo}^{y, ganadas} \text{ es igual a } \sum_j P_{j,ramo}^{y, ganadas}$$

$n_{ramo}$  es el número de años históricos para el cual se tienen datos (5, 10 o 15 años dependiendo del ramo).

$LR_{ramo}^y$  es la ratio de siniestralidad neta para cada ramo y para los años históricos  $y = t-1, t-2, \dots, t-n$ .

La desviación estándar para el riesgo de reservas y de primas para un ramo se define agregando la desviación estándar de ambos subriesgos bajo la hipótesis de un coeficiente de correlación lineal de 0,5, es decir:

$$\sigma_{(\text{ramo})} = \frac{\sqrt{(\sigma_{(\text{primas,ramo})} \cdot V_{(\text{primas,ramo})})^2 + \sigma_{(\text{primas,ramo})} \cdot \sigma_{(\text{reservas,ramo})} \cdot V_{(\text{primas,ramo})} \cdot V_{(\text{reservas,ramo})} + (\sigma_{(\text{reservas,ramo})} \cdot V_{(\text{reservas,ramo})})^2}}{(V_{(\text{primas,ramo})} + V_{(\text{reservas,ramo})})}$$

## 2º Etapa: diversificación geográfica

La diversificación geográfica se debe calcular para todos los ramos excepto el relativo a Otros y Crédito y Caución. Se debe calcular el índice de Herfindahl para las primas y reservas de cada ramo de negocio de la forma siguiente:

$$DIV_{\text{primas+reservas,ramo}} = \frac{\sum_j (V_{(\text{primas,j,ramo})} + V_{(\text{reservas,j,ramo})})^2}{\left( \sum_j (V_{(\text{primas,j,ramo})} + V_{(\text{reservas,j,ramo})}) \right)^2}$$

Donde la suma de las primas y reservas se realiza sobre el negocio no vida de la compañía y  $j$  es el índice de cada área geográfica.

El volumen total  $V$  se determina a partir de la formula siguiente:

$$V = \sum_{\text{ramo}} V_{\text{ramo}}$$

Donde para cada uno de los ramos  $V_{\text{ramo}}$  es la medida de volumen diversificada para el riesgo de primas y reservas calculado conforme a:

$$V_{\text{ramo}} = (V_{(\text{primas,ramo})} + V_{(\text{reservas,ramo})}) \cdot (0.75 + 0.25 \cdot DIV_{\text{primas+reservas,ramo}})$$

Donde para cada uno de los ramos  $V_{(\text{primas,ramo})}$  y  $V_{(\text{reservas,ramo})}$  son las medidas de volumen de los riesgos de primas y de reservas definidas de la siguiente forma:

$$V_{(\text{primas,ramo})} = \sum_j V_{(\text{primas,j,ramo})} \quad \text{y} \quad V_{(\text{reservas,ramo})} = \sum_j V_{(\text{reservas,j,ramo})}$$

**3º Etapa: Cálculo de las medidas totales o globales de volumen y de desviación estándar.**

La desviación estándar total  $\sigma$  se determina a partir de la siguiente expresión:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \cdot \sum_{r,c} \text{CorrRamo}_{r,c} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c \cdot V_r \cdot V_c}$$

Donde:

$r, c$  son los volúmenes de dos ramos de negocio.

$CorrRamo_{r \times c}$  son las celdas de la matriz de correlación CorrRamo.

$V_r, V_c$  son las medidas de volumen para los ramos individuales<sup>96</sup>.

La matriz de correlación (CorrRamo) empleada es la mostrada en la siguiente tabla.

CorrRamo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1											
2	0,5	1										
3	0,5	0,25	1									
4	0,25	0,25	0,25	1								
5	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1		
11	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	
12	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	1

### Ejemplo. Riesgo asegurador no vida sin diversificación geográfica.

Supongamos una compañía que opera exclusivamente en España en los ramos de autos (Nº1) y Responsabilidad Civil (Nº5) con los volúmenes de primas y provisiones que figuran en el cuadro siguiente. Al no beneficiarse de la diversificación geográfica, el volumen que deben utilizar para calcular la carga de capital será igual a la suma de primas y provisiones en cada ramo.

<sup>96</sup> Conforme a la definición del paso 2.

1. Determinación de la variable volumen.

	<b>Autos(1)</b>	<b>R.C. (5)</b>
Primas suscritas/ganadas esperadas ramo i	1000	500
Provisiones ( <i>best estimate</i> )	800	600
Volumen total por ramo	1800	1100

2. Determinación de la volatilidad de cada ramo.

Las volatilidades de mercado para las primas son proporcionadas por QIS4 y ascienden al 9% y 12,50% respectivamente para cada ramo, mientras que la volatilidad propia del *loss ratio* calculada por la compañía es igual a 8% y 11%. Por otra parte, como la compañía utiliza el número de años máximos permitidos para el cálculo de la volatilidad, es decir 15 años, la ponderación o credibilidad que puede utilizar para su volatilidad es del 79%.

	Primas				Reservas	Primas + Reservas
	Mercado (QIS4)	Propia	Ponderación	Volatilidad primas	Volatilidad reservas	Volatilidad ramo
	$\sigma_{(M,primas,ramo)}^2$	$\sigma_{(A,primas,ramo)}^2$	$C_{ramo}$	$\sigma_{(primas,ramo)}$	$\sigma_{(reservas,ramo)}$	$\sigma_{(ramo)}$
<b>Autos</b>	9%	8%	0,79	8,22%	12%	8,58%
<b>RC</b>	12,50%	11%	0,79	11,33%	15%	11,65%

Como podemos observar, la volatilidad del ramo de autos es igual a 8,22% y es el resultado de aplicar la fórmula:

$$\begin{aligned}\sigma_{(primas,autos)} &= \sqrt{C_{ramo} \cdot \sigma_{(A,primas,autos)}^2 + (1 - C_{lob}) \cdot \sigma_{(M,primas,autos)}^2} \\ &= \sqrt{0,79 \times 0,08^2 + (1 - 0,79) \times 0,09^2} = 0,0822\end{aligned}$$

La volatilidad del ramo de RC es igual a 11,33% y es el resultado de aplicar la fórmula:

$$\sigma_{(primas,RC)} = \sqrt{0,79 \times 0,11^2 + (1 - 0,79) \times 0,125^2} = 0,1133$$

La volatilidad de las provisiones es proporcionada por QIS4 y para estos dos ramos es del 12% y 15% respectivamente. Finalmente, el cálculo de la volatilidad agregada para cada ramo se determina a partir de la siguientes ecuaciones, ya que se considera una correlación de 0,5 entre ambos subriesgos :

$$\sigma_{(ramo)} = \frac{\sqrt{(\sigma_{(primas,ramo)} \cdot V_{(primas,ramo)})^2 + \sigma_{(primas,ramo)} \cdot \sigma_{(reservas,ramo)} \cdot V_{(primas,ramo)} \cdot V_{(reservas,ramo)} + (\sigma_{(reservas,ramo)} \cdot V_{(reservas,ramo)})^2}}{(V_{(primas,ramo)} + V_{(reservas,ramo)})}$$

$$\sigma_{(autos)} = \frac{\sqrt{(8,22\% \cdot 1.000)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 8,22\% \cdot 12\% \cdot 1.000 \cdot 800 + (12\% \cdot 800)^2}}{(1.000+800)} = 0,0858$$

$$\sigma_{(RC)} = \frac{\sqrt{(11,33\% \cdot 5000)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 11,33\% \cdot 15\% \cdot 500 \cdot 600 + (15\% \cdot 600)^2}}{(500+600)} = 0,1165$$

De este modo, resultan unos valores de volatilidad de 8,58% para el ramo de autos y 11,65% para el ramo de responsabilidad civil.

### 3. Determinación de la volatilidad global

El siguiente paso consiste en calcular la volatilidad global, que consistiría nuevamente en aplicar la fórmula anterior, ya que las ponderaciones para el caso de los ramos analizamos también son iguales a 0,5. En este caso, la volatilidad global para los dos ramos sería igual a:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{V^2} \cdot \sum_{r \times c} CorrRamo_{r,c} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c \cdot V_r \cdot V_c}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2.900^2} \cdot \left[ (154,48 \quad 128,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 154,48 \\ 128,1 \end{pmatrix} \right]} = 0,0845$$

Por lo tanto la volatilidad global agregada de la compañía es del 8,45%.

	<b>Autos(1)</b>	<b>R.C. (5)</b>
<b>Volumen total por ramo</b>	1800	1100
$\sigma_{(ramo)}$	8,58%	11,65%
<b>Volumen x <math>\sigma_{(ramo)}</math></b>	154,48	128,1

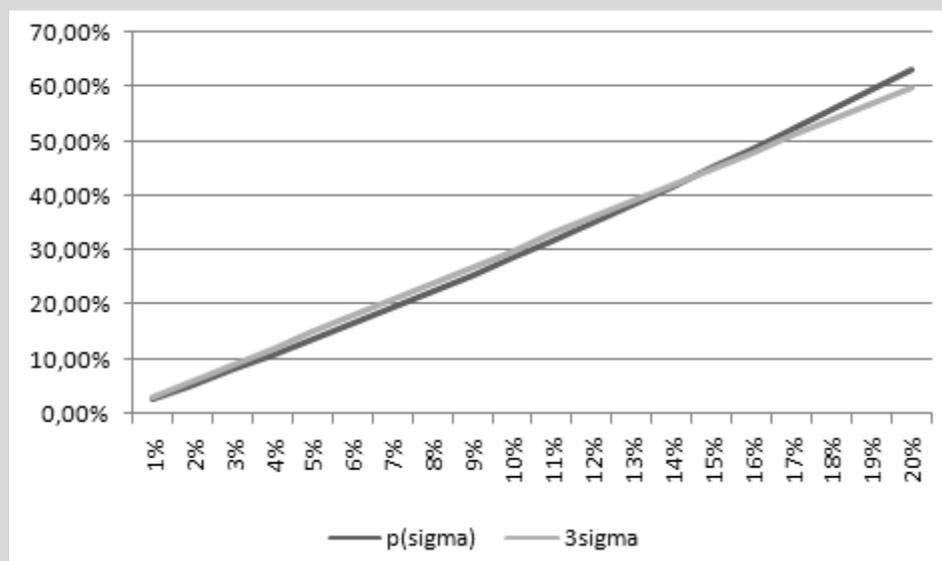
### 4. Determinación de la carga de capital

Como indicamos anteriormente, la carga de capital es igual al producto de la función de volatilidad global por el volumen  $NL_{pr} = \rho(\sigma) \cdot V$ . En este caso la carga de capital se calcula como:

$$NL_{pr} = \left( \frac{\exp(N_{0,995} \cdot \sqrt{\ln(1+0,0845^2)})}{\sqrt{(1+0,0845^2)}} - 1 \right) \cdot 2900 = 692,32 \text{ u.m.}$$

Por lo tanto la empresa tendrá una carga de capital de 692,32 u.m. derivadas del riesgo asegurador no vida. Como se puede apreciar la función de la volatilidad

toma el valor de 23,83% lo que es aproximadamente 3 veces la desviación típica de la volatilidad global como se puede mostrar en el gráfico inferior.



### Ejemplo. Riesgo asegurador no vida con diversificación geográfica.

Analizaremos ahora el efecto diversificación geográfica sobre el riesgo de una compañía de seguros no vida. Para ello supondremos una compañía comparable a la del ejemplo anterior pero que opera en dos países en el ramo de Autos, con la diferencia de que las primas y las provisiones en cada país para este ramo son ligeramente superiores. El cuadro inferior resume esta información.

	Autos A+B (1)	País A	País B	R.C. (5)
<b>Primas suscritas/ganadas esperadas ramo <i>i</i></b>	1.200	600	600	500
<b>Provisiones (best estimate)</b>	875	440	435	600
<b>Volumen total por ramo</b>	1.815,63			1.100

#### 1. Determinación de la variable volumen

A diferencia del ejemplo anterior, ahora se considera la diversificación geográfica ya que opera en más de un país de los considerados en QIS4. Por lo tanto debemos calcular el índice de diversificación geográfica para el ramo auto y así determinar su volumen.

	$V_{primas,j}$	$V_{reservas,j}$	$V_j$	$V_j^2$
<b>País A</b>	600	440	1.040	1.081.600
<b>País B</b>	600	435	1.035	1.071.225
<b>Suma</b>	1.200	875		2.152.825

$$DIV_{primas+reservas,auto} = \frac{\sum_j (V_{(primas,j,auto)} + V_{(reservas,j,auto)})^2}{\left( \sum_j (V_{(primas,j,auto)} + V_{(reservas,j,auto)}) \right)^2} = \frac{2.152.825}{(1.200+875)^2} = 50\%$$

Por lo que la medida de volumen para el ramo de auto se calcula mediante:

$$V_{auto} = (V_{(primas, auto)} + V_{(reservas, auto)}) \times (0,75 + 0,25 \times DIV_{primas+reservas, auto}) = \\ = (1.200 + 875) \times (0,75 + 0,25 \times 0,5) = 1.815,63 \text{ u.m.}$$

Y dado que  $V_{RC}$  continúa siendo igual al caso sin diversificación (1.100 u.m.) el Volumen agregado ( $V$ ) de la compañía es de 2.915,63 u.m.

## 2. Determinación de la volatilidad de cada ramo.

Si suponemos que la volatilidad de primas de la compañía derivada de su *loss ratio* no varía, entonces las volatilidades de las primas y de las provisiones serán idénticas a las del ejemplo anterior.

	Primas				Reservas	Primas + Reservas
	Mercado (QIS4)	Propia	Ponderación	Volatilidad primas	Volatilidad reservas	Volatilidad ramo
	$\sigma_{(M,primas,ramo)}^2$	$\sigma_{(A,primas,ramo)}^2$	$C_{ramo}$	$\sigma_{(primas,ramo)}$	$\sigma_{(reservas,ramo)}$	$\sigma_{(ramo)}$
<b>Autos</b>	9%	8%	0,79	8,22%	12%	8,5%
<b>RC</b>	12,50%	11%	0,79	11,33%	15%	11,65%

Sin embargo para el ramo de autos debe ser considerada el aumento global en el volumen que pasa a ser de 1.200 u.m. en primas y 875 u.m. en reservas por lo que el nuevo cálculo se realiza como:

$$\sigma_{(autos)} = \frac{\sqrt{(8,22\% \cdot 1.200)^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 8,22\% \cdot 12\% \cdot 1.200 \cdot 875 + (12\% \cdot 875)^2}}{(1.200 + 875)} = 0,085$$

Posteriormente debiéramos determinar la volatilidad global que en este caso es del 8,4%, conforme a la siguiente fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2.915,63^2} \cdot \begin{pmatrix} 154,34 & 128,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 154,34 \\ 128,1 \end{pmatrix}} = 0,084$$

	<b>Autos(1)</b>	<b>R.C. (5)</b>
<b>Volumen total por ramo</b>	1.815,63	1.100
$\sigma_{(ramo)}$	8,5%	11,65%
<b>Volumen × <math>\sigma_{(ramo)}</math></b>	154,34	128,1

Por lo tanto  $\rho(\sigma)=23,68\%$  y como el Volumen global (V) era de 2.915,63 u.m. la carga de capital para esta hipotética compañía será de 690,34 u.m. algo inferior a la del ejemplo sin diversificación. Por lo tanto la diversificación geográfica reduce los requisitos de capital para el riesgo asegurador no vida.

La principal diferencia respecto a QIS3 de la fórmula general para determinar el capital necesario para cubrir el riesgo de primas y de reservas, es el cálculo del índice de concentración en QIS4. Así, las compañías diversificadas en distintas áreas geográficas gozarán de un beneficio por diversificación. En QIS3 dicho beneficio no se consideraba, de forma que las compañías determinaban su capital únicamente por medio de los pasos de determinación del volumen y desviación para cada ramo y del paso del cálculo del volumen y desviación global. Además de esta diferencia fundamental, se han producido otras diferencias como son la modificación de los valores de la desviación estándar para el riesgo de reservas y el cálculo del factor de credibilidad para el cálculo de la desviación típica por riesgo de primas.

En QIS4 se han modificado los valores de la desviación estándar para el riesgo de reservas para cada uno de los ramos. Además, bajo QIS3 se establecía una segmentación en 15 ramos, frente a la segmentación en 12 ramos de QIS4. En QIS3 dichos factores eran los mostrados en la siguiente tabla.

Ramo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma_{(reservas,ramo)}$	15%	7,5%	15%	12,5%	7,5%	15%	10%	15%	10%	10%	10%	15%	15%	20%	20%

En QIS4 se simplifica el cálculo del factor de credibilidad para el cálculo de la desviación típica por riesgo de primas a partir del estimador del mercado y de la compañía. En QIS3 el factor de credibilidad histórico  $c_{ramo}$  se determinaba a partir de la siguiente fórmula:

$$c_{ramo} = \begin{cases} \frac{n_{ramo}}{n_{ramo} + k_{ramo}} & \text{si } n_{ramo} \geq 7 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

En donde  $n_{\text{ramo}}$  es el número de ratios históricas disponibles, con un máximo de 15, y  $k_{\text{ramo}}$  es la constante de credibilidad propia de cada ramo.

Para la estimación de la volatilidad de mercado de primas y reservas en QIS4 se ajustaron los parámetros de QIS3 para reflejar mejor el riesgo relativo de cada ramo. Para el riesgo de primas la recalibración se ha basado en la información recabada de los modelos internos presentados en QIS3, los resultados de los regímenes regulatorios actuales e información de mercado de Reino Unido, Portugal y Países Bajos. En QIS3 ( $\sigma_{(M, \text{primas}, \text{ramo})}$ ) se emplearon las estimaciones de la volatilidad de las ratios históricas de siniestralidad para el mercado alemán. Además, para conseguir una calibración más refinada en el ramo “Accidente y salud”, este se subdividió en tres: a) contratos de pensiones para trabajadores (WC) para el que se emplearon datos del mercado asegurador portugués, b) salud para el que se emplearon datos del mercado francés y c) resto para el que se emplearon como punto de partida los datos de QIS2<sup>97</sup>.

La calibración de la desviación típica de mercado del riesgo de reservas ( $\sigma_{(\text{reservas}, \text{ramo})}$ ) se efectuó en QIS3 para los ramos de auto RC y RC para datos del mercado británico siguiendo una técnica similar a la de la volatilidad de mercado de primas, para salud los datos fueron del mercado francés, mientras que para el resto de datos se consideraron como primera aproximación los datos usados en QIS2 ajustados a la baja.

En lo referente a las diferencias respecto MES v.1, a semejanza del QIS3, la principal diferencia de la fórmula general es el cálculo del índice de concentración en QIS4. Sin embargo, el MES v.1 intentó calibrar los factores a aplicar para el cálculo del requisito de capital de manera consistente con el mercado asegurador español. Para ello el riesgo de suscripción no vida en MES v.1 se subdivide en riesgo de reserva y riesgo de primas. El subriesgo catastrófico no fue tratado en MES v.1 quedando pendiente de un análisis adicional junto con el Consorcio de Compensación de Seguros.

El riesgo de reserva ha sido calculado mediante una técnica de proyección aplicando el método Chain Ladder con *bootstrap*, lo que permite obtener la variabilidad de las reservas realizando numerosas simulaciones aleatorias a partir de la información histórica. Esta técnica permite definir el riesgo de reserva como la diferencia entre el valor de la distribución para un nivel de confianza del 99,5% (percentil 99,5% o caso adverso) y la mejor estimación o media de la provisión de prestaciones. Los factores para cada línea de negocio, se obtuvieron de dividir el capital económico requerido<sup>98</sup> (bruto o neto) entre el la mejor estimación de la provisión de prestaciones (bruta o neta).

---

<sup>97</sup> La técnica concreta para su obtención puede verse en Alonso y Albarrán (2007) pág. 193 y 194 o en CEIOPS (2007d) pág. 13 y14.

<sup>98</sup> El capital económico debe ser proyectado hasta su liquidación a través de un patrón de pagos y descontado a la tasa libre de riesgo.

Para el cálculo del riesgo de primas se dividió el análisis de los siniestros en tres categorías en base al análisis de las cuantías de los siniestros individuales<sup>99</sup>: siniestros normales (brutos y netos), graves (brutos y netos) y muy graves (brutos y netos). Posteriormente, se modelizaron los siniestros mediante simulación de Monte Carlo obteniéndose la función de distribución del coste de los siniestros<sup>100</sup>, lo que permite derivar el capital económico como la diferencia entre el percentil 99,5% y la mejor estimación. Los factores que determinan el capital económico necesario<sup>101</sup> para cubrir el riesgo de primas se obtuvieron para cada línea de negocio como resultado de dividir el capital económico requerido (bruto o neto) entre las primas imputadas al período (brutas o netas).

### B. Riesgo catastrófico de no vida ( $NV_{CAT}$ )

Los riesgos catastróficos surgen de eventos extremos o irregulares que no son lo suficientemente capturados por las cargas de capital asociados a los riesgos de primas y de reservas. El submódulo de riesgo catastrófico puede ser calculado a partir de dos métodos alternativos: método estándar y el empleo de escenarios personalizados<sup>102</sup>, además de forma opcional las compañías aseguradoras pueden emplear escenarios personalizados de acuerdo con la clase de negocio suscrito y su concentración geográfica.

#### Método 1: Empleo de la fórmula estándar

La carga de capital para el riesgo catastrófico de no vida se calcula a partir de la fórmula siguiente:

$$NV_{CAT} = \sqrt{\left( \sum_{t=3,4,10,12} (c_t \times P_t)^2 + (c_3 \times P_3 + c_{12} \times P_{12})^2 + (c_4 \times P_4 + c_{10} \times P_{10})^2 \right)}$$

<sup>99</sup> A modo de ejemplo, para el ramo de auto la cantidad mínima y máxima de las cuantías de siniestro para considerar un siniestro normal fue de 0€ – 100.000€, para considerarlo grave fue de 100.000€ – 600.000€ y para considerarlo muy grave fue de 600.000€ – 10.000.000€.

<sup>100</sup> Los siniestros normales se modelizaron a través de la frecuencia relativa y el coste medio. La frecuencia relativa de los siniestros normales se definió como el número de siniestros dividido por la exposición de la cartera al riesgo, mientras que el coste medio de los siniestros se definió como el coste último estimado dividido entre el número total de siniestros ocurridos en el año de análisis. De esta forma, para cada una de las simulaciones efectuadas el coste último es el resultado de la siguiente fórmula: Coste último = Frecuencia x Coste medio x Exposición. Las funciones de distribución empleadas para la frecuencia y para el coste fueron una Gamma.

Los siniestros graves y muy graves se modelizaron a través del número de siniestros y cuantía individual de los siniestros. El número de siniestros graves han sido modelado a través de una distribución de Poisson, mientras que para la cuantía de los siniestros graves ha sido modelada a través de la distribución de mejor ajuste a las siguientes funciones de distribución: Log-Normal, Pareto, *Extreme Value* y Weibull.

<sup>101</sup> El capital económico se calcula como diferencia entre el valor del percentil al nivel de confianza 99,5% y la mejor estimación de la siniestralidad para el año de vigencia. Dicho capital debe ser proyectado hasta su liquidación a través de un patrón de pagos y descontado a la tasa libre de riesgo.

<sup>102</sup> La fórmula estándar debe emplearse en el caso de que no sean proporcionados escenarios particulares. En el caso de que el organismo supervisor local proporcione escenarios regionales sobre catástrofes naturales y catástrofes ocasionadas por el hombre, las aseguradoras deberán emplear este método.

Donde  $P_t$  son las primas suscritas en el período  $t$  y el factor  $c_t$  viene dado en función de cada ramo según la siguiente tabla.

Ramo $t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$c_t$	0,15	0,075	0,5	0,75	0,15	0,6	0,02	0,02	0,25	1,5	0,5	1,5

### **Método 2: Empleo de escenarios**

Las compañías aseguradoras deben emplear los escenarios regionales proporcionados por el supervisor local para cada una de las regiones en las cuales tenga exposiciones materiales. En QIS4 no se han desarrollado escenarios transregionales o escenarios que para un evento catastrófico impacten simultáneamente en más de una región, por lo que los escenarios regionales deben considerarse independientes los unos de otros. En España se han prescrito escenarios regionales para distintas líneas de negocio (véase la siguiente tabla).

Ramo de negocio	Escenario	Pérdida de mercado estimada
Accidente	Colisión de dos Airbus A380 llenos de pasajeros españoles sobre una zona industrializada con elevada población.	293.000.000 €.
Automóvil RC	Colisión de dos vehículos en un túnel. Daños sobre las personas (muertos y heridos de diferente intensidad).	211.000.000 €
Automóvil Otro	Granizada de fuerte intensidad sobre un área llena de vehículos.	2,50% de las primas de este ramo.
Incendio y otros daños materiales	Tormenta ciclónica que atraviesa España con fuertes ráfagas de viento y daños muy propagados.	6% de las primas ganadas. Además se debe añadir el 50% de las primas de todo riesgo de construcción y un 5% de la suma asegurada de los invernaderos.

Las compañías que operen en más de una región pueden emplear escenarios personalizados transregionales aplicando el método 3. Las aseguradoras deben aplicar el método estándar o método 1 a las líneas de negocio no tratadas en este método.

### **Método 3 u Opcional: Escenarios personalizados**

Este método debe ser elegido por las compañías cuando la calibración obtenida bajo los métodos 1 o 2 no sea considerada representativa de su exposición al riesgo. Por tanto, el método de los escenarios personalizados permite a la compañía proponer su propia calibración basada en sus negocios. Estos escenarios

particulares pueden incluir el desarrollo de un modelo interno total o parcial, en el que se pueden emplear modelos comerciales de catástrofes.

La carga de capital para riesgo catastrófico en seguros no vida se determina como:

$$NL_{CAT} = \sqrt{\sum_i CAT_i^2}$$

Donde  $CAT_i$  es el coste de una catástrofe  $i$  específica que excede el límite material fijado como el 25% del coste del peor de los escenarios.

Las empresas deben considerar el escenario más severo y adicionalmente cualquier otro escenario cuyo coste exceda el 25% del coste del escenario más severo. Para cada uno de los escenarios especificados, las empresas deben estimar el coste  $CAT_i$  de cada escenario, midiendo el efecto en el valor neto de los activos y pasivos, y si dicho coste excede el límite. Para los escenarios regionales el cálculo de los  $CAT_i$  y la agregación de los mismos debe realizarse siguiendo las especificaciones del regulador local.

#### **Ejemplo. Riesgo catastrófico según el método estándar.**

Supongamos una compañía que opera en los siguientes ramos y con el siguiente volumen de primas suscritas esperado para el próximo año.

No	Ramo	Primas suscritas	Factor $c_t$	Cargas
5	Responsabilidad Civil	1.000	0,15	150
6	Crédito y caución	500	0,6	300

Por lo que la carga de capital para riesgo catastrófico se calcula como

$$NV_{CAT} = \sqrt{150^2 + 300^2} = 335,41$$

Además si suponemos que dicha compañía tiene una carga de capital para el riesgo asegurador no catastrófico o riesgo de primas y reservas de 900 u.m. la carga de capital para el riesgo asegurador de vida se calcula asumiendo independencia entre ambos riesgos como:

$$SCR_{novida} = \sqrt{900^2 + 335,41^2} = 960,47 \text{ u.m.}$$

En QIS3 muchas compañías expresaron que el cálculo de la carga de capital por riesgo catastrófico era inconsistente con la realizada por sus modelos internos. Por lo tanto en QIS4 se ha recalibrado el riesgo teniendo en cuenta los resultados de QIS3 y comparándola con un conjunto de más de 20 aseguradoras bajo la supervisión del Reino Unido.

En lo relativo a las diferencias del QIS4 respecto al modelo español de solvencia debemos decir que el subriesgo catastrófico no fue tratado en MES v.1, quedando pendiente de un análisis adicional junto con el Consorcio de Compensación de Seguros. Por otra parte, en QIS:3 el cálculo del capital asociado también se calculaba como la suma de los costes de cada catástrofe al cuadrado, fijándose también el límite en el 25% del coste de los peores escenarios.

#### 5.4.5. El riesgo operacional ( $SCR_{operacional}$ )

El riesgo operacional u operativo es el riesgo de pérdidas derivadas de procesos internos inadecuados, personal, sistemas o sucesos externos. El riesgo operacional incluye también el riesgo legal pero excluye el riesgo asociado a las pérdidas en la reputación o al derivado de malas decisiones estratégicas. El módulo de riesgo operacional se diseña para cubrir los riesgos operacionales en el sentido en que no han sido explícitamente cubiertos en otros módulos. La carga de capital por riesgo operativo  $SCR_{operacional}$  se calcula en función de parámetros de primas, provisiones técnicas y gastos en productos *unit-linked*. Además, en línea la Propuesta de Directiva de Solvencia II, se establece un límite superior o máximo de un 30% del BSCR. La fórmula para el cálculo de la carga de capital operativo en QIS4 es la siguiente:

$$SCR_{operacional} = \min(0,30 \cdot BSCR; Op) + 0,25 \cdot Gastos_{ul}$$

Siendo:

$Gastos_{ul}$  la cantidad anual de gastos (brutos de reaseguro) incurridos en el negocio *unit-linked*<sup>103</sup>.

BSCR el SCR básico.

$Op$  la carga de capital básico operacional para todos los riesgos excepto el negocio *unit-linked* (brutos de reaseguro).

El cálculo de la carga de capital básico operacional se realiza mediante la fórmula siguiente:

$$Op = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,03 \cdot (PB_V - PB_{V-ul}) + 0,02 \cdot PB_{NV} + 0,02 \cdot PB_S \\ 0,003 \cdot (PT_V - PT_{V-ul}) + 0,02 \cdot PT_{NV} + 0,002 \cdot PT_S \end{array} \right\}$$

Donde:

$PB_V$  es la prima bruta devengada total en el negocio de vida,

$PB_{V-ul}$  es la prima bruta devengada total en el negocio *unit-linked*,

<sup>103</sup> Se deben emplear los gastos administrativos basados en los últimos años.

$PB_{NV}$  es la prima bruta devengada total en el negocio de no vida,  
 $PB_S$  es la prima bruta devengada total en el negocio de salud,  
 $PT_V$  son las provisiones técnicas brutas totales del seguro de vida,  
 $PT_{V-ul}$  son las provisiones técnicas brutas totales del seguro *unit-linked*,  
 $PT_{NV}$  son las provisiones técnicas brutas totales del seguro no vida,  
 $PT_S$  son las provisiones técnicas brutas totales del seguro no salud no vida.

### Ejemplo. Cálculo del riesgo operacional.

Supongamos una compañía de seguros no vida con los siguientes valores

Concepto	Valor
Provisiones Técnicas Totales de No Vida	2.250
Primas Imputadas Brutas totales de no vida	3.500
BSCR	200

Debemos calcular el Riesgo operacional básico antes de aplicar el máximo absoluto derivado del SCR en base a la mayor cantidad entre:

Resultado basado en Provisiones Técnicas =  $2.250 \times 2,0\% = 45$

Primas Imputadas Brutas totales de no vida =  $3.500 \times 2,0\% = 70$

Por la carga de capital básico operacional es de 70 u.m. que debemos comparar con el límite inferior de un 30% del BSCR.

Límite máximo del BSCR =  $200 \times 30\% = 60$  u.m.

Dado que el capital obligatorio frente a los riesgos operativos no sobrepasará el 30% del capital de solvencia obligatorio básico la compañía tendrá una carga de capital operacional de 60 u.m.

Además dado que el BSCR era de 200 u.m. y suponiendo que la compañía no tiene que realizar ningún ajuste (Adj) el capital de solvencia SCR será de 260 u.m.

En lo que se refiere a las diferencias con su predecesor, la fórmula empleada en QIS3 no distinguía el negocio *unit-linked*, por lo que su fórmula era:

$$SCR_{operacional} = \min(0,30 \cdot BSCR; Op)$$

Siendo:

$$Op = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,03 \cdot PB_V + 0,02 \cdot PB_{NV} + 0,02 \cdot PB_S \\ 0,003 \cdot PT_V + 0,02 \cdot PT_{NV} + 0,002 \cdot PT_S \end{array} \right\}$$

En la primera versión del modelo español de solvencia no se distingue entre no vida y salud, por lo que la fórmula para determinar la carga de capital básico operacional se calcula del siguiente modo:

$$Op = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,03 \cdot PB_V + 0,02 \cdot PB_{NV} \\ 0,003 \cdot PT_V + 0,02 \cdot PT_{NV} \end{array} \right\}.$$

Además, el Modelo Español de Solvencia realiza una corrección del  $SCR_{operacional}$  que puede suponer una reducción de hasta el 50% en función de la gestión del riesgo operacional que éstas realicen. Las entidades deben responder a una serie de 23 preguntas recogidas en el cuestionario cualitativo que aparece recogido en QIS3. Cada respuesta toma la puntuación de 1 en caso de respuesta afirmativa y 0 en otro caso. Posteriormente se procede a calcular la media de las puntuaciones obtenidas y se multiplica por 0,5. De esta forma, en el caso de que la compañía responda afirmativamente a todas las preguntas tendrá un factor de reducción del 50%. Consecuentemente, el SCR operativo final en MES v.1 es igual al producto entre el SCR operativo previo calculado y el factor de corrección.

## 5.5. MCR o Minimum Capital Requirement

En QIS4 se ha introducido la técnica combinada (*combined approach*) para el cálculo del MCR. El MCR se determina a través de un porcentaje sobre primas y provisiones para los distintos ramos, y se establece un límite mínimo del 20% y máximo del 50% de la cifra de SCR, calculada a través de la fórmula estándar o a través de modelos internos. La técnica lineal simplifica la técnica modular empleada en QIS3. Los inputs para el cálculo del MCR son los siguientes:

- $MCR_{NV}$  el MCR lineal para el negocio no vida (antes de aplicar el límite inferior o superior).
- $MCR_{VIDA}$  el MCR lineal para el negocio de vida (antes de aplicar el límite inferior o superior).
- $MCR^*_{NV}$  el MCR lineal para el negocio no vida similar al negocio de vida (antes de aplicar el límite inferior o superior).
- $MCR^*_{VIDA}$  el MCR lineal para el negocio de vida similar al negocio de no vida (antes de aplicar el límite inferior o superior).
- $SCR$  el capital de solvencia de la compañía<sup>104</sup>.

---

<sup>104</sup> Cuando la compañía aseguradora emplee un modelo interno (parcial o total) para el cálculo del SCR, debe realizar un doble cálculo del MCR, primero usando la fórmula estándar para el SCR y segundo empleando el modelo interno para el SCR.

El resultado obtenido es el siguiente:

- $MCR_{lineal}$  el MCR lineal de la compañía obtenido como suma de los  $MCR$ s lineales para cada tipo de negocio de la aseguradora (antes de aplicar el límite inferior o superior),
- $MCR_{combinado}$  el MCR combinado de la compañía calculado por la técnica combinada, después de aplicar el límite inferior y el límite superior (50% y 20% del SCR) al MCR lineal,
- $MCR$  es el MCR final de la compañía calculado aplicando el mínimo absoluto inferior a la técnica combinada.

### ***MCR lineal para las compañías de no vida***

El MCR para el negocio no vida se calcula por medio de la siguiente función:

$$MCR_{NV} = \sum_{ramo} \max(\alpha_{ramo} \cdot PT_{ramo}; \beta_{ramo} \cdot P_{ramo})$$

Siendo:

- $PT_{ramo}$  son las provisiones técnicas sin incluir el margen de riesgo para cada línea de negocio netas de reaseguro<sup>105</sup>.
- $P_{ramo}$  son las primas suscritas en cada ramo de negocio netas de reaseguro.
- Los factores  $\alpha_{ramo}$  y  $\beta_{ramo}$  se determinan a partir de la siguiente tabla.

Ramo	Nombre del ramo	$\alpha_{ramo}$	$\beta_{ramo}$
1	Accidente y salud-compensación a los trabajadores (WC)	0,13	0,09
2	Accidente y salud-seguro de salud	0,10	0,04
3	Accidente y salud-otros	0,20	0,06
4	Automóviles responsabilidad civil	0,16	0,12
5	Automóviles otras garantías	0,09	0,12
6	Naval, aviación y transporte (Transporte de mercancías)	0,13	0,16
7	Incendios y otros daños a los bienes	0,13	0,13
8	Responsabilidad Civil	0,20	0,16
9	Crédito y caución	0,20	0,20
10	Defensa jurídica	0,13	0,06
11	Asistencia	0,13	0,10
12	Varios	0,13	0,14
13	Reaseguro no proporcional-propiedades	0,20	0,20
14	Reaseguro no proporcional-personas	0,20	0,20
15	Reaseguro no proporcional-MAT	0,20	0,20

<sup>105</sup> No deben incluir los pasivos de no vida similar al negocio de vida.

### ***MCR para negocio no vida- actividades similares a negocio vida***

Algunos ramos de negocio no vida pueden contener siniestros que son similares en naturaleza a los negocios de seguros de vida. El  $MCR^*_{NV}$  o  $MCR$  para negocio no vida similares a vida (antes de aplicar cualquier *cap* o *floor*) se calcula como:

$$MCR^*_{NV} = 0,013 \cdot TP_{salud} + 0,025 \cdot TP_a$$

Siendo:

- $TP_{salud}$  provisiones técnicas (sin incluir el margen de riesgo) netas de reaseguro para el negocio de salud similar el negocio de vida.
- $TP_a$  provisiones técnicas (sin incluir el margen de riesgo) distintas a  $TP_{salud}$  netas de reaseguro que son valoradas de acuerdo a las principios del negocio de vida.

Para el cálculo del  $MCR$  las compañías aseguradoras se establecen cuatro etapas:

**1º Etapa:** Cálculo de los componentes de  $MCR$  lineal dependiendo del tipo de negocio suscrito. Estos componentes son:  $MCR_{NV}$ ,  $MCR^*_{NV}$ ,  $MCR_{VIDA}$  y  $MCR^*_{VIDA}$ .

**2º Etapa:** Cálculo del  $MCR$  lineal global como la suma de los componentes del  $MCR$  lineal:

Para las compañías de seguros no vida:

$$MCR_{lineal} = MCR_{NV} + MCR^*_{NV}$$

Para las compañías de seguros vida:

$$MCR_{lineal} = MCR_{VIDA} + MCR^*_{VIDA}$$

Para las compañías de seguros de vida y no vida:

$$MCR_{lineal} = MCR_{NV} + MCR^*_{NV} + MCR_{VIDA} + MCR^*_{VIDA}$$

**3º Etapa:** Cálculo del  $MCR$  combinado aplicando el límite inferior y superior al  $MCR$  lineal:

$$MCR_{combinado} = \{\min[\max(MCR_{lineal}; 0,2 \cdot SCR); 0,5 \cdot SCR]\}$$

4º Etapa: Aplicación del límite inferior absoluto del Artículo 127.1.d de la Propuesta de Directiva al MCR combinado, de esta forma:

$$MCR = \max(MCR_{\text{combinado}}; AMCR)$$

Donde *AMCR* es el límite absoluto para el *MCR*. Este límite es de 1 millón de euros para las compañías (re)aseguradoras de no vida, 2 millones de euros para las compañías (re)aseguradoras de no vida y 3 millones de euros para las compañías de no vida y vida.

### Ejemplo. Cálculo del MCR.

Considérese una compañía no vida que opera en dos ramos con los siguientes valores en millones de euros:

Ramo	Provisiones Técnicas Netas	Primas Suscritas Netas
Automóviles RC	10	2
Automóviles Otras Garantías	12	5

El *SCR* de la compañía es de 9 millones de euros y al ser una compañía de seguros no vida el límite absoluto para el *MCR* (*AMCR*) es de 1 millón de euros. Para el cálculo del *MCR* procedemos a través de los cuatro pasos citados:

1º Paso: Cálculo de los componentes de *MCR* lineal: El  $MCR_{NV}$  o *MCR* para el negocio no vida se calcula de la cantidad obtenida para cada ramo, por lo que  $MCR_{NV} = 1,6 + 1,08 = 2,68$ .

Ramo	PT Netas	Primas Netas	$\alpha$	$\beta$	$MCR_{NV}$
Automóviles RC	10	2	16%	12%	1,60
Automóviles Otras Garantías	12	5	9%	12%	1,08

2º Paso: Cálculo del *MCR* lineal global como la suma de los componentes del *MCR* lineal. Para las compañías de seguros no vida el  $MCR_{\text{lineal}}$  es la suma del  $MCR_{NV}$  y del  $MCR_{NV^*}$ . Suponiendo que el valor de este último es de cero,  $MCR_{\text{lineal}} = 2,68$ .

3º Paso: Cálculo del *MCR* combinado aplicando el límite inferior y superior al *MCR* lineal. Debemos comparar el  $MCR_{\text{lineal}} = 2,68$  con el límite máximo y límite mínimos.

$$\text{Límite máximo} = SCR \times 50\% = 4,5$$

$$\text{Límite mínimo} = SCR \times 20\% = 1,8.$$

Por lo que el  $MCR_{\text{combinado}}$  es igual al  $MCR_{\text{lineal}}$ .

4º Paso: Aplicación del límite inferior absoluto *AMCR*. El límite inferior absoluto es de 1 millón de euros. Como  $MCR_{combinado}=2,68$  el requisito de capital *MCR* es de 2,68 millones de euros.

En la siguiente tabla se puede ver el resultado que tiene en el *MCR* final los cambios en la hipótesis del valor de *SCR* para el mismo *MCR* lineal:

Para valores de *SCR* > 13,4 millones de euros el *MCR* sería el límite mínimo (20% × *SCR*).

Para valores 13,4 > *SCR* > 5,36 millones de euros el *MCR* sería el *MCR* lineal.

Para valores 5,36 > *SCR* > 2 millones de euros el *MCR* sería el límite máximo (50% × *SCR*).

Para valores *SCR* < 2 millones de euros el *MCR* sería el valor mínimo absoluto de 1 millón de euros (*AMCR*).

<b>SCR</b>	<b>Límite máximo</b>	<b>Límite mínimo</b>	<b>MCR<sub>Combinado</sub></b>	<b>MCR</b>
13,5	6,75	2,70	2,70	2,70
9,0	4,50	1,80	2,68	2,68
5,3	2,65	1,06	2,65	2,65
1,9	0,95	0,38	0,95	1,00

Para la calibración del *MCR* se partió de la hipótesis de la distribución lognormal aplicada en la fórmula del *SCR*. En la Propuesta de Directiva se establecía que el *MCR* debía corresponderse con un *VaR* del 80% o 90% a un año, lo que se consideraba equivalente a entre un 25% y un 45% el *SCR*, por lo que se eligió como objetivo general una calibración el 35% (punto medio).

Los factores  $\alpha_{ramo}$  y  $\beta_{ramo}$  para el *MCR* de no vida han sido derivados para un *VaR* al 90% a un año, compensando el hecho de que sólo se considera el riesgo de primas y de reservas. Dichos factores se han calibrado a partir de las desviaciones estándar de mercado de primas y de reservas, a semejanza de lo realizado para el *SCR*. Formalmente,  $\alpha_{ramo}=\rho_{90}(\sigma_{(M,primas,ramo)})$  y  $\beta_{ramo}=\rho_{90}(\sigma_{(reservas,ramo)})$  siendo

$$\rho_{90}(\sigma)=\frac{\exp\left(N_{0,90}\cdot\sqrt{\ln(1+\sigma^2)}\right)}{\sqrt{(1+\sigma^2)}}-1, \text{ por lo que puede decirse que } \rho_{90}(\sigma)\approx 1,3\sigma. \text{ Para el}$$

negocio no vida-actividades similares a negocio vida se ha calibrado el factor  $\sigma_{salud}=0,013$  de forma que la ratio *SCR* a provisiones técnicas de QIS3 fuese del 35%, mientras que el factor  $\sigma_a=0,025$  fue calibrado a datos de las anualidades no vida reflejando el punto medio entre la calibración de un *VaR* al 80% y un *VaR* al 90% (el resultado era respectivamente de 0,0197 y 0,0306).

La calibración efectuada fue testada con los datos de la ratio *MCR/SCR* obtenidos en QIS3 para 460 compañías de 19 países obteniendo los resultados mostrados en la siguiente tabla. Dichos resultados mostraron una calibración en general satisfactoria, ya que casi un 75% de las compañías tenía una ratio comprendida entre 20% y 50%.

<10%	10%-20%	20%-30%	30%-40%	40%-50%	50%-60%	60%-70%	70%-80%	80%-90%	90%-100%	>100%
20	60	126	125	88	20	9	2	8	0	2

## 6. SISTEMAS DE SOLVENCIA DE OTROS PAÍSES DESARROLLADOS

Para implantar los requerimientos de capital del proyecto Solvencia II, el CEIOPS ha analizado los modelos de evaluación de la solvencia existentes en otros países. Dicho análisis, unido a otras exigencias del entorno, han llevado a la Unión Europea a modificar el sistema actual de solvencia. Vamos a analizar brevemente el modelo del Reino Unido, Suiza, Países Bajos, Estados Unidos, Australia, Canadá, el modelo de *Standard and Poor's* (S&P), la propuesta de modelo de Alemania para Solvencia II y la propuesta del CEA. Posteriormente, compararemos dichos modelos basándonos en sus principales características.

### 6.1. Reino Unido (ECR e ICA)

El regulador del Reino Unido, la FSA (*Financial Services Authority*), introdujo en 2005 los denominados "PRU" (*Integrated Prudential Sourcebook*), creando un sistema según el cual las autoridades de supervisión deciden el nivel de capital exigido al asegurador. El cálculo se establece en función de los requerimientos de capital ampliado, exigencias mejoradas de capital o ECR<sup>106</sup> (*Enhanced Capital Requirement*) y de la evaluación del capital individual o ICA (*Individual Capital Assessment*) de un asegurador<sup>107</sup>. El ECR se calcula como según la fórmula  $ECR = C1 + C2 + C3$ , siendo C1 el riesgo de activo, C2 el riesgo de primas y C3 el riesgo de reservas.

Como consecuencia del ICA, los aseguradores de vida y los de no vida deben evaluar ellos mismos las exigencias de capital para sus perfiles de riesgo empleando modelos internos examinados por la FSA. Los estándares para el ICA (*Individual Capital Assessment Standards* o ISAS) son más unas guías o instrucciones a aplicar que un conjunto de reglas, ya que las compañías tienen bastante margen

<sup>106</sup> El ECR es, generalmente, más elevado y más sensible al riesgo que los actuales requisitos de Solvencia I. Los aseguradores no vida deben disponer de la mayor cuantía entre el Capital mínimo requerido establecido por Solvencia I (fondo de garantía mínima o del margen de solvencia) o del capital requerido ampliado (ECR)

<sup>107</sup> Ver PRU 2.1 *Calculation of capital resources requirements* y PRU 2.3 *Individual Capital Assessment*.

al aplicar las ICAS para calcular su ICA, siempre dentro de las clases de riesgo que especifica la FSA (riesgo de crédito, riesgo de mercado, riesgo de liquidez, riesgo operativo, riesgo de grupo y riesgo asegurador).

Para el cálculo del ICA, una aseguradora debe identificar los riesgos a los que se enfrenta en el negocio, y cuantificar la cantidad y la composición del capital necesario para atenuar estos riesgos a un determinado nivel de confianza. El capital necesario se define como un mínimo de un 99,5% de probabilidad de ser solvente a 1 año, pero también puede usarse una probabilidad inferior si el período analizado es superior, en cuyo caso ha de justificarse convenientemente<sup>108</sup>. El proceso supone que la compañía ha de responsabilizarse de la identificación de los riesgos y de las herramientas adecuadas para mitigarlos. Las compañías utilizan típicamente las siguientes técnicas para determinar el riesgo agregado: *stress test* determinístico aplicados a los riesgos individuales que posteriormente se agregan teniendo en cuenta la correlación entre los mismos (técnica de matriz de correlación); test de escenarios deterministas aplicados a las combinaciones de riesgos (técnica de escenarios); y los modelos de simulación que consideran un conjunto de riesgos y prueban sus interdependencias e interacciones directamente (técnica estocástica)<sup>109</sup>.

El cálculo del ICA es revisado por la FSA, que emite un informe denominado ICG (*Individual Capital Guidance*). El informe ICG es la conclusión a la que llega la FSA de los requisitos de capital individual de la compañía, y confirma o enmienda el cálculo de la aseguradora. Cuando la autoridad aseguradora piense que el ICA de una firma no es adecuado, aplicará el determinado por ella misma o puede imponer alternativamente requisitos de mejora de sus sistemas y controles o imponer la retirada de ciertos riesgos de suscripción.

Como consecuencia de la implantación de la Directiva de requisitos de capital de Basilea II la FSA ha elaborado en 2006 el *Insurance Prudential Sourcebook Instrument*, que entró en vigor el 31 de Diciembre de 2006. Consiste en integrar el *Integrated Prudential Sourcebook* (PRU), el *Lloyd's sourcebook* (LLD) y el MIPRU (*Prudential Sourcebook for mortgage firms and insurance intermediaries*) en el nuevo INSPRU (*Prudential Sourcebook for insurers and Lloyd's firms*). Cabe destacar que en el INSPRU se recoge el apoyo de la FSA a la técnica DFA para realizar el cálculo del capital necesario. Además, se indica que los modelos DFA en la medida de lo posible, debieran cubrir todos los riesgos y todas las áreas de negocio, y que el período de proyección se debe determinar según el tipo de negocio suscrito, del perfil de activo y del ciclo asegurador, pudiendo ser apropiado considerar diversos períodos<sup>110</sup>.

---

<sup>108</sup> PRU 2.3.14G.

<sup>109</sup> Ver GN46: *Individual Capital Assessment, Internal Capital Assessment. Principles & Guidance*.

<sup>110</sup> Ver INSPRU 7.1.54.

## 6.2. Suiza (SST)

El supervisor suizo, la *Federal Office of Private Insurance* o “FOPI”, ha propuesto un estándar de solvencia del tipo capital basado en el riesgo (RBC) denominado el Test de solvencia Suizo (*Swiss Solvency Test* o SST) (FOPI, 2004). En él se relaciona el capital requerido con los riesgos reales soportados por las compañías, ya que se considera que los actuales sistemas de Solvencia I ponen a los aseguradores prudentes en una situación de desventaja competitiva. El SST fue introducido con la entrada en vigor de la nueva Ley de Supervisión de Seguros (ISL) el 1 de Enero de 2006. La ISL establece que como máximo en 2008 todos los aseguradores debieran determinar su cuantía de capital según el SST. La propuesta tiene el objetivo de proteger al asegurado y realzar la gestión del riesgo por cada compañía dentro de un sistema más transparente. El SST determina un capital objetivo (*target capital*) necesario para cubrir los riesgos asumidos con un nivel adecuado de confianza. El sistema se basa en principios y es compatible con Solvencia II<sup>111</sup>. Cabe resaltar que el SST es un modelo híbrido, ya que contiene una parte estocástica y otra basada en escenarios. La estructura general puede verse en el siguiente gráfico.



Los elementos clave del sistema son los siguientes (FOPI, 2004):

- Valoración de activos según el mercado y de pasivos según la mejor estimación, y obligación de valorar las opciones y garantías.
- Los aseguradores deben calcular la solvencia mínima y el capital objetivo. La solvencia mínima se basa en el balance contable, por lo que es fácil de calcular

<sup>111</sup> El FOPI establece que es un objetivo del SST ser compatible con el marco de Solvencia II, para que las compañías suizas no estén en desventaja competitiva con los aseguradores domiciliados en países miembros de la UE.

y objetivo, pero no refleja directamente las exposiciones al riesgo del asegurador. El capital objetivo está basado en el riesgo pero tiene como desventaja que depende del modelo empleado. Se considera una señal de alarma temprana, por lo que en caso de no cubrirse se inician medidas reguladoras graduales.

- Se aplica el concepto de excedente (*Risk-bearing Capital*) que se define como la diferencia entre el valor consistente con el mercado de activos y la mejor estimación de los pasivos (ver el gráfico siguiente). El riesgo se mide por la pérdida esperada (*expected shortfall*) del excedente a un año empleándose el TVaR.

Activos	Pasivos
Valor consistente de mercado de los activos	Mejor estimación de los pasivos.
	Excedente ( <i>Risk-bearing Capital</i> )

Fuente: FOPI (2004).

- Los riesgos financieros y aseguradores se valoran cuantitativamente, mientras que los operacionales se valoran cualitativamente. El SST incluye los siguientes riesgos: a) riesgos de mercado, que incluyen los riesgos de tipos de interés, tipos de cambio, renta variable y derivados de crédito, en donde se asume el modelo de rendimientos normal multivariante, b) riesgos técnicos de vida, c) riesgos de no vida, que engloba los asociados a siniestros futuros del presente ejercicio y al resultado en reservas, d) riesgos técnicos de salud, y finalmente, e) riesgos de crédito.
- El modelo estándar abarca un conjunto de escenarios predefinidos y escenarios específicos de la empresa para los riesgos de suscripción, inversión y crédito. Por agregación mediante ponderación del cálculo de solvencia y de las pruebas de escenario, que tienen en cuenta sucesos extremos o no cubiertos en los escenarios predefinidos, se calcula el capital objetivo. Se deben evaluar los escenarios prescritos y aquellos que son relevantes a situaciones de riesgo específicas de la compañía. Además, se impulsa a los aseguradores a que, previa validación, calculen su capital objetivo con su modelo interno, recayendo la responsabilidad de dicho cálculo en la dirección de la empresa.
- Se debe elaborar el informe SST (*SST Report*) firmado por la persona con más autoridad dentro de cada compañía (*Chief Executive Officer* o CEO). La FOPI le ha dotado de un contenido mínimo y se deben documentar las hipótesis y cálculos utilizados.

- El capital objetivo está compuesto de dos partes (gráfico siguiente): el margen de riesgo o de seguridad (*risk margin*) y la Pérdida esperada. La Pérdida esperada es el capital necesario para los riesgos que emanan dentro del horizonte temporal de un año. El Margen de riesgo se establece para proteger a los asegurados en caso de insolvencia, y se define como el coste hipotético del capital regulatorio necesario que tendría que asumir un tercero al que traspasásemos todos los activos y pasivos de la compañía. Se calcula como el valor descontado o presente de los costes futuros de mantener el nivel de capital objetivo de SST por un tercero<sup>112</sup>. El cálculo desagregado del capital objetivo puede verse en Kaufmann y Wyler (2005).

<b>Capital Objetivo (Target Capital)</b>	<b>Capital en riesgo (Risk Capital a 1 año):</b>  Definido como el <i>Expected Shortfall</i> del cambio en el excedente durante un año.
	<b>Margen de riesgo (Risk Margin):</b>  Para proteger a los asegurados de los efectos de una insolvencia.

Fuente: FOPI (2004)

- Posibilidad de usar modelos internos. De esta forma, se establece un incentivo para introducir y para aplicar técnicas y procesos que mejoren la gestión del riesgo, conduciendo a requisitos de capital económico y regulador más bajos. Los modelos internos deben ser aprobados por el supervisor, para ello, han de satisfacer requisitos cuantitativos, cualitativos y organizativos, y que se resumen en la siguiente tabla.

<sup>112</sup> Para el año 2004, el coste de capital establecido por el supervisor fue del 6%.

Requisitos	Aspectos a considerar
Cualitativos	<p>Todos los factores de riesgo estén recogidos en el modelo teniendo en cuenta su estructura.</p> <p>El actuario designado debe calcular la estabilidad de los resultados mediante métodos como el análisis de sensibilidad, el <i>back-testing</i> o similares.</p> <p>Los datos y parámetros usados deben estar actualizados y ser relevantes para la compañía.</p> <p>Finalmente, los modelos deben ser revisados regularmente y ajustados si fuera necesario.</p>
Cuantitativos	<p>Todos los elementos han de ser valorados de forma consistente con el mercado.</p> <p>Los modelos internos han de ser estimados con el mismo nivel de confianza y medidas del riesgo que el SST.</p>
Organizativos	<p>Los modelos internos necesitan estar integrados dentro de un marco de organización apropiado, de forma que se ajusten en proceso de gestión diaria del riesgo de la compañía (procesos internos del asegurador). Esto implica que los modelos internos no sólo deben servir para el cálculo del capital objetivo, sino que deben estar integrados en el “<i>management</i>” de la entidad de forma que sean útiles para la toma de decisiones.</p>

### 6.3. Países Bajos (DST)

Las antigua autoridad de supervisión del seguro y pensiones de los Países Bajos (*Pensioen & Verzekeringskamer – PVK*) empezó en 2001 a elaborar un nuevo marco de supervisión denominado NAP (“*Memorandum New Actuarial Principles*”). Sin embargo, este nombre no era muy apropiado, ya que el marco hacía referencia a las reglas para los test financieros de solvencia más que a los principios actuariales. El objetivo del PVK era alinear su supervisión en línea con los progresos internacionales en el mundo financiero en el área de la gestión del riesgo. En el NAP se describían tres subtest o perspectivas para evaluar la solvencia de las entidades aseguradoras y los fondos de pensiones y de jubilación. Cada una tenía un horizonte distinto que se van acortando: la prueba de continuidad (*continuity test*) era un test a largo plazo de los niveles de solvencia; la prueba de solvencia (*solvency test*) evaluaba la posición financiera concerniente a los riesgos inherentes a los activos y los pasivos durante un año; y por último, la prueba mínima (*minimum test*) evaluaba el tamaño de las provisiones técnicas para los pasivos y los activos a fecha de balance. Una compañía debía superar positivamente las tres pruebas, estableciéndose el requisito de capital en función del perfil real del riesgo de la compañía. La intención del PVK era que las pruebas se pudieran aplicar de dos maneras: en base a un modelo interno aprobado por el PVK, de forma que se fomente la gestión profesional del riesgo; y en segundo lugar, usando un método estándar prescrito por el PVK.

Los principios del Memorandum NAP se fueron elaborando en profundidad con expertos del sector y bajo la influencia de fuentes externas (los estándares de contabilidad IAIS-IFRS<sup>113</sup>, Solvencia II y Basilea II) dando lugar al Marco de Cálculo financiero o FTK (*Financial Assessment Framework* o *Het Financieel Toetsingskader*). La base económica de valoración del FTK para determinar la posición financiera de las entidades es el valor realista de inversiones y de pasivos. En 2004, el Banco Central de los Países Bajos (*De Nederlandsche Bank* o DNB) se combinó con el PVK creando una nueva organización que conservó nombre de DNB. El DNB obliga a que las entidades aseguradoras apliquen el FTK a partir del 1 de Enero del 2006, y para los fondos se ha pospuesto su obligatoriedad al 1 de Enero de 2007.

Los principales cambios del FTK respecto al Memorandum NAP son el cambio del test de continuidad por el análisis de continuidad, la integración del test mínimo en el test de solvencia y la simplificación de este último. El primer cambio consiste en el paso de la prueba de continuidad (*continuity test*) al análisis de continuidad (*continuity analysis*). El análisis de continuidad permite que los gestores de una compañía y el supervisor identifiquen, en un momento temprano de tiempo, si la compañía está en una posición de continuar resolviendo sus requisitos de solvencia en el futuro. El objetivo es que, tanto los gestores de la compañía como el supervisor, pueden tomar medidas en las situaciones que así lo requieran. El horizonte para la proyección es de quince años para los fondos de jubilación y cinco años para las otras instituciones. Cada compañía supervisada debía realizar al menos un análisis de continuidad antes de 2008, que se repetirá regularmente. La frecuencia no es anual, sino que cada compañía debe explicar y justificar la frecuencia adoptada. El segundo cambio, consiste en que la prueba mínima (*minimum test*) se integra en la prueba de solvencia (*solvency test*)<sup>114</sup>. El FTK distingue entre cinco categorías principales de riesgo: riesgo de mercado, riesgo de crédito, riesgo de suscripción, riesgo operativo y riesgos de concentración. Finalmente, el tercer y último cambio, radica en que se simplifica el test de solvencia. El valor de los pasivos (*realistic value of liabilities*) es el valor actual de los flujos de liquidez previstos de los contratos de seguro, y se establece en base a una ETTI que sustituye al uso de un tipo de descuento fijo.

La base económica de valoración del FTK es el valor razonable de activos y de pasivos. El valor razonable se establece según la hipótesis de empresa en funcionamiento (*going concern*), y se determina a partir de tres situaciones: para las inversiones que se negocian en un mercado regular será el valor de mercado más reciente; si no hay valor de mercado disponible, se deben utilizar precios de instrumentos financieros comparables ajustados en función de las diferencias entre esos instrumentos y la inversión; por último, si no hay instrumentos comparables, la compañía debe recurrir a una técnica de valoración usando principios económicos generalmente aceptados. El valor razonable de pasivos está compuesto del

---

<sup>113</sup> Son los estándares internacionales de contabilidad emitidos por la IASC y la IASB respectivamente.

<sup>114</sup> La causa de la integración reside en que se constató durante el período de discusión que la distinción de dichas pruebas creaba confusión.

valor esperado o previsto y de un margen por riesgo. El valor previsto es la cantidad de pagos a efectuar bajo estimaciones realistas basados en principios aseguradores (tasas de mortalidad, frecuencia de demandas, tasas de rescate, etc.) y tendencias previstas (demográficas, legales, sociales, económicos, etc.). El riesgo de que las cantidades reales difieran de estos valores previstos exige una sobrecarga. Ésta se establece como la carga que un miembro del mercado requeriría como compensación por adquirir la cartera de pasivos de la entidad<sup>115</sup>. Es decir, esta carga es un margen del valor de mercado (*market value margin*) para cubrir riesgos inevitables asociados a la cartera de pasivos.

#### A. Test de solvencia

El test de solvencia identifica si la posición financiera de un asegurador es adecuada. Esto implica el cumplimiento de dos elementos. El primero, que en la fecha de realización del test (frecuencia anual) el valor razonable de los activos libres disponibles debe ser por lo menos igual al valor razonable de los pasivos previsibles totales. El segundo establece que el valor razonable del capital de los accionistas (*shareholders' equity*) es adecuado para cumplir el anterior requisito a un año vista, estableciéndose un nivel de confianza del 99,5% para aseguradores y del 97,5% para fondos de pensiones.

El test de solvencia se podrá efectuar según tres métodos: el método simple, el método estándar y el método basado en modelos internos. El método simple (*simplified method*) se podrá efectuar previo permiso del supervisor. Generalmente lo podrán emplear instituciones pequeñas cuyos pasivos y activos se pueden establecer y valorar de forma relativamente simple. Las compañías que utilicen este método tendrán unos requisitos de capital inferiores, dado que el segundo elemento del test de solvencia no necesita ser realizado. El método estándar (*standardised method*) se puede utilizar por cualquier compañía. Este método identifica un número de categorías del riesgo. Así, se establece la solvencia deseada para cada grupo de riesgo. El método combina el análisis de escenarios para el riesgo de mercado (S1, S2, S3, S4) y de crédito (S5), y una técnica basada en un factor para el riesgo de suscripción (S6). La cuantificación del riesgo operativo no sería incluida en el cómputo previsible hasta 2009, determinándose mientras de forma cualitativa durante los primeros tres años. Los cómputos de la solvencia entonces se clasifican como sigue:

- S1 para la solvencia deseada para el riesgo de tipo de interés y (si fuera aplicable) el riesgo de inflación.
- S2 para la solvencia deseada para los valores de rentabilidad variable, que es la suma de la solvencia deseada para acciones y propiedades inmobiliarias.
- S3 para la solvencia deseada para el riesgo de tipo de cambio.
- S4 para la solvencia deseada para las materias primas (*commodities*).

---

<sup>115</sup> Se desarrollan unas tablas para simplificar su cálculo que se utilizarán en el método estándar. Si se utiliza un modelo interno, se asume que las instituciones computan dicha sobrecarga en los modelos estocásticos.

- S5 para la solvencia deseada para el riesgo de crédito.
- S6 para la solvencia deseada para el riesgo de suscripción.

El método estandarizado asume relación entre algunas categorías de riesgo e independencia entre otras. En concreto la correlación entre los tipos de interés y valores de rentabilidad variable, se establece por medio de  $\rho$  (toma el valor 0,65 para las aseguradoras y 0,8 para los fondos de jubilación). Los componentes de S1 a S6 se combinan por agregación usando la fórmula siguiente:

$$\text{Capital Total} = \sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + 2\rho S_1 S_2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 + S_6^2)}$$

El último método por el que se podrá efectuar el test de solvencia es el método interno (*internal model method*). Se podrán utilizar modelos internos si éstos cumplen los requisitos generales sobre la calidad de dichos modelos. Estos requisitos promueven la gestión adecuada del riesgo: deben permitir mostrar una estimación exacta de los riesgos, estar incorporados como parte integral de la gestión de riesgo diaria y se debe proporcionar información detallada sobre la base teórica y la evidencia empírica del modelo, indicar las circunstancias bajo las cuales el modelo no es confiable, y se debe testar el modelo regularmente mediante *back-testing* (comparación retrospectiva de los riesgos estimados y los reales). El DNB espera que las instituciones grandes y avanzadas, se decanten por este método. El modelo interno debe modelizar la distribución de probabilidad del excedente de la compañía en valor realista sobre un horizonte temporal de un año vista.

## B. Análisis de continuidad

El objetivo del análisis de continuidad es incorporar una perspectiva a largo plazo para identificar en una etapa temprana, si los riesgos incurridos por las instituciones caen dentro de los límites aceptables. El análisis de continuidad no define una relación matemática directa entre los resultados de una compañía y los requisitos de capital<sup>116</sup>. El análisis de continuidad extiende el test de solvencia en tres formas: el horizonte temporal del análisis es más largo; se incorpora las políticas estratégicas de la compañía, la gestión y los instrumentos teniendo en cuenta sus limitaciones y su eficacia y se considera la entrada de nuevos miembros y de nuevas oportunidades de negocio en el desarrollo financiero futuro de la compañía. De esta forma, el análisis de continuidad trata de determinar si de acuerdo con la posición financiera actual, la estrategia de la compañía es acorde con la evolución previsible del entorno.

El análisis de continuidad es una herramienta que intenta que la compañía profundice en las tendencias que puedan influir en la posición financiera futura de la institución. Para la autoridad de supervisión, se trata de alcanzar los siguientes objetivos: conocer las expectativas de la institución, las amenazas y las oportunidades futuras, de forma que se anticipe mejor los posibles problemas al mismo tiempo

<sup>116</sup> Por ello se emplea el nombre de análisis y no de prueba o test.

que también pretende mejorar la información e identificar un posible deterioro futuro de la posición financiera en una etapa temprana. Las partes en las que se divide el análisis de continuidad, junto con la naturaleza y el propósito de cada una de ellas son resumidas en la siguiente tabla.

	Parte	Naturaleza	Propósito
A	Objetivos, políticas e instrumentos	Prospectiva cualitativa y	Subsanar las futuras proyecciones (Parte C)
B	Hipótesis económicas y expectativas	Prospectiva cuantitativa y	Subsanar las futuras proyecciones (Parte C)
C	Futuras proyecciones basadas en las propias expectativas de la institución (Escenario base)	Prospectiva cuantitativa y	Comprender el desarrollo futuro basándose en las expectativas de la institución
D	Análisis de sensibilidad	Prospectiva cuantitativa y	Comprender la sensibilidad de los resultados bajo diferentes hipótesis
E	<i>Stress testing</i>	Prospectiva cuantitativa y	Reflejar las políticas y los resultados en circunstancias adversas
F	Análisis de varianza entre las proyecciones y la <i>performance</i> actual	Retrospectiva	Comprender el realismo de las políticas propuestas y de las hipótesis manejadas

Fuente: DNB (2004).

Para los aseguradores, el FTK se ajusta ampliamente con el marco de Solvencia II: la prueba de solvencia se pueden considerar como un requisito de solvencia sensible al riesgo (requisito de capital en el Pilar I). El análisis de continuidad es parte del proceso total de supervisión (revisión de supervisión en el Pilar II). Además, aunque el FTK no trata los requisitos de la divulgación de información (Pilar III), este ya era un elemento de la supervisión de los aseguradores.

#### 6.4. EE.UU. Sistema RBC o Modelo NAIC

El primer modelo de control de solvencia americano fue el IRIS (*Insurance Regulatory Information System*) elaborado la NAIC (*National Association of Insurance Commissioners*) en 1974. El sistema estaba constituido por un conjunto de indicadores<sup>117</sup> que evalúan el resultado operativo, la rentabilidad, la liquidez y la adecua-

<sup>117</sup> Concretamente 11 indicadores para compañías de seguros de no vida y 12 para compañías de seguros de vida.

ción de las provisiones técnicas de cada compañía. Como consecuencia de las situaciones de insolvencia de aseguradoras americanas que se vivieron a mediados de los años ochenta en Estados Unidos, la NAIC elaboró un nuevo sistema regulatorio. Este sistema, denominado RBC (*Risk Based Capital*), fue adoptado en el año 1992 para las compañías de seguros de vida y 1993 para los aseguradores de seguros de no vida. Los objetivos de este sistema eran: ayudar a los reguladores a determinar cuándo realizar una intervención en una compañía, reducir los costes de insolvencia de las compañías detectándolas en una fase temprana, ser lo bastante simple para poder ser aplicado por todas las compañías y que tuviese en cuenta los diferentes riesgos que afectan a la actividad aseguradora.

El sistema NAIC tiene dos componentes principales. El primero es una fórmula de capital basado en el riesgo que establece la cantidad mínima de capital necesaria para que una compañía de seguros apoye sus operaciones de negocio, de acuerdo con su tamaño y perfil de riesgo. Así, se establece un nivel de capital mínimo hipotético que se compara con el nivel de capital real de una compañía. El segundo componente es la intervención de la autoridad de control mediante acciones específicas. Estas actuaciones están en función del coeficiente entre los fondos propios disponibles de la empresa ("*total adjusted capital*")<sup>118</sup> y la necesidad de fondos propios establecida por el RBC.

El RBC fija el denominado ACLRBC (*Authorized Control Level Risk-Based Capital*) el cual es considerado como un capital mínimo, y se estipula como la mitad del RBC calculado. Las compañías pueden disponer de cualquier cantidad de capital superior al mínimo establecido, lo cual no implica que la compañía esté en una posición financiera fuerte sino, simplemente que no es débil según lo definido por la fórmula RBC. Por lo tanto, los estándares de capital basado en el riesgo del NAIC pueden ser inadecuados como medidas de fortaleza financiera y nunca se deben utilizar para comparar una compañía adecuadamente capitalizada con otra.

El principio básico del RBC consiste en asociar a cada uno de los principales riesgos de los balances de las aseguradoras una necesidad de capital. Este paso se realiza teniendo en cuenta las características de cada empresa. Después, se obtiene una necesidad global de capitales mediante una fórmula, asociando las necesidades de fondos propios vinculadas a cada riesgo. Las distintas fórmulas establecidas para el seguro de vida, no vida y salud es un intento de reflejar las diferencias en los entornos económicos a los que hacen frente estas compañías. Vamos a ver en más detalle el RBC para el caso de no vida.

#### A. Seguro de no vida

El RBC de no vida define seis categorías de riesgo. Cada categoría está formada por distintas partidas cada una de ellas ponderada por los llamados factores de riesgo o *risk factors*.

---

<sup>118</sup> Capital disponible (Total Adjusted Capital o TAC capital) = Capital y Excedente + Provisión de valoración de activos (Asset valuation reserve o AVR)+ 50% del pasivo de dividendos + *capital notes*.

- $R_0$ . Riesgo derivado de los compromisos no registrados en el balance y las obligaciones de las compañías filiales<sup>119</sup>.
- $R_1$ . Riesgo de activo derivado de la inversión en obligaciones y bonos.
- $R_2$ . Riesgo de activo derivado de la inversión en acciones, propiedades inmuebles y subsidiarias no consolidadas.
- $R_3$ . Riesgo crediticio constituido por las sumas a recuperar de los reaseguradores y otros créditos.
- $R_4$ . Riesgo técnico vinculado a la constitución de la provisión para prestaciones pendientes (*reserve risk*).
- $R_5$ . Riesgo técnico vinculado a la tarificación de los contratos de seguros (*premium risk*). Refleja la posibilidad de que las primas no cubran los siniestros correspondientes.

El RBC total se determina según una fórmula, que se utiliza un descuento global denominado ajuste por covarianza (*covariance adjustment*). Este ajuste refleja el hecho de que el riesgo acumulativo de varios riesgos independientes y no correlacionados es menor que la suma de los riesgos individuales. El riesgo  $R_0$  (y su equivalente en vida  $C_0$  y  $H_0$ ) se mantienen fuera del ajuste por covarianza. El ajuste por covarianza<sup>120</sup>, que no pretende cuantificar o considerar la correlación efectiva entre los distintos grupos de riesgo, se compone de cuatro pasos: primero, se agrega las categorías de riesgo que se consideran correlacionadas, dejando aparte aquellas que no se considera que tengan una correlación substancial; segundo, se elevan al cuadrado las categorías que resultan del paso anterior; tercero, se suman los cuadrados de las categorías resultantes; y cuarto y último, se toma la raíz cuadrada del resultado. Por tanto, el RBC total es inferior a la suma de sus componentes, y viene dado por la siguiente expresión:

$$RBC\ Total = R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$$

## B. Medidas regulatorias

El sistema NAIC indica las acciones específicas que se tomarán respecto al nivel de la denominada ratio RBC (Capital total ajustado/RBC mínimo). El sistema NAIC indica la acción específica que se tomará basada en el nivel del cociente de RBC válidas tanto para aseguradores de vida como de no vida:

---

<sup>119</sup> Para este último apartado, básicamente es el resultado de calcular el modelo RBC en la filial y multiplicarlo por el porcentaje de participación que tiene la compañía de seguros.

<sup>120</sup> El ajuste por covarianza, dado que eleva las categorías de riesgo al cuadrado, reduce la importancia relativa de las categorías más pequeñas y viceversa.

- Si el cociente excede de 200% (*no action level company*), es un nivel adecuado donde no se toma ninguna acción reguladora.
- Si el cociente está entre 150% y 200% (*company action level*) se requiere un plan de recuperación financiero y de negocio en el que se expliciten las acciones correctivas a realizar.
- si el cociente está entre 100% y 150% (*regulatory action level*), el asegurador deberá elaborar un plan como en el nivel anterior, pero además el regulador (Comisionado de Seguros del Estado) debe examinar y emitir órdenes correctivas apropiadas para tratar los problemas financieros de la compañía,
- si el cociente está entre el 70% y 100% (*authorised control level*) determina el primer nivel donde la ley permite tomar el control de la compañía de seguros,
- si el cociente está debajo del 70% (*mandatory control level*), se requiere la intervención del regulador para salvaguardar los intereses de los asegurados<sup>121</sup>.

<b>Categorías de riesgo</b>	
<b>Factores RBC</b>	
<b>RBC por categoría de riesgo</b>	
R0, R1, R2, R3, R4, R5	
<b>Total de riesgo</b>	
<b>Ajuste por covarianza</b>	
<b>RBC agregado</b>	
50 % RBC o ACLRBC ( <i>Authorized Control Level</i> )	
RBC ratio= Capital Total Ajustado/ACLRBC	
<b>Medidas regulatorias</b>	
RBC ratio > 200%	<i>"no action level company"</i>
RBC ratio 150%-200%	<i>"company action level"</i>
RBC ratio 100%-150%	<i>"regulatory action level"</i>
RBC ratio 70%-100%	<i>"authorised control level"</i>
RBC ratio < 70%	<i>"mandatory control level"</i>

### C. Diferencias entre Solvencia II y el sistema NAIC

El actual sistema europeo de Solvencia I (comprehensivo o de ponderación fija) fija el capital a partir de sus magnitudes agregadas que emanan del Balance o de la Cuenta de Pérdidas y Ganancias. El sistema anglosajón (analítico o basado en el riesgo) se centra en identificar los riesgos a los que está sometida y asigna una cantidad de recursos mediante el sistema RBC. En este sentido el sistema anglo-

<sup>121</sup> A menos que sea razonable creer que la situación se corregirá en el plazo de 90 días.

sajón mejora el actual sistema europeo ya que intenta incorporar los riesgos más relevantes a los que se enfrenta la actividad aseguradora.

Por el contrario, se puede afirmar que el marco de Solvencia II superará al americano. Las principales diferencias entre Solvencia II y el RBC americano son (Swiss Re 2006):

- Solvencia II seguirá un enfoque basado en principios, mientras que el sistema RBC parte de normas.
- Solvencia II valorará activos y pasivos de acuerdo con el mercado; mientras que el RBC emplea normas contables estatutarias de EE.UU., y que no reflejan el valor de mercado de activos y pasivos.
- Solvencia II tendrá en cuenta los posibles desajustes entre activos y pasivos, y define explícitamente una probabilidad máxima de incumplimiento de pago.
- Se espera que los modelos internos empleados en Solvencia II modelicen las correlaciones entre los riesgos de forma explícita. En el RBC, el «ajuste de covarianza» no intentaba cuantificar una correlación real entre las distintas categorías de riesgo.
- Solvencia II fomentará el uso de modelos internos y del test de escenarios, tanto si se usa el método estándar como el interno.
- Por último, el modelo americano no presenta ningún equivalente explícito del segundo y tercer pilar de Solvencia II.

## 6.5. Australia

El organismo regulador australiano, la APRA (*Australian Prudential Regulation Authority*), ha reformado recientemente los sistemas de determinación de la solvencia de las compañías aseguradoras de no vida y vida. En su propuesta, destaca al igual que otros países el énfasis en que las compañías aseguradoras determinen su capital y gestionen sus riesgos mediante un modelo interno.

### A. Seguros no vida

La APRA ha reformado la antigua ley aseguradora (*Insurance Act 1973*) e introducido nuevos Estándares Prudenciales con la entrada en vigor de la Ley de reforma del seguro no vida (*General Insurance Reform Act 2001*) que entró en vigor el 1 de Julio de 2002. Este estándar prudencial tiene el objetivo de que las obligaciones de los aseguradores con los asegurados están establecidas a un nivel apropiado, requiriendo que cada asegurador mantenga una cantidad mínima de capital (MCR<sup>122</sup>). Los requisitos claves del sistema son<sup>123</sup>:

---

<sup>122</sup> El MCR está sujeto a un límite inferior de 5 millones de dólares australianos.

<sup>123</sup> Ver Prudential Standard GPS 110.

- Se ofrece la posibilidad de calcular el requisito de capital mínimo MCR en función de su modelo interno de riesgo (*Internal Model Based Method*, IMB). Es una condición necesaria que el modelo elegido sea comprensivo, riguroso y ampliamente consistente. Además, los modelos deben ser aprobados individualmente por el APRA. La aprobación del modelo requerirá que el sistema de gestión del riesgo del asegurador y la metodología subyacentes al cálculo del capital resuelva ciertos criterios cuantitativos y cualitativos<sup>124</sup>. Los que no desarrollen modelos internos utilizarán el método prescrito estándar (*Prescribed Method*, PM) que es un método de tipo RBC, o una combinación de ambos métodos.
- El MCR bajo el método estándar es la suma de las cargas de capital del riesgo de inversión, asegurador y riesgo de concentración<sup>125</sup>, que se define como el riesgo asociado a una acumulación de exposiciones en un sólo acontecimiento catastrófico. Un asegurador que use el método IMB debe incluir estos riesgos y otros que considere relevantes.
- Un asegurador debe tener en todo momento un capital elegible (*eligible capital*) superior a su MCR. El capital elegible se divide entre las categorías de capital Tier 1 o “capital de alta calidad” y Tier 2<sup>126</sup>, sin que ésta última pueda exceder a la primera. El capital Tier 1 está formado básicamente por aquellos instrumentos con carácter permanente y que no imponen costes de mantenimiento en curso al asegurador. Por el contrario, los instrumentos de Tier 2 pueden tener vida limitada y/o tener obligaciones de mantenimiento en curso.

## B. Modelos internos

En relación a los modelos internos aprobados por el APRA destacan tres características que queremos resaltar. La primera característica es que los modelos internos deben incluir una medida del riesgo operacional dentro del cálculo del capital. La segunda es que las compañías están obligadas a realizar *stress testing*, pero no se imponen escenarios estándares. Sin embargo, se establece que es importante que los escenarios estén adaptados a las circunstancias particulares de cada asegurador, y que reflejen acontecimientos de baja probabilidad pero alto impacto que puedan afectar a la posición financiera del asegurador. La tercera y última característica reside en que se admiten modelos parciales, es decir, usar el método IMB para calcular determinados elementos del MCR y el método prescrito para aquellos no recogidos en el modelo interno.

---

<sup>124</sup> Estos requisitos se enumeran en la Guidance Note GGN 110.2 (2002).

<sup>125</sup> El lector interesado en analizar cómo se determina las cargas de capital para cada categoría de riesgo puede acudir a Guidance Note GGN 110.3 *Insurance Risk Capital Charge*, Guidance Note GGN 110.4 *Investment Risk Capital Charge* y la Guidance Note GGN 110.5 *Concentration Risk Capital Charge* disponibles a través de la web de APRA <http://www.apra.gov.au>.

<sup>126</sup> Ver Guidance Note GGN 110.1 *Measurement of Capital Base*.

## 6.6. Canadá

En Canadá se usa para evaluar la solvencia presente el Test mínimo de capital (*Minimum Capital Test* o MCT) en las compañías de seguros de no vida y los requerimientos de excedente y del capital mínimo (*Minimum continuing capital and surplus requirements* o MCCSR) para las de vida. Además, para evaluar la solvencia futura de las compañías de vida y no vida, se establece el Test de adecuación dinámica del capital o DCAT (*Dynamic Capital Adequacy Test*). El DCAT es un proceso por el cual se proyecta y analiza las tendencias de suficiencia de capital de una aseguradora, para entender su perfil de riesgo y las amenazas potenciales que afronta su nivel de solvencia, dadas las circunstancias actuales, su pasado reciente, y el plan de negocios proyectado bajo una variedad de escenarios futuros. El Instituto Canadiense de Actuarios (*Canadian Institute of Actuaries*, CIA) ha establecido un Estándar Profesional sobre el DCAT que proporciona una guía para su puesta en práctica. El actuario designado debe realizar anualmente una prueba de DCAT y elaborar el denominado Informe DCAT.

El propósito del Test de adecuación dinámica del capital es ayudar a evitar las situaciones de insolvencia. Para eso, el DCAT es concebido para ayudar a los directivos en el cálculo, gestión y planificación del riesgo; al mismo tiempo que trata de identificar posibles amenazas, acciones que disminuyan la probabilidad de dichas amenazas y acciones que podrían mitigar las amenazas en caso de que se éstas se produjesen.

### *Seguros no vida*

Antes del año 2003, se realizaba un test de solvencia de activos (*Minimum Asset Test* o MAT), por la que se requería a los aseguradores no vida mantener un margen de activos superior a los pasivos. En dicho año, fue reemplazada por el test de capital mínimo (*Minimum Capital Test* o MCT). El objetivo del MCT es determinar mejor el riesgo real de los aseguradores y armonizar los requerimientos de capital con los de otros sectores financieros del país. El MCT se aplica a los aseguradores canadienses<sup>127</sup>, y determina el capital mínimo requerido y no necesariamente el capital óptimo, mediante una técnica del tipo RBC. De esta forma el OSFI (*Office of the Superintendent of Financial Institution*) puede prescribir una necesidad de capital más elevado para un asegurador individual considerando factores tales como la experiencia operativa, la diversificación del activo o de las carteras del seguro, etc. Por lo tanto, se considera que el MCT mide la suficiencia capital de un asegurador, pero es sólo uno de los distintos indicadores que el regulador utiliza para determinar la condición financiera, y no se debe utilizar de forma aislada para determinar el *rating* de los distintos aseguradores.

OSFI (2003) establece que los aseguradores de no vida deben satisfacer el test denominado “capital disponible a capital requerido” (*capital-available-to-capital-required*). De esta forma el MCT fija un requerimiento de capital basado en el riesgo:

$$\text{MCT} = (\text{Capital Disponible} / \text{Capital Requerido}) \cdot 100$$

---

<sup>127</sup> Para los aseguradores no vida extranjeros se aplica desde 2003 un test de suficiencia de los activos (*Branch Adequacy of Assets Test* o BAAT) que usa también una técnica RBC. Véase OSFI (2002a).

El valor del capital disponible debe ser por lo menos igual al capital requerido, lo que equivale a un valor de la ratio del 100%. El nivel a partir del cual el supervisor (OSFI) podrá emprender medidas regulatorias es fijado en un valor de la ratio inferior a 150%. El Capital Requerido es la simple suma de las cargas de capital estipuladas para cada categoría de riesgo.

El capital disponible para un asegurador no vida tiene que cumplir tres consideraciones primarias que son: permanencia; estar libre de cualquier obligación de hacer pagos en función de las ganancias y tener una posición legal subordinada a los derechos de los asegurados y de otros acreedores de la institución. El Capital Requerido se establece en función de las siguientes categorías de riesgo:

- Capital requerido para activos en Balance (*Capital Required for On-Balance Sheet Assets*). Determina unas cargas de capital para cubrir los activos del balance, las inversiones en subsidiarias y filiales, y un capital para colaterales y garantías tanto para los activos en balance como los que están fuera del balance.
- Capital requerido para los pasivos (*Capital Required for Policy Liabilities*). Para el MCT, el riesgo asociado con los pasivos de pólizas se dividen en tres categorías: variación de las provisiones para prestaciones no pagadas (*Unpaid Claims*); posible insuficiencia de las provisiones por primas no ganadas (*Unearned Premiums*) y ocurrencia de catástrofes. Las cargas de provisiones para prestaciones y primas no pagadas se aplican a la cantidad neta de riesgo por un tipo o porcentaje en función de la clase o línea de seguro<sup>128</sup>.
- Capital para Reaseguro (*Reinsurance Receivables and Recoverables*). Se establecen distintos factores en función de si el reasegurador está o no registrado en Canadá.
- Capital para riesgos fuera de Balance (*Capital Required for Off-Balance Sheet Exposures*). La cantidad de capital requerida para apoyar el riesgo de un asegurador no vida asociado a las actividades fuera de balance es igual a: el valor del instrumento menos el valor de la garantía o del colateral, multiplicado por un factor que refleja la naturaleza y la madurez del instrumento (el denominado *Credit Conversion Factor*<sup>129</sup>). Y finalmente, el resultado anterior multiplicado por un factor que refleje el riesgo de crédito de la contraparte<sup>130</sup>.

## 6.7. Propuesta de Alemania para Solvencia II (GDV 2005)

La Asociación Alemana del Seguro (GDV), el regulador alemán (BaFin) y la Asociación Actuarial (DAV) han elaborado una propuesta de modelo estándar para el

---

<sup>128</sup> Para las primas no ganadas el rango de porcentajes va del 5% al 15%, el porcentaje para las prestaciones no pagadas es del 8%.

<sup>129</sup> Los valores aplicados son 100%, 50% o 0%.

<sup>130</sup> Los valores van desde 0% a 8%.

Pilar I o de Solvencia II en el año 2005 (GDV, 2005). El modelo usa un método RBC en el que se examinan todos los riesgos relevantes de activo y pasivo que hace frente una compañía aseguradora y las correlaciones entre ellos. El horizonte temporal empleado es el de un período, por ello se puede decir que para el seguro de vida y de salud se emplea el concepto de empresa en liquidación o “run-off”. Los riesgos potenciales individuales se agregan en unidades monetarias para el cálculo del SCR y se compara con el capital disponible (ASM). El análisis de solvencia se efectúa en función de la ratio:

$$\frac{ASM}{SCR} \geq 1$$

Por lo que una compañía será solvente si la ratio  $ASM/SCR$  toma un valor igual o superior a la unidad. Es decir, debe de cumplirse que  $ASM \geq SCR \geq MCR$ . Las características fundamentales de esta propuesta son:

- Se han desarrollado 3 modelos específicos para las compañías de vida, no vida y salud que calculan el SCR. Cada uno de ellos tiene una estructura modular, para poder hacer adaptaciones a las circunstancias de otros países europeos.
- Se basa en un análisis del valor de mercado desde una perspectiva económica.
- Se intenta reflejar aspectos de la gestión de activos y pasivos (*Asset Liability Management, ALM*), al modelizar los riesgos de tipo de interés para los títulos de la renta fija.
- El modelo considera efectos de correlación mediante una tabla entre los distintos riesgos y calcula el VaR al 99,5%.
- Se dan incentivos para que las compañías o grupos inviertan en el desarrollo de modelos internos para el cálculo del SCR.
- Se establecen las partidas y la valoración que debe efectuarse de cada una de ellas para el cálculo del ASM.
- La propuesta está en línea con el modelo de la desarrollado por la Asociación Internacional de actuarios (IAA, 2004).
- El cálculo del SCR en no vida se efectúa a partir de las siguientes categorías: riesgo de inversión (*G1 risk*), riesgo operacional (*G2 risk*), riesgo de primas y reservas (*NL1 risk*) y riesgo de *default* de los reaseguradores (*NL2 risk*).

En la siguiente tabla se resumen de los riesgos que tienen en cuenta en la propuesta alemana para el cálculo del SCR.

Riesgo de inversión (G1 risk)	Riesgo asegurador	Riesgo operacional
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Riesgo de crédito.</li> <li>-Riesgo de mercado.</li> <li>-Riesgo de concentración.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Riesgo asegurador en vida (L).</li> <li>-Riesgo asegurador en no vida.               <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Riesgo de primas y provisiones.</li> <li>2. Riesgo por impago del reaseguro.</li> </ol> </li> <li>-Riesgo asegurador en salud (H).</li> </ul>	

Fuente: GDV (2005)

### 6.8. Modelos de agencias de rating (Caso de S&P)

Standard and Poor's (modelo S&P CAR), al igual que otras agencias de rating como A.M. Best (modelo BCAR), Moody's o Fitch (modelo Prism), emplean un sistema de capital basado en el riesgo para evaluar la posición financiera de las compañías aseguradoras. S&P trata la suficiencia de capital de acuerdo con el nivel de capital necesario teniendo en cuenta la estructura y la calidad de dicho capital. De esta forma se analizan factores cualitativos y cuantitativos y se calcula el cociente CAR (Capital Adequacy Ratio):

$$CAR = \frac{\text{Capital total ajustado (TAC)} - \text{Riesgo de inversión (C1)} - \text{Riesgo de crédito (C2)}}{\text{Riesgo asegurador (C3)} + \text{Riesgo de provisiones (C4)} + \text{Otros riesgos del negocio (C5)}}$$

Cada categoría de riesgo (C1 a C5) se divide en componentes. Para cada componente se determina una *proxy* o medida de exposición que se multiplica por el factor de riesgo para determinar la carga de riesgo por componente. De esta forma la suma de todas las cargas por componentes de riesgo da lugar a la carga de capital de riesgo para la categoría.

Standard and Poor's (2003) clasifica a los aseguradores en diversas categorías (véase la tabla inferior). La categoría más elevada es AAA que se corresponde con una posición financiera "extremadamente fuerte". Categorías sucesivamente inferiores son AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, que se corresponde con una posición extremadamente débil en la cual es probable que el asegurador no sea capaz de asumir alguna de sus obligaciones financieras. Un asegurador clasificado en una categoría de BBB o superior, se espera que tenga una fortaleza financiera que compense cualquier vulnerabilidad, y es altamente probable que resuelva sus obligaciones financieras. De esta forma BB sería el grado de menor vulnerabilidad dentro del rango y CC el más alto. R es el grado que se aplica a los aseguradores que están bajo supervisión o acción reguladora por su debilidad financiera. NR o "not rated", implica que no se emite opinión sobre la fortaleza financiera. Además,

los grados del rango AA-CCC son modificados por el signo más (+) o menos (-) mostrando la situación relativa dentro de las categorías principales. Los ratings a corto plazo se establecen en las siguientes categorías A-1, A-2, A-3, B, C, R y NR, pudiendo ser modificadas de nuevo por el signo + o -.

<b>Rangos de adecuación del capital</b>		
<b>Rango</b>	<b>Rating equivalente</b>	<b>Adjetivo</b>
>175%	AAA	Extremadamente fuerte
150%-175%	AA	Muy fuerte
125%- 150%	A	Fuerte
100%-125%	BBB	Bueno
<100%	BB o inferior	Vulnerable

### **6.9. Propuesta CEA**

El Comité Europeo de Seguros (*Comité Européen des Assurance*, CEA) ha presentado en Marzo de 2006 un documento (CEA, 2006a) que explica su propuesta preliminar para calcular el SCR del Pilar I de Solvencia II por el método estándar (*European Standard Approach* o ESA). Las bases del marco propuesto se resumen en:

- La valoración de activos y pasivos es consistente con el mercado.
- Se requiere un capital para cada uno de los tipos principales de riesgo por separado basado en un factor simple (RBC). Para los riesgos de mercado/ALM y el riesgo asegurador se permite la opción de utilizar una técnica de escenarios para permitir a las compañías representar mejor sus circunstancias individuales. Los escenarios que se utilizarán se deben fijar de forma consistente con el ajuste de los factores estándar.
- Se tiene en cuenta la mitigación de riesgos y el reaseguro.
- Se permite la diversificación entre tipos de riesgos y se considera cierta combinación entre ellos. Estos aspectos se tienen en cuenta en la agregación de riesgos a través de una matriz de correlación.
- Se proporciona una técnica simple y suficientemente conservadora para proporcionar incentivos para desarrollar procesos de gestión de riesgo y técnicas más sofisticadas.

Los riesgos considerados en el ESA para el modelo del SCR, y para los cuales se debe calcular un requisito de capital por separado son los mostrados en la siguiente tabla: riesgos de mercado, riesgos aseguradores, riesgo de crédito y operativo.

ESA o método estándar		Modelos internos
Modelo de factor	Modelo específico de la compañía	
Riesgo asegurador Riesgo ALM/Mercado Riesgo de crédito Riesgo operativo	Riesgo asegurador Riesgo ALM/Mercado	Riesgo asegurador Riesgo ALM/Mercado Riesgo de crédito Riesgo operativo
<i>Uso del modelo de factores estándar.</i>	<i>Uso del mismo modelo de factores con información específica de la compañía. Para ciertos riesgos uso de escenarios.</i>	<i>Uso de modelos internos, con información específica de la compañía y una visión prospectiva basada en juicios.</i>

Fuente: CEA (2006a).

### *Agregación de riesgos y efecto de absorción de riesgos*

La agregación de los riesgos se efectúa a dos niveles. En un primer nivel se agrega cada subtipo de riesgo en la categoría de riesgo a la que pertenece, a través de una matriz de correlación. En el segundo nivel se agregan las cuatro categorías de riesgo (mercado, asegurador, crédito y operativo). Posteriormente hay que analizar la capacidad de absorción del riesgo por los pasivos (*future profit sharing*). El principio reside en que se debe reflejar en el cálculo del SCR la capacidad de las compañías de ajustar la distribución de beneficios frente a circunstancias adversas futuras. Los pasivos con participación en beneficios (*Profit liabilities*) se incorporan al cálculo incluyendo una compensación a los requerimientos de capital igual a un factor  $k^{131}$  multiplicado por el valor de mercado de la distribución de beneficios futura.

En la siguiente tabla se resume el cálculo del SCR en la propuesta de la CEA para el negocio de vida y no vida.

<sup>131</sup> Este factor  $k$  (entre 0 y 1) será mayor cuánto mayor capacidad de absorción del riesgo por los pasivos de la compañía.

SCR Total			
Agregación/ Diversificación/ Absorción del riesgo por los pasivos			
Riesgo ALM/ Mercado	Riesgos asegura- dores	Riesgo de crédi- to	Riesgo operativo
Impacto en los Activos y Pasivos: - Acciones/ Pro- piedades inmo- biliarias - Tipos de interés - Diferenciales de crédito - Tipos de cambio	<u>Vida</u> - Mortalidad - Longevidad - Cancelaciones - Gastos <u>No vida</u> - Primas - Provisiones - Catástrofes	- Deterioro del rating de presta- mos y bonos a través de los dife- renciales de crédi- to del riesgo de mercado. - Reaseguro y riesgo de la con- traparte en deri- vados.	Empleo de facto- res: - Primas - Provisiones

Fuente: CEA (2006a).

De esta forma, el SRC final es la suma del requisito de capital después de la diversificación menos el efecto de la absorción del riesgo por los pasivos.

Capital requerido por riesgo	Riesgo de mercado/ ALM	Riesgo asegurador - Vida - No vida	Riesgo de crédito	Riesgo operativo
<b>Agregación</b>	Paso 1: Dentro de cada categorías de riesgo mediante matriz de correlación Paso 2: Entre categorías de riesgo mediante matriz de correlación			
<b>Absorción del riesgo</b>	Pasivos con participación en beneficios <i>k</i> *. Valor de Mercado de las futuras participaciones en beneficios			
<b>SRC final</b>	<i>Requisito de capital después de la diversificación – Absorción del riesgo</i>			

Fuente: CEA (2006a).

## 6.10. Propuesta IAA

La Asociación Internacional de Actuarios, y más concretamente el Grupo de Trabajo sobre el Cálculo de la Solvencia de un Asegurador (*Insurer Solvency Assessment Working Party*), en el año 2004 propuso una guía (IAA, 2004) para facilitar la evaluación de la solvencia a los supervisores. Los principios claves usados en el desarrollo del marco para la supervisión de la solvencia eran:

- Régimen supervisor basado en 3 pilares.
- Cálculo de la solvencia basado en principios claros, en detrimento del uso de reglas.
- Se debe proceder a una valoración de activos y pasivos consistente con el mercado de forma que no haya reservas ocultas.
- El grado de protección debe ser determinado en función del horizonte temporal que es analizado. En este sentido se proponen dos test, uno a corto plazo (1 año) donde las necesidades de capital se calculan utilizando un intervalo de confianza del 99%, y otro a largo plazo a través de la realización de diversos test. De forma alternativa se puede realizar un análisis para el período global en cuyo caso el nivel de confianza se reducirá (al 95% o 90%).
- Los riesgos que se considera que deben ser tratados en el Pilar I son el riesgo de mercado, el asegurador, el operativo y el riesgo de crédito. Los riesgos que no sean tratados en el Pilar I deben ser examinados en el Pilar II.
- Los riesgos deben cuantificarse a través de medidas de riesgo adecuadas, siendo la preferida de la Asociación Internacional de Actuarios el Tail VaR (TVaR).
- Se debe reconocer, en el cálculo de la solvencia de una compañía, el impacto de la mitigación, concentración y diversificación del riesgo.
- Es importante establecer relaciones que tengan en cuenta la dependencia en casos extremos mediante cópulas.
- Los riesgos con un mayor impacto deben ser tratados de forma más exacta que los más inmateriales.
- Para las compañías con suficientes recursos puede ser apropiado recurrir a métodos sofisticados a través de modelos internos. Una fortaleza de los modelos internos es que permite capturar de mejor forma las interrelaciones entre los riesgos que en el caso de una simple agregación. Para aprobar el uso de técnicas avanzadas los supervisores tendrán en consideración: la calidad de los procedimientos de gestión de riesgo de la compañía, la calidad y experiencia del personal de la compañía, la integridad de los datos, la calidad del modelo y los controles.

## **7. RESUMEN DE LOS MODELOS ANALIZADOS**

La revisión de los modelos analizados nos permite hacer una distinción, siguiendo las clasificaciones hechas por IAIS (2002), entre modelos estáticos, basados en la contabilidad o retrospectivos y modelos dinámicos, basados en flujos de caja o prospectivos. A continuación se establecen las principales diferencias entre ellos y posteriormente se clasifican los distintos modelos analizados.

## A. Modelos retrospectivos

Los modelos estáticos o retrospectivos aplican factores definidos, por lo que a menudo se les denomina basados en reglas. Entre los tipos de modelos retrospectivos se distingue entre modelos de ponderación fija y modelos basados en el riesgo:

### A.1. Modelos de ponderación fija

Establecen los requisitos de solvencia como un porcentaje fijo del valor de una o más variables dadas, que se entiende mantiene una estrecha correlación con el grado de exposición al riesgo de las aseguradoras. Estas medidas de volumen incluyen variables contables, ya sea de Balance o de la Cuenta de Pérdidas y Ganancias, de las aseguradoras: primas, siniestros, provisiones técnicas, etc. De esta forma, sólo se consideran una o pocas áreas de riesgo. La ventaja principal de estos modelos es que son objetivos, simples de aplicar y de entender los resultados, teniendo unos costes de aplicación bajos. No obstante, debido a esa misma simplicidad, es difícil su individualización al caso específico y particular de cada aseguradora, y el poder de predicción de insolvencias es débil.

### A.2. Modelos basados en el riesgo (RBC)

El objetivo es eliminar los inconvenientes de los métodos de ponderación fija incorporando todos los riesgos que se estima acontecen en la actividad aseguradora, de forma que es una solución más sensible a los riesgos. Además, se suele incluir una fórmula más o menos compleja que refleje la correlación o independencia de los riesgos. Entre las ventajas de estos modelos podemos citar que: son objetivos, con costes no significativos y que mejoran respecto a los anteriores la predicción de insolvencias. Los modelos basados en el riesgo tienen el inconveniente de ser más difíciles de aplicar. Además, es necesario encontrar el equilibrio entre el número de factores de cada componente, la complejidad de la fórmula y la facilidad de su aplicación, así como encontrar la razón de correlación entre los distintos factores de riesgo que se quieren considerar.

## B. Modelos prospectivos

Los modelos de ponderación fija y RBC presentan el inconveniente de ser puramente retrospectivos. Los modelos prospectivos calculan las exigencias de solvencia sobre la base de datos históricos, pero también factorizando las hipótesis sobre cambios en la compañía y el mercado. Como ventaja presenta que mide la solvencia desde una perspectiva futura, como desventaja que los resultados obtenidos sólo son válidos si el modelo refleja correctamente el comportamiento de la compañía en relación al futuro al que se enfrenta la compañía. De ahí que la dificultad de este tipo de modelos resulta en analizar eventos y situaciones que son a menudo difíciles de predecir y cuantificar. Así, pese a tener una considerable subjetividad, incrementan el poder de predicción de insolvencias.

Los modelos de solvencia más recientes (Suiza, Países Bajos, Reino Unido, Canadá y Australia) incluyen modelos dinámicos para, por lo menos, alguno de los riesgos cubiertos. La motivación para esto reside en que los modelos prospectivos presentan flexibilidad para aplicar a una compañía específica, calculan bien los riesgos de ALM e incentivan mejoras en la gestión del riesgo de las sociedades. Por otra parte, la desventaja de los modelos dinámicos reside en que requieren un mayor esfuerzo para su puesta en práctica.

Dentro de los modelos prospectivos podemos hablar de modelos basados en escenarios y modelos basados en principios.

### *B.1. Modelos basados en escenarios*

La solvencia de la compañía de seguros se mide en función del impacto de escenarios prefijados o especificados a través de la proyección descontada de los flujos de liquidez. Un ejemplo de esto sería el SST, donde se solicita a las compañías de seguros calcular el impacto de una caída fija en los precios de sus inversiones en su posición financiera. Estos modelos tienen costes de implantación no excesivos y son en parte subjetivos. Como ventajas cabe citar: son bastante flexibles, tienen poder de predicción de insolvencias elevado e incentivan la gestión de riesgos de la compañía.

### *B.2. Modelos basados en principios o modelos probabilísticos*

En estos modelos no se especifican reglas, sino que se solicita a cada compañía de seguros que, siguiendo unos principios propuestos, elabore su propia opinión de los requisitos de capital en base a su propio modelo interno. Como ejemplo, destaca el cálculo del capital individual (ICA) de la autoridad de supervisión del Reino Unido, la FSA. Estos modelos tienen elevados costes de implantación y son muy subjetivos. Como ventajas destacan que: son muy flexibles ya que son un intento de modelizar la actividad aseguradora, tienen un poder de predicción de insolvencias muy elevado e incentivan de manera notable la gestión de riesgos de la compañía.

La siguiente tabla clasifica en las categorías anteriormente mencionadas los distintos modelos analizados a lo largo de este primer capítulo.

1. Modelos retrospectivos/ estáticos o basados en la contabilidad		2. Modelos prospectivos/ dinámicos o basados en flujos de caja	
1.1 Modelos de ponderación fija	1.2 Modelos RBC	2.1 Modelos basados en escenarios	2.2 Modelos basados en principios o probabilísticas
- Solvencia I	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modelos de agencias de rating (S&amp;P)</li> <li>- Propuesta GDV (2005)</li> <li>- Modelo NAIC (USA)</li> <li>- Modelo ESA de CEA</li> <li>- FTK (riesgos aseguradores)</li> <li>- Australia (modelo estándar)</li> <li>- UK (ECR no vida)</li> <li>- Canadá</li> <li>- Propuesta IAA</li> <li>- Solvencia II (modelo estándar)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- SST (escenarios prefijados)</li> <li>- UK (ECR vida)</li> <li>- FTK (riesgos financieros)</li> <li>- Canadá (DCAT)</li> <li>- Australia (modelos internos)</li> <li>- Solvencia II (modelo estándar o internos)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- SST (escenarios específicos)</li> <li>- UK (ICA)</li> <li>- FTK (análisis de continuidad)</li> <li>- Solvencia II (modelos internos)</li> </ul>
		<b>MODELOS DFA</b>	

En el siguiente capítulo se explica la técnica de Análisis Financiero Dinámico (DFA). El DFA puede ser empleado en los modelos internos de las compañías aseguradoras para determinar los requerimientos de capital y como herramienta de gestión del riesgo. Los modelos DFA utilizan dos técnicas genéricas para evaluar el impacto financiero futuro de la compañía derivado de las distintas decisiones: los test de escenarios (modelos deterministas) y la simulación estocástica (modelos estocásticos). Por ello, son modelos prospectivos basados en hipótesis sobre las proyecciones de los flujos de caja y del valor del excedente de las compañías. En la literatura existe evidencia de que los sistemas RBC no son tan potentes como los modelos de flujos de caja para la predicción de insolvencias de compañías aseguradoras (véase Cummins *et al.*, 1995, Grace *et al.*, 1998 y Cummins *et al.*, 1999). En la actualidad, son varios los países que permiten el empleo de modelos DFA para la determinación de la solvencia dinámica de los aseguradores. Pese a lo complejidad de elaboración e implementación de estos modelos, se espera que esta técnica se extienda rápidamente por las aseguradoras europeas una vez aprobada Solvencia II.

## CAPÍTULO 2

# EL ANÁLISIS FINANCIERO DINÁMICO (DFA)

### 1. INTRODUCCIÓN

El Análisis Financiero Dinámico (*Dynamic Financial Analysis* o DFA<sup>1</sup>) es un término reciente, que está cobrando mucha importancia en el ámbito actuarial debido a las recientes tendencias del entorno financiero, competitivo y regulador. Entre éstas destacamos: la innovación de productos, el cambio en el mapa de riesgo derivado de cambios demográficos, sociales y políticos, el aumento de la rentabilidad exigida por el mercado, la intensificación de la competencia que reduce márgenes de beneficio; las crisis de los mercados financieros derivadas del 11-S y de la crisis de crédito internacional y, por último, los numerosos escándalos financieros producidos en los últimos años. Estos factores del entorno, unidos a la adopción de análisis similares en otras instituciones financieras y la mayor sofisticación tecnológica necesaria para acomodar las técnicas implícitas en DFA, han puesto al día las técnicas avanzadas de gestión del riesgo. Otra fuerte motivación ha sido la aprobación por parte de varias autoridades reguladoras del uso de modelos internos para el cálculo de los requerimientos de capital de las compañías aseguradoras, destacando especialmente la puesta en marcha de Solvencia II. Entre las consideraciones que tienen en cuenta las autoridades de los distintos países para la aprobación de tales, es que sean empleados en la compañía como verdaderas herramientas de gestión del riesgo. Son precisamente estos ámbitos, determinación del capital y gestión y medición del riesgo, donde tienen una mayor aplicabilidad los modelos DFA.

Tradicionalmente, las compañías de seguros se han caracterizado por una división funcional de las áreas financiera y actuarial. Esto dio lugar a dos visiones del negocio de seguro: la visión aseguradora y la visión financiera (Wang, 2002a). La primera ve al seguro principalmente como una operación aseguradora de riesgos; con los fondos recibidos se deben realizar inversiones para obtener rentabilidades bajas pero estables. El énfasis de la compañía está puesto en la gestión del pasivo. La visión financiera se centra en que las primas del seguro se cobran en un momento previo a que las demandas sean pagadas, lo que genera una cantidad

---

<sup>1</sup> A veces, pero de forma menos frecuente, se pueden encontrar los términos *Dynamic Financial Modeling Analysis*, *Dynamic Financial Modeling* o, en el caso de los modelos DFA de compañías reaseguradoras, *Reinsurance Dynamic Financial Analysis*.

de fondos disponibles para invertir en una amplia gama de títulos. Es decir, la operación aseguradora es esencialmente crear un fondo de dinero para su inversión poniéndose el énfasis en la gestión de los activos.

Dentro del enfoque tradicional, cada área funcional tomaba sus decisiones de forma independiente; el análisis actuarial se realizaba en el lado asegurador sin ninguna relación con el lado inversor de la compañía. Esta separación proporcionaba resultados aceptables en entornos financieros y actuariales estables, tal y como ocurrió en la década de los 80, por lo que no había necesidad de un análisis sofisticado. En la década de los 90 el entorno se volvió más complejo debido a factores como: el aumento en la volatilidad de los mercados financieros (inflación, tipos de interés y tipos de cambio), la competitividad creciente en los mercados aseguradores, la mayor internacionalización de las compañías, la creación de conglomerados financieros y el desarrollo de nuevos productos.

Frente al análisis actuarial clásico en el cual diversos aspectos de una compañía eran considerados aisladamente, la característica más importante de DFA es que realiza un análisis integrado o holístico. Así, DFA modela las reacciones de la compañía en respuesta a un gran número de factores de riesgo correlacionados que incluyen los riesgos aseguradores y de inversión (Blum y Dacorogna, 2004). Hodes y Feldbum (1999) destacan que a principios de la década de los 90, DFA era un término desconocido para la mayor parte del sector asegurador. Su uso en la última década se ha extendido gracias a la gran competitividad del sector y al aumento del riesgo financiero, lo que provoca que aquellas compañías inmersas en el enfoque clásico se enfrenten a serios problemas en el futuro (Berliet y Lowe, 1999). Por tanto, se espera que las empresas que empleen DFA tengan mejores resultados, lo que será positivo para inversores y asegurados. En Estados Unidos., la CAS (*Casualty Actuarial Society*) y la SOA (*Society of Actuaries*)<sup>2</sup> han contribuido en gran medida a promover el conocimiento de esta técnica.

Para ver una definición introductoria del Análisis Financiero Dinámico basta con explicar uno a uno los términos que lo integran. El término Análisis se refiere a la comprensión de las distintas partes de un problema y de sus interrelaciones. El término Financiero refleja la integración del lado asegurador e inversor, contrario a las técnicas tradicionales que analizaban ambos lados de forma separada. Dinámico indica que se realiza una proyección estocástica de los flujos de caja de la compañía de seguros obteniendo como *output* del modelo una distribución de resultados. Como veremos posteriormente, la condición indispensable para que un modelo estocástico sea realmente dinámico es que contenga lazos de regeneración. Estos lazos proporcionan una retroalimentación al propio modelo a medida que se van generando las simulaciones para los distintos periodos, afectando a las decisiones estratégicas.

---

<sup>2</sup> Tanto la CAS como la SOA son organizaciones cuyo propósito es avanzar en el campo de conocimiento de la ciencia actuarial. La CAS lleva desde el año 1996 solicitando publicaciones sobre el DFA. En el *Risk and Capital Management Seminar* del año 2002 la CAS solicitó por primera vez artículos en los que se aplicase el DFA a instituciones financieras distintas de las compañías aseguradoras de no vida, es decir, de la visión tradicional de DFA.

## 2. HISTORIA Y EVOLUCIÓN DE LOS MODELOS DE DFA

DFA tiene sus orígenes después de la Segunda Guerra Mundial en los trabajos de planificación estratégica a través de escenarios desarrollados por Rand Corporation (Casualty Actuarial Society, 1999a). El uso de DFA en la industria aseguradora empezó con los trabajos de los grupos finlandeses y británicos cuyo foco era la solvencia de las compañías de vida. El trabajo de la “*British Solvency Working Party*” se puede ver en Daykin *et al.* (1987) y Daykin y Hey (1990), mientras el de la “*Finnish Working Party*” se puede consultar en Pentikäinen y Rantala (1982) y Pentikäinen *et al.* (1989). El objetivo de dichos trabajos era probar la insuficiencia de los documentos contables para evaluar la solvencia futura de las compañías, ya que proporcionaban valoraciones demasiado estáticas y retrospectivas. Llegaron a la conclusión de que era necesario redefinir la solvencia de las compañías desde una base estática a una dinámica (*going concern*) enfocada en el flujo de liquidez.

Posteriormente la técnica DFA se implantó en Canadá y en Estados Unidos con un objetivo regulador bajo nombres como Test de Solvencia Dinámico (*Dynamic Solvency Testing*) o Análisis de la Condición Financiera (*Dynamic Financial Condition Analysis*). En la actualidad, DFA se ha convertido en una herramienta versátil de planificación estratégica que analiza las ventajas y riesgos asociados a distintas alternativas para la toma de mejores decisiones estratégicas (Correnti *et al.* 1998, Hodes *et al.* 1996). Por tanto, DFA se usa principalmente para comparar diversas estrategias en términos de rentabilidad-riesgo (Kaufmann *et al.* 2001). Al mismo tiempo, ha mejorado su potencial aplicabilidad para propósitos de supervisión de la solvencia debido a la tendencia reciente entre las autoridades a adoptar técnicas de capital basado en el riesgo (Shiu, 2006). En Europa el impulso definitivo de las técnicas de análisis dinámico se producirá tras la entrada en vigor de Solvencia II que, al vincular el capital necesario al nivel de riesgo, estimulará a que las compañías de seguros dispongan de modelos internos para determinar las necesidades de recursos propios. En este sentido Lozano (2005) indica que el nuevo proyecto de solvencia generalizará los sistemas de gestión de riesgos e impulsará la construcción de modelos internos por parte de las compañías de seguros. Por otra parte, el mercado penalizará a aquellas compañías que carezcan de modelos y les aplicará una prima de riesgo. En definitiva, los modelos DFA han surgido como respuesta a las nuevas necesidades de las compañías aseguradoras ante un entorno cada vez más complejo y dinámico. Shiu (2006) identifica dos tendencias principales que conducen a la aparición de los modelos DFA: el cambio en las técnicas empleadas en los modelos financieros desde una naturaleza determinista y estática a otra estocástica y dinámica, y el mayor énfasis en la correlación entre las variables empleadas. Siguiendo el Manual DFA de la CAS (Casualty Actuarial Society, 1999b) en este trabajo se identifican cinco etapas o tipos de modelos financieros en la evolución hacia los modelos DFA:

- El presupuesto financiero o técnicas de predicción estática. Son modelos estáticos que utilizan un conjunto de hipótesis sobre las variables claves del problema para predecir la situación futura más probable. Es decir, se fijan hipótesis sobre los resultados futuros de las distintas divisiones o unidades de negocio de

una compañía, y combinando dicha información se toman las decisiones de negocio. Es, por tanto, un modelo simple que proyecta la condición financiera futura de la compañía asumiendo que el estado del asegurador y del entorno en el cual opera permanecen inalterados.

- Los modelos de test de sensibilidad (*sensitivity testing* o *sensitivity analysis*). Intentan identificar las hipótesis o variables principales en el modelo y evaluar su impacto relativo mediante variaciones en dichos factores. Shiu (2006) destaca dos problemas principales en los test de sensibilidad: la dificultad de determinar el cambio concreto a realizar en la variable, y la posible ruptura de las correlaciones entre las variables debido al cambio aislado de una de ellas.
- Los tests de estrés o *stress testing*. A diferencia con el test de sensibilidad, en el *stress testing* se producen cambios en un grupo de variables, pudiendo establecer así las correlaciones entre las variables en un escenario determinado<sup>3</sup>.
- Los modelos estocásticos. Son modelo probabilísticos que permiten describir las hipótesis críticas en términos del rango de resultados posibles, en vez de valores y resultados fijos. Es decir, los valores de las variables en los escenarios establecidos en la simulación estocástica son seleccionados aleatoriamente de las distribuciones de probabilidad asumidas, mientras que en el test de escenarios se predeterminan de forma determinista.
- Los modelos dinámicos empleados en DFA. Estos modelos se diferencian de los anteriores en que incorporan lazos de regeneración (*feedback loops*) y decisiones de la gerencia, dotándolos de cierta inteligencia artificial. Por ello, tal y como afirman Blum y Dacorogna (2004), no incorporar la evolución de las estrategias a lo largo del periodo de proyección puede reducir la plausibilidad y la exactitud de los resultados de DFA.

Vista la evolución de los modelos financieros hacia los modelos DFA, es interesante analizar ahora las técnicas que éstos últimos emplean. Las técnicas empleadas en los modelos dinámicos DFA se engloban en dos amplias categorías: test de escenarios y simulación estocástica<sup>4</sup> (Feldblum, 1992). Ambas técnicas no son incompatibles entre sí y su uso dependerá del fin concreto que se persiga. La diferencia principal entre ambos métodos es que el primero genera escenarios consistentes prefijados para cada conjunto de hipótesis. Por lo tanto, los escenarios construidos en el test de escenarios son normalmente más realistas que la mayor

---

<sup>3</sup> La Casualty Actuarial Society (1999a) considera los test de sensibilidad y estrés en una misma etapa de evolución hacia los modelos dinámicos.

<sup>4</sup> Los modelos de DFA originalmente también se podían diferenciar en función de si usaban una perspectiva contable o basada en el flujo de liquidez. El grupo de trabajo finlandés, como en Pentikäinen y Rantala (1982) y Pentikäinen *et al.* (1989), utiliza una perspectiva contable. El grupo de trabajo británico utiliza la perspectiva del flujo de liquidez; Daykin *et al.* (1987) desde la supervisión de la solvencia por parte del gobierno y Daykin y Hey (1990) para la gestión interna de la compañía. Para ellos, los activos y los pasivos se deben considerar de forma conjunta, aspecto que el enfoque tradicional basado en el balance no considera. Daykin *et al.* (1994) combinan los análisis finlandeses y británicos y, por lo tanto, añaden la perspectiva contable con la del flujo de liquidez. Actualmente los modelos de DFA se basan en proyecciones de flujos de caja.

parte de los escenarios que resultan generados por simulación estocástica. La forma de que en la simulación estocástica se generen escenarios realistas es la adecuada correlación de las distintas variables del modelo. Así, un modelo DFA puede estar basado en la simulación estocástica y como complemento realizar un test de escenarios para evaluar el impacto de determinadas evoluciones de la curva de tipos de interés. La compañía puede realizar un test de escenarios que analice la solvencia de la compañía en un entorno de alta inflación, acompañada de subidas de tipos de interés y caídas de la rentabilidad de las acciones y del valor de los títulos de renta fija. Este escenario determinista parece consistente con las hipótesis clásicas de la teoría económica y financiera. Por el contrario, si empleamos la técnica estocástica, a priori nada nos garantiza que el comportamiento de dichas variables en un escenario particular sea coherente. Actualmente el empleo de técnicas para correlacionar las variables, aporta una garantía de que los escenarios generados por el modelo sean consistentes. Las ventajas y desventajas asociadas a cada técnica se muestran en la siguiente tabla.

Técnica	Ventajas	Inconvenientes
Simulación estocástica	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Permite simular una amplia gama de distintos escenarios, que explican la naturaleza estocástica de las operaciones de seguro.</li> <li>2. El <i>output</i> del modelo permite representar la incertidumbre de las proyecciones realizadas mediante el empleo de modernas medidas de riesgo. Los gráficos, entre los que destacan los de evolución temporal y las funciones de distribución para cada período de análisis, son una forma intuitiva de tratar con dicha incertidumbre.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. En la técnica de simulación estocástica con variables no correlacionadas muchos de los escenarios generados no serán realistas.</li> </ol>
Test de escenarios deterministas	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los escenarios construidos son más significativos, tangibles y consistentes, y sus resultados son por consiguiente relativamente fáciles de entender.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Los escenarios pueden no ser exhaustivos al centrarse en evaluar el impacto financiero de determinadas decisiones analizadas.</li> <li>2. La evolución de dichas variables es fruto de opiniones internas o externas particulares (el regulador o expertos), y no tienen porqué coincidir con las opiniones de otras fuentes.</li> </ol>

### 3. ¿QUÉ ES REALMENTE DFA?

En definitiva, DFA es una herramienta más efectiva que los análisis tradicionales del riesgo porque permite tener en cuenta las interacciones entre la actividad inversora y aseguradora y se beneficia de las ventajas de las técnicas de modelización y de la informática para proporcionar un *feedback* instantáneo a los usuarios (D'Arcy *et al.*, 1998). Además, los modelos dinámicos evolucionan a partir de los modelos estocásticos tradicionales, por lo que tienen la capacidad de describir las hipótesis críticas en términos de conjuntos de resultados posibles, en vez de en términos de valores fijos como emplean las técnicas deterministas. DFA es el proceso que consiste en la simulación de la actividad aseguradora de forma integral a través de la modelización estocástica de las variables determinantes de la evolución de los activos y pasivos cuyos fines, en general, son la solvencia de la compañía y la gestión del riesgo. Los modelos financieros tradicionales analizan por separado las decisiones de inversión y aseguradoras. Por el contrario, un modelo financiero integrado promueve una mejor comprensión de cómo las decisiones económicas le afectan a toda la organización.

La importancia de los modelos integrales reside en que las decisiones aseguradoras y de inversión están interrelacionadas desde el punto de vista de la organización. Las decisiones que pueden ser apropiadas en el contexto de una unidad de negocio, pueden no ser la mejor línea de conducta para la compañía en su totalidad. La gestión aislada de activos y pasivos no es óptima porque descuida los efectos de diversificación que se producen a un nivel global de empresa (Eling y Parnitzke, 2007). Por ello, en la literatura actuarial y financiera se destaca que la característica más importante del DFA es la opinión integrada y holística sobre la compañía de seguros. En la práctica esta interrelación entre las distintas unidades de la compañía de seguros tiene las ventajas siguientes (Klaas y Romeike, 2005): gasto mínimo en la adquisición de información en el proceso de toma de decisiones; la información está disponible de forma más rápida, económica y en la calidad adecuada; y cada unidad de la compañía tiene acceso a la misma información, lo que conduce a decisiones consistentes en toda la compañía.

DFA es también una herramienta muy útil para todas las personas interesadas en la evolución de la situación financiera de una compañía de seguros. Así, las proyecciones realizadas por un modelo DFA permiten:

- A los accionistas u otros inversores de la compañía evaluar la capacidad futura del excedente para soportar los riesgos y proporcionar rentabilidad sobre el capital invertido.
- A los entes reguladores y agencias de calificación crediticia supervisar la solvencia de las compañías, identificando y midiendo los riesgos significativos a su situación financiera.
- A los directivos de la compañía cuantificar el impacto de las condiciones futuras del entorno interno y externo de la compañía, sobre los resultados obtenidos por la compañía, así como diseñar y/o modificar planes de negocio.

Son muchas las definiciones que se han dado sobre DFA, ya que como afirma Kaufmann *et al.* (2001) es imposible definir o describir una metodología única de DFA. Según Shiu (2006), DFA es el proceso por el cual se proyecta la situación financiera de un asegurador bajo un conjunto de hipótesis consistentes, cuyo fin es evaluar su solvencia o determinadas decisiones estratégicas. D'Arcy *et al.* (1998) indican que DFA es un proceso que examina la situación financiera de una aseguradora a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta las interrelaciones entre las distintas partes y la naturaleza estocástica de los factores que pueden influir en los resultados. De este modo, en la literatura encontramos diferentes definiciones que hemos decidido agrupar en torno a las dos principales finalidades con los cuales son elaborados los modelos DFA:

- Herramienta para la gestión del riesgo y para la toma de decisiones. Blum y Dacorogna (2004) indican que DFA es una herramienta para la gestión del riesgo global de la empresa (*Enterprise Risk Management*, ERM) y de ayuda para la toma de decisiones estratégicas. Estos autores definen DFA como una técnica basada en la simulación estocástica para realizar modelos financieros integrados de compañías de seguros determinando los riesgos y las ventajas asociados a cada decisión estratégica. En esta misma línea, Eling y Parnitzke (2007) destacan que DFA se caracteriza por un acercamiento explícito multi-período orientado a los movimientos de flujos de caja, que se ha convertido en una herramienta importante para el análisis y la toma de decisiones de las compañías aseguradoras.
- Herramienta para evaluar la solvencia. Szkoda (1997) define DFA como el proceso que permite analizar la condición financiera de una compañía aseguradora, es decir, la capacidad del capital y del excedente para llevar a cabo las operaciones futuras en condiciones de solvencia ante un entorno futuro desconocido. Esta visión es también la del Instituto Canadiense de Actuarios (CIA, 1999) que define DFA como una técnica para supervisar la fortaleza financiera de un asegurador y su capacidad de resolver las obligaciones con los asegurados. La CAS (Casualty Actuarial Society, 1995a) establece que un proceso DFA implica probar un número de escenarios adversos y favorables con las operaciones de una compañía de seguros, para determinar la reacción del excedente a dichos escenarios y evaluar así su solvencia.

Centrándonos en la técnica más avanzada de DFA, la simulación estocástica, podemos ver que es una técnica de generación estocástica de los flujos de caja y de los activos y pasivos de una compañía aseguradora para un período de proyección. Está basada en técnicas de simulación de escenarios del tipo Monte Carlo, para el análisis de determinadas variables de resultado que le afectan a dichas aseguradoras. Por ello, también puede ser útil aportar una definición más formal del DFA entendiéndolo como una plataforma que usa varios modelos y técnicas de las finanzas y de la ciencia actuarial y las integra en un modelo de simulación estocástica dinámica (Blum y Dacorogna, 2004).

Por último, es preciso mencionar que el denominado Comité DRM de la CAS (*Dynamic Risk Modeling Committee*) está elaborando un Manual de Modelización Dinámica del Riesgo, término que englobaría al DFA. En su último capítulo, que es un glosario de términos, se proporcionan tres definiciones alternativas de DFA que es útil citar<sup>5</sup>:

1. DFA es una técnica sistemática de modelización financiera en la cual los resultados se proyectan bajo una variedad de escenarios posibles, mostrando cómo pueden estar afectados por cambios en las condiciones internas y/o externas.
2. DFA es una manera de estudiar el comportamiento de los sistemas industriales para mostrar cómo las políticas, decisiones, estructura y retrasos se interrelacionan para influenciar el crecimiento y la estabilidad. DFA integra distintas áreas funcionales como son la comercialización, inversión, investigación, personal, producción y contabilidad. Cada una de éstas es reducida a una base común reconociendo que cualquier actividad económica o corporativa consiste en flujos de dinero, de órdenes, de materiales, de personal y de bienes de equipo.
3. DFA es un análisis que considera todos los componentes materiales de un sistema dado y sus correlaciones en un modelo integrado, proyectando la renta y los flujos de liquidez durante un determinado período de tiempo.

Brooke (2003) destaca que DFA se está convirtiendo cada vez más en una parte importante de la caja de herramientas de la gerencia para los aseguradores generales así como para los aseguradores de vida. Como es obvio, varias compañías y consultoras actuariales disponen en la actualidad de potentes herramientas de software exclusivas o que se pueden adaptar para realizar análisis DFA. Köhnlein *et al.* (2006) muestran múltiples modelos de DFA y ALM<sup>6</sup> que se emplean para realizar la gestión integral del riesgo (ERM). Estos modelos u otros podrían ser adquiridos por las empresas que no deseen desarrollar sus propios modelos en el marco de Solvencia II.

---

<sup>5</sup> El lector interesado puede acceder a dicho glosario a través de la web <http://www.casact.org>

<sup>6</sup> Estos autores consideran que la técnica DFA es aplicable en seguros de no vida y ALM en vida, esta visión es una concepción tradicional, que criticaremos en el siguiente apartado de este trabajo.

Producto de software	Oferente
Igloo	Paratus Consulting/English Matthews Brockmann (EMB)
Remetrica	Benfield Group
Finesse 2000	SS&C
Prophet	BW Deloitte
Moses	Tillinghast
Advice, Gems	DFA Capital Management
DynaMo 3	Pinnacle Actuarial Resources
MetaRisk	Guy Carpenter
Alamos	FJA Feilmeier & Junker
ALM.IT	Gen Re Capital
Risk Explorer	Ultimate Risk Solution
Simulum	Watson Wyatt

Fuente: Elaboración propia a partir de Köhnlein *et al.* (2006).

Vista una primera aproximación a la técnica de DFA, cabe preguntarse ¿qué compañías aseguradoras deberían comprar o desarrollar un modelo?, o de forma menos determinante ¿qué compañías o líneas de negocio pueden extraer mayor provecho a un modelo financiero de DFA? En este sentido Hodes *et al.* (1996) indican que los modelos financieros son menos importantes para los ramos cortos de la compañía, con estabilidad en el número de asegurados, tarifas adecuadas y poca competencia. Pero los modelos financieros son esenciales para las compañías que suscriben líneas largas con fluctuaciones en la suficiencia o adecuación de las tarifas, endurecimientos de la competencia y volatilidad en el número de asegurados. De esto se deduce que es más necesario el empleo de modelos DFA en las compañías o líneas que se enfrentan a entornos más complejos y cambiantes frente a aquellas que interactúan con entornos simples y estáticos.

En cuanto a la difusión de esta técnica, destacan los desarrollos llevados a cabo en Reino Unido, Canadá o Estados Unidos, y en concreto las aportaciones iniciales de autores como Wilkie (1986, 1995), Pentikäinen *et al.* (1982, 1989) Daykin *et al.* (1987, 1994), Daykin y Hey (1990) y Hibbert *et al.* (2001), que sentaron las bases de la simulación a largo plazo de las variables relevantes para una compañía de seguros. Para tener una primera pero completa aproximación a la técnica DFA los trabajos de Ahlgrim *et al.* (2004a, 2004b, 2005, 2008), D'Arcy *et al.* (1997a, 1998), y Kauffman *et al.* (2001). A su desarrollo también han contribuido instituciones como la CAS y la SOA a través de la financiación de proyectos en el ámbito académico y profesional<sup>7</sup>. Frente a esta situación, el sector asegurador español tiene poca experiencia en la implantación de técnicas DFA y necesita modelos adaptados a las características de su actividad (Watson Wyatt, 2005).

<sup>7</sup> En la web de la CAS (<http://www.casact.org>) se encuentra cuantioso material sobre la técnica.

### 3.1. Técnicas de gestión del riesgo

Existen una serie de términos empleados con frecuencia en el ámbito de la gestión del riesgo de las compañías aseguradoras. El objeto de este apartado es esclarecer el alcance de cada uno de ellos y cómo se relacionan. En este sentido, las dos técnicas de gestión del riesgo que generan mayor confusión son el ALM y el DFA. Normalmente, el término DFA se aplica a los modelos desarrollados para la medición, gestión y control de riesgos en seguros no vida, mientras que el término ALM se aplica al seguro de vida. Pero la relativa novedad de estas técnicas provoca que no exista un consenso respecto al significado concreto de los términos. Vamos a ver que esta confusión es fruto de la historia de ambas técnicas y de otras todavía más recientes, que han alcanzado una gran notoriedad en el ámbito de la ciencia actuarial.

En los años 50, los actuarios desarrollaron de manera formal las técnicas de ALM para medir y gestionar el riesgo de tipo de interés. Estas técnicas tuvieron su origen en la industria de seguros de vida ya que son más sensibles a los cambios del tipo de interés que las compañías de no vida, debido a que tanto sus pasivos como sus activos son a mayor plazo. Redington (1952) introdujo la técnica de inmunización para gestionar el riesgo de tipos de interés de las compañías de vida.

A finales de los años 80, el entorno volátil de los tipos de interés y la mayor conciencia reguladora a la hora de requerir a los aseguradores de vida que demostrarán su suficiencia del capital, condujo a la aparición del Test del flujo de liquidez (*Cash Flow Testing*, o CFT<sup>8</sup>). Este test puede verse como una técnica de ALM ampliada, ya que incluye la simulación de conjunto más amplio de riesgos y de su impacto financiero.

Posteriormente, ya en la década de los 90 el sector comenzó a hacerse eco de una técnica que había echado sus raíces con los trabajos de la *British Solvency Working Party* y la *Finnish Working Party*. El esfuerzo realizado por instituciones como la CAS llevó a la difusión del DFA, que tiene los mismos principios subyacentes que el ALM y el CFT pero trata una gama más amplia de los riesgos del negocio. Como en el caso del ALM, el factor que impulsó el DFA fue la volatilidad de los tipos de interés y el efecto que tenía en las compañías de seguro de vida (D'Arcy *et al.*, 1997a).

La aplicación de la simulación estocástica a otros negocios diferentes del asegurador y la incorporación de nuevos riesgos, derivó en el concepto de Gestión del Riesgo Empresarial (*Enterprise Risk Management* o ERM). El ERM es un término reciente que se asocia a la gestión y control de los riesgos globales a los que se enfrenta cualquier compañía. Es pues un término empleado tanto en el sector asegurador, como en otros sectores. La principal diferencia entre el DFA y el ERM radica en que el DFA se ha centrado tradicionalmente en el análisis de los riesgos financieros y aseguradores, mientras que el ERM engloba a todos los riesgos de la

---

<sup>8</sup> A veces también es nombrado como *Cash Flow Analysis* o *Asset Adequacy Analysis*.

empresa, y por tanto considera también el riesgo operativo. Por eso DFA podría verse integrado dentro de ERM orientado al riesgo financiero y actuarial. Es útil, por tanto, aportar una definición más formal del ERM. Según el Comité ERM de la CAS, el ERM es la disciplina por la cual una organización determina, controla, explota, financia, y supervisa todas las fuentes de riesgos con el fin de aumentar el valor a corto y a largo plazo de la compañía para sus grupos de interés.

En el año 2003 el Comité de DFA (*DFA Committee*) de la CAS pasó a llamarse Comité de DRM (*DRM Committee*). La causa residió en la nueva concepción de que la técnica DFA era una de las posibles técnicas a emplear en la modelización dinámica de riesgos (*Dinamic Risk Modeling*, DRM). Como consecuencia de esta nueva visión las técnicas de DFA y ERM pasaron a convertirse en subtécnicas para elaborar modelos DRM. Al mismo tiempo, el DRM podría ser fácilmente clasificado en el conjunto de técnicas de modelización dinámica.

Nosotros entendemos por DFA aquel proceso que consiste en la simulación de la actividad aseguradora, o de otra actividad financiera, de forma integral a través de la modelización estocástica de las variables determinantes de la evolución de los activos y pasivos con fines alternativos. En este sentido queremos destacar que si bien una de las principales finalidades con las que se utiliza DFA es la evaluación del riesgo y las necesidades de capital inherentes al mismo, sus usos se extienden a la evaluación de distintas estrategias de la compañía. El DFA tiene por objeto la medición y gestión del riesgo financiero y asegurador al que se exponen las compañías, y por tanto es una herramienta útil para la toma de decisiones relacionadas con esas estrategias. El ERM y el DRM, como técnicas que engloban al DFA, pueden realizar una evaluación y selección del conjunto de estrategias globales de la compañía, al considerar los riesgos operativos.

	Riesgos financieros y aseguradores	Riesgos operativos
Estrategias financieras y aseguradoras	DFA	ERM Y DRM
Estrategias operativas		

Por tanto, nuestra opinión es que tanto el CFT, ALM, DFA, ERM y el DRM son un conjunto de técnicas sofisticadas de modelización de los riesgos a los que se enfrenta la compañía, que se ayudan de herramientas de distintos campos (matemáticas, informáticas, estadísticas, financieras y actuariales) para simular escenarios o realizar pruebas con un conjunto limitado de ellos. Su objetivo es que las compañías aseguradoras obtengan una mayor comprensión de los riesgos a los que se enfrentan y puedan, mediante el análisis de los resultados de dichos modelos, realizar la toma de decisiones óptimas. Dichas técnicas fueron concebidas inicialmente por la ciencia actuarial para ser aplicadas al sector asegurador, pero tanto

el DFA, como ERM y el DRM son potentes técnicas de modelización dinámica que se pueden aplicar a otros sectores como el bancario.

Existe en la actualidad un gran debate sobre el campo de acción del ALM y del DFA. Una gran parte de los autores consideran que el DFA es sólo aplicable en seguros generales o no vida, mientras que el ALM sería aplicable en vida. Posiblemente la causa radique en la evolución histórica de dichas técnicas. Hemos visto que el ALM surge con anterioridad al DFA, en el seno de del sector asegurador de vida debido al mayor riesgo de tipos de interés que experimenta dicha industria fruto de la mayor duración de activos y pasivos. Por este motivo principalmente el sector trato de gestionar y controlar este riesgo mediante lo que se denominaron genéricamente estrategias de inmunización. Con posterioridad surgiría el DFA fruto de la insuficiencia de los modelos que existían hasta la fecha para evaluar la solvencia de las compañías. Pese a que el DFA también surgió en el seno del sector de vida, una gran parte de su éxito vendría derivado de la mano de los esfuerzos de la CAS para difundir su uso en seguros no vida. Las compañías de seguros no vida comenzaron a adoptar en los años 90 modelos diseñados originalmente para las compañías de seguro de vida, adaptándolos a sus riesgos específicos (Hodes *et al.*, 96). Sin embargo, como afirman D'Arcy *et al.* (1997b), en este proceso factores importantes para analizar a los aseguradores no vida no han sido incluidos en algunos modelos derivados de los modelos DFA de seguros de vida, mermando la adecuación de tales modelos, ya que es de vital importancia considerar las diferencias en las naturalezas de ambos negocios.

Fruto del esfuerzo de difusión de los modelos DFA en el sector asegurador no vida, muchos autores olvidaron su origen y desecharon total o parcialmente su uso para vida (Kaufmann *et al.*, 2001; Kessner y Peter, 2004; Köhnlein *et al.*, 2006). Otros autores, como Gorvett (1998) y Cumberworth *et al.* (2002), consideran que ALM y DFA persiguen objetivos similares en la empresa, opinión que compartimos al considerar que DFA es un conjunto de técnicas y herramientas que no tienen un área de acción limitada al seguro de no vida, sino que con las oportunas adaptaciones puede ser aplicable a ambas actividades.

Pero la independencia entre las técnicas aplicables a vida y no vida no es la única opinión generalizada. Mientras que algunos profesionales del sector incluyen el ALM dentro de las soluciones DFA (Swiss Re, 2000), otros consideran que el ALM engloba al DFA. En este sentido, Friese y Mittendorf (2003) afirman que el DFA es una técnica de ALM que analiza la situación financiera global de una compañía de seguros. Como ventaja respecto a otras técnicas de ALM analizadas en dicho artículo<sup>9</sup>, los autores afirman que DFA muestra la posible situación futura basada en las actuales estrategias, pero también ayuda a la gerencia a analizar las consecuencias de diversas decisiones de manera que posibilita la toma de decisiones mejoradas. Krischanitz (2002), Eling y Parnitzke (2007) o Shiu (2006) consideran también que DFA es una técnica más de ALM. Para ver el porqué de esta concep-

---

<sup>9</sup> Las técnicas analizadas eran el Test de flujos (*Cashflow-Testing*), casamiento de flujos (*Cashflow-Matching*) y casamiento de duraciones (*Duration-Matching*).

ción podría sernos útil acudir a la clasificación efectuada por Eling y Parnitzke (2007). Estos autores clasifican las técnicas de ALM en tres grupos dependiendo del horizonte de tiempo, de la consideración de la incertidumbre y de la meta de planificación. Los tres grupos están formados por:

1. Técnicas deterministas de inmunización, que tienen como objetivo gestionar los riesgos del tipo de interés y de liquidez.
2. Técnicas de optimización, cuyo objetivo es determinar una estructura eficiente de rentabilidad- riesgo.
3. Modelos de DFA, que permiten el análisis multi-período de la situación financiera de la empresa considerando la naturaleza estocástica de las variables.

Eling y Parnitzke (2007) concluyen que DFA se utiliza con más frecuencia en seguros no vida debido a la mayor incertidumbre de los pasivos, lo que dificulta el pronóstico de los flujos de liquidez de las compañías. En cambio, el seguro de vida se utiliza con más frecuencia las técnicas de inmunización y optimización. Esta tendencia no significa que en seguros de vida no pueda emplearse DFA. Es más, Bergbauer *et al.* (2004) consideran que DFA puede ser una potente herramienta de gestión y análisis para actividades distintas al negocio asegurador. Los autores consideran que DFA es una técnica muy similar al CFaR (*Cash Flow at Risk*) y extienden su ámbito tradicional de aplicación, para los autores los seguros de no vida, proponiendo mediante ejemplos sencillos su aplicación a las compañías de seguros de vida y fondos de pensiones, a la concesión de créditos por parte de las entidades bancarias y al estudio de una posible fusión entre dos compañías del sector turístico. La opinión de estos autores está en línea con nuestra visión de que DFA, ERM y DRM implican la modelización mediante escenarios de los flujos financieros de las compañías aseguradoras, pero que dichas técnicas pueden ser adoptadas por otras actividades. Esta es la visión predominante en la actualidad de las consultoras actuariales que ofrecen soluciones DFA. Además, cabe destacar que en el *Risk and Capital Management Seminar* del año 2002 la CAS solicitó por primera vez artículos en los que se aplicase DFA a otras instituciones financieras distintas. En esa reunión se presentaron, entre otros, los trabajos de Hines (2002) y Kirschner y Patel (2002). El primero de los trabajos se orientó a la aplicación de DFA en entidades que prestan servicios financieros integrados<sup>10</sup>. Mediante el impacto global de los riesgos (véase la tabla siguiente) a los que se enfrentan dichas organizaciones se intenta reflexionar sobre el proceso DFA de este tipo de compañías. Kirschner y Patel (2002) muestran el proceso base de desarrollo de un modelo DFA para una institución con actividades bancarias y aseguradoras en vida y no vida.

---

<sup>10</sup> Las compañías de servicios financieros integrados pueden operar en los negocios de seguros de vida, no vida, reaseguro, diversas actividades bancarias y otras de carácter no financiero.

Riesgo	No vida	Vida/Salud	Bancarias	No-financieras
Riesgo de activo	Medio	Medio-Alto	Alto	Bajo
Riesgo de interés	Medio	Medio-Alto	Medio	Bajo
Riesgo asegurador	Medio-Alto	Medio-Alto	Muy bajo	Muy bajo
Riesgo de crédito	Bajo	Bajo	Alto	Medio
Riesgo operativo	Medio	Medio	Medio	Alto
Reaseguro/Cobertura de riesgos	Bajo-Medio	Bajo	Medio	Muy bajo
Liquidez	Bajo-Medio	Bajo-Medio	Medio	Medio
Accionistas	Bajo	Bajo	Medio-Bajo	Bajo
Económico	Bajo-Medio	Bajo-Medio	Medio	Bajo-Alto

Fuente: Hines (2002).

### 3.2. Técnicas de análisis de la condición financiera

DFA tiene dos funciones fundamentales: el análisis y gestión de decisiones estratégicas y el análisis de la condición financiera de las compañías. Hemos visto que si el objetivo del modelo es la gestión del riesgo, el DFA hay que considerarlo como una subclase de ERM, y éstos dos a su vez de DRM. En cambio, si el objetivo es el análisis de la solvencia entonces el DFA es la técnica que engloba a otras, en particular al Test de Solvencia dinámica (*Dynamic Solvency Testing*, DST), Test de adecuación dinámica del capital (*Dynamic Capital Adequacy Testing*, DCAT) o Análisis dinámico de la condición financiera de un asegurador (*Dynamic Financial Condition Analysis*, DFCA), cuyo nombre varía en función del país y de la estructura del proceso.

El término DST está ampliamente extendido a lo largo de distintos países y se aplica en compañías de vida y no vida, mientras que DCAT es empleado en Canadá y DFCA es empleado por la SOA americana. DST implica la proyección de la posición futura de solvencia de una compañía bajo un conjunto de hipótesis para determinar su fortaleza financiera e identificar los factores de riesgo principales que amenazan su solvencia. Normalmente la proyección se realiza por test de escenarios deterministas.

En Canadá se aplica el método DCAT. A inicios de los 90, el DCAT era poco usado y se restringía al seguro de no vida. Para las aseguradoras de vida, se usaba desde 1992<sup>11</sup> el DST. La CIA estableció desde el 1 de Enero de 1999 la oficialidad del DCAT para aseguradoras de vida y no vida. Para la CIA el DCAT es una técnica que intenta verificar la fortaleza financiera de una compañía proyectando su condición financiera futura sobre un conjunto posible de escenarios. Los modelos elaborados pueden variar considerablemente de una compañía a otra pero tienen que seguir ciertas normas con relación a los riesgos y escenarios analizados. Así,

<sup>11</sup> Ver CIA (1991).

deben determinar un escenario base que se asemeja al plan de negocios de la compañía, e incluir tres posibles escenarios adversos que puedan tener un impacto importante en la condición financiera de la compañía. La naturaleza del DCAT se basa en el test de escenarios deterministas.

En los Estados Unidos, la SOA publicó en el año 1996 un manual sobre el DFCA, el denominado “*Dynamic Financial Condition Analysis Handbook*”, con el propósito de ayudar a los actuarios en la determinación de la condición financiera de los aseguradores de vida. El análisis de la fortaleza financiera del asegurador implica realizar un test de sensibilidad de los futuros acontecimientos potenciales que pueden afectar financieramente al asegurador. En él se indica que los escenarios deben ser adecuados para probar la variabilidad del excedente a distintos riesgos y medir su sensibilidad a los riesgos identificados bajo un conjunto plausible de entornos en los que la compañía debe desenvolver sus operaciones. En dicho Manual, la SOA discute los escenarios que pueden ser empleados para realizar el análisis, recomendando que el actuario realice un test de escenarios.

### 3.3. Usos y usuarios de DFA

En este apartado vamos a describir los múltiples usos que se les atribuyen a los modelos DFA. La técnica DFA, como ya se comentó, puede ser aplicada como herramienta de gestión del riesgo o para analizar la condición financiera de las compañías. Sin embargo, Shiu (2006) indica que los principales usos actuales son la asignación de activos, los test de solvencia y la asignación de capital. Por su parte la CAS (1999a), proporciona una lista de potenciales usos al afirmar que el DFA provee a la gerencia de información útil para la toma de decisiones en las áreas siguientes:

1. Evaluación del plan de negocio. Los modelos DFA se pueden utilizar para profundizar en las causas por las cuales los objetivos financieros de la compañía pueden no alcanzarse.
2. Estrategia de marketing <sup>12</sup> (desarrollo del producto y de mercados). DFA puede proporcionar una base para la tarificación de las pólizas y/o explorar los posibles efectos financieros que los nuevos mercados y productos tendrán en los resultados financieros de los productos y mercados existentes. La CAS (1995b) afirma que, aunque los modelos financieros dinámicos no son todavía muy utilizados para procesos de tarificación en seguros no vida, son ampliamente utilizados en el seguro de vida.

---

<sup>12</sup> Según Britt y Johnstone (2001) los pasos para analizar estas estrategias podrían incluir: crear un modelo DFA para tu compañía; crear un modelo DFA para tu competencia e incluso para tus proveedores (reaseguradores e inversores del mercado de capitales); elaborar hipótesis de cómo los asegurados, la competencia y los proveedores actuarán recíprocamente en un mercado dinámico; definir la estrategia existente de marketing de tu compañía y los cambios anticipados; y finalmente, simular las posibles reacciones de cada participante del mercado bajo las estrategias existentes y propuestas, y sus efectos sobre la cuota de mercado, los beneficios y la solvencia.

3. Gestión de reclamaciones. DFA puede utilizarse para mejorar la comprensión de la compañía sobre los costes, ventajas y riesgos asociados en los cambios en la filosofía de gestión de las reclamaciones por parte de los asegurados.
4. Determinación del capital necesario por la compañía<sup>13</sup>. La suficiencia del capital se refiere normalmente a la capacidad de la compañía para pagar todas las obligaciones potenciales. Históricamente las compañías han fijado su capital por medio de fórmulas simples basadas en ratios de primas o ratios de provisiones, y que no tienen en cuenta los riesgos a los que se enfrentan las compañías. DFA puede cuantificar mejor el nivel de capital apropiado de una compañía para apoyar los riesgos del negocio. La cantidad de capital necesario para la compañía depende del punto de vista de la persona interesada. De esta forma, un regulador requerirá como mínimo el capital mínimo regulador, un accionista deseará el capital mínimo posible de forma que aumente su rentabilidad, la gerencia estimará el capital necesario en función de las estrategias que desea implantar, y un asegurado requerirá el necesario para pagar sus reclamaciones en el momento en el que se establezcan. Un modelo DFA permite el cálculo del capital necesario para los distintos grupos de interés de una compañía<sup>14</sup>.
5. Asignación del capital entre líneas del negocio<sup>15</sup>. DFA permite evaluar los riesgos y las rentabilidades de las distintas divisiones operativas de una compañía y, por consiguiente, la asignación del capital se realiza en función del valor ajustado al riesgo aportado a la empresa. Como afirman Philbrick y Painter (2001), la asignación de capital es un tema controvertido, puesto que hay profesionales que se oponen al afirmar que todo el capital de la entidad está disponible para pagar las reclamaciones de cualquier línea del negocio. Sin embargo, es una tarea imprescindible para calcular la rentabilidad de cada línea. Mulvey *et al.* (1999a) establecen que la asignación del capital satisface tres funciones. En primer lugar, envía señales a las distintas divisiones de la compañía con respecto a las mejoras direccionales en sus actividades. En segundo lugar, las cantidades teóricas del proceso de asignación forman la base de las medidas de rentabilidad ajustadas al riesgo. En tercer lugar, permite descomponer el proceso de determinación del capital global necesario que debe poseer la compañía.
6. Liquidez. Un modelo DFA puede ayudar a una compañía a determinar el nivel de fondos a corto plazo que pueden ser necesarios en función de la volatilidad de los flujos de caja futuros.

---

<sup>13</sup> Philbrick y Painter (2001) establecen que las decisiones críticas para fijar el capital son: la variable financiera a emplear, el horizonte temporal de análisis, la medida elegida y el valor crítico empleado para distinguir entre los niveles aceptables e inaceptables de capital.

<sup>14</sup> Brooke (2003) evalúa distintas formas de establecer el capital basándose en la protección del interés de asegurados, de la gerencia y desde el punto de vista de los accionistas.

<sup>15</sup> Según Britt y Johnstone (2001) los pasos del proceso incluyen: calcular el capital requerido para cada línea del negocio; calcular el capital requerido para la empresa; asignar el menor capital requerido como consecuencia de la diversificación de riesgos a cada línea de negocio; dado este capital, estimar la rentabilidad de cada línea del negocio comparándola con la tasa objetivo; y por último, actuar sobre aquellas líneas que no alcancen dicha rentabilidad.

7. Estructura o estrategia del reaseguro<sup>16</sup>. Según Bohra y Weist (2001) el análisis del reaseguro se basa en examinar la relación entre la rentabilidad y el riesgo asociado a distintas estructuras de reaseguro. La cuestión clave es la tolerancia o aversión al riesgo del comprador, puesto que menos reaseguro aumenta generalmente la rentabilidad prevista pero también el riesgo. DFA puede ayudar a responder a preguntas sobre el tipo de reaseguro a comprar, los niveles de retención o los límites, entre otras.
8. Análisis de la estrategia de inversión<sup>17</sup>. DFA puede analizar distintas estrategias de activo y ver su influencia en los resultados financieros a largo plazo, ayudando a las compañías a determinar la estrategia óptima consistente con su perfil de riesgo. Bohra y Weist (2001) destacan que otros aspectos de la estrategia de inversión que pueden ser evaluados mediante DFA son la duración de la cartera de renta fija, el riesgo de crédito de la cartera o el impacto de introducir valores con riesgo de recompra.
9. Mejora en la calificación crediticia. Las agencias de calificación o *rating* reconocen la importancia de las técnicas de gestión de riesgos como DFA, en la medida en que proporcionan las herramientas necesarias para mostrar la comprensión y cuantificación de la exposición del riesgo de las compañías. Una compañía que analice sus decisiones económicas mediante técnicas DFA puede recibir una calificación más favorable.
10. Análisis de las oportunidades de fusión y adquisición. A través de los modelos DFA se puede cuantificar el precio de compra de una posible operación corporativa en función de la creación de valor de la nueva compañía.

Una vez vistos los posibles usos de la técnica DFA y cómo dichos usos pueden ser puestos en ejecución, es útil determinar cuáles son los posibles usuarios de los modelos DFA. Blum y Dacorogna (2004) establecen como posibles usuarios a las compañías aseguradoras y reaseguradoras, con ánimo de evaluar el plan de negocio y el desarrollo de productos, y a los cuerpos reguladores y agencias de *rating*, que utilizan DFA para analizar la solvencia y la liquidez. La CAS (1995b) añade a la lista anterior, los bancos de inversión, intermediarios financieros, inversores institucionales y analistas financieros.

Visto lo anterior, resulta obvio que los recursos disponibles por la compañía es uno de los factores que determinan la elección del modelo financiero dinámico. Los modelos detallados requieren una inversión significativa de tiempo y medios para la determinación de las hipótesis, el mantenimiento lógico del modelo actual y la

---

<sup>16</sup> Para Britt y Johnstone (2001) el proceso comprendería los siguientes pasos: simular el resultado de la compañía antes de reaseguro (resultado bruto); elegir (debido a su elevado número) un número de alternativas de reaseguro posibles que se deseen probar; simular el resultado neto del reaseguro; elegir una medida que determine los beneficios brutos y netos y, finalmente, calcular esa medida para cada estrategia de reaseguro.

<sup>17</sup> Britt y Johnstone (2001) establecen como posibles pasos del proceso: seleccionar la medida deseada de rentabilidad y riesgo, emplear técnicas de optimización para el cálculo de la frontera eficiente y, por último, seleccionar la cartera preferida.

revisión de las hipótesis a la luz de nuevos datos. Por último, también requieren un gasto significativo de tiempo en interpretar los resultados producidos.

#### 4. REVISIÓN DE LOS PRINCIPALES MODELOS DFA

En este epígrafe abordaremos las principales aportaciones realizadas sobre la temática DFA. El impulso de la técnica DFA ha estado vinculada a la labor desarrollada por la CAS y la SOA. En 1995 la CAS elaboró el primer Manual sobre DFA con el propósito de proporcionar una guía a los actuarios en la ejecución de un proceso DFA. El Manual proporciona una lista de consideraciones para los actuarios al realizar un proceso DFA. Es de esperar que el actuario: seleccione un sistema de escenarios posibles suficientemente amplio para probar todas las amenazas materiales a la solvencia de la compañía, que se centre lo más posible en esos escenarios más adversos, y que determine la credibilidad de los datos usados en la realización del análisis.

El Manual DFA se divide en seis secciones que son: tarificación/planificación de empresas, las consideraciones relativas a las provisiones, exposición a grandes riesgos, reaseguro, los activos invertidos y otros activos y pasivos. Estas secciones se centran en los riesgos más comunes de una compañía típica de seguros no vida. Las principales categorías de riesgo identificadas en este Manual están resumidas en la siguiente tabla.

Riesgo	Descripción
Tarificación inadecuada	Generalmente la tarificación insuficiente ( <i>underpricing</i> ) y, a menudo, acompañada de un crecimiento excesivo en las exposiciones al riesgo.
Plan de negocio inadecuado	Generalmente crecimiento excesivo en áreas con <i>underpricing</i> , o áreas para las cuales la compañía tiene poca experiencia.
Provisiones inadecuadas.	La dotación insuficiente de provisiones ( <i>underserving</i> ) debido a la carencia de datos, técnicas inadecuadas y/o presión de los gestores.
Programa inadecuado de reaseguro	El programa de reaseguro de la compañía no reduce el riesgo a los niveles deseados.
Cartera inadecuada de inversión	La compañía invierte una parte excesiva de su cartera en activos demasiado volátiles, excesivamente concentrados en emisores que experimentan posteriormente dificultades financieras, o realiza mal el casamiento de activos y pasivos ( <i>mismatching</i> ).

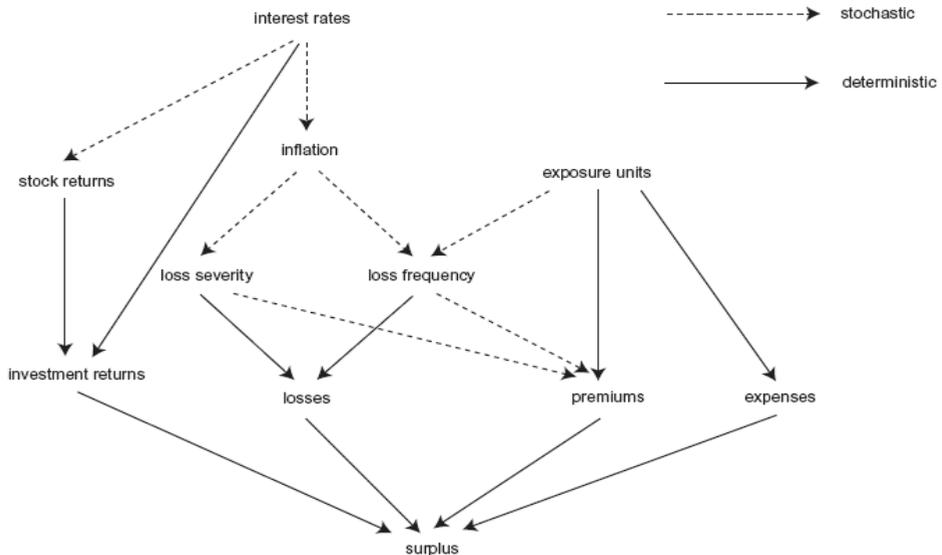
Fuente: Elaboración propia a partir de la CAS (1995a).

En el mismo año, la CAS también publicó el denominado “*Dynamic Financial Models of Property/Casualty Insurer*” (CAS, 1995b), este texto proporciona una guía a la hora de diseñar, construir o seleccionar un modelo DFA para una compañía de seguros de no vida. En 1999 la CAS revisó el Manual DFA añadiendo nuevos capítulos, y cambiando el nombre que pasó a denominarse “*Dynamic Financial Analysis Research Handbook*” (CAS, 1999). Una vez realizado en el año 2003 el cambio de nombre del Comité DFA (*DFA Committee*) a Comité DRM (*DRM Committee*), se comenzó a elaborar el Manual DRM (“*Dynamic Risk Modeling Handbook*”) a partir de textos elaborados por la CAS, y que a noviembre de 2009 todavía está inacabado. Asimismo la Sociedad de Actuarios Americana (SOA) publicó en 1996 el “*Dynamic Financial Condition Analysis Handbook*”, que intenta ser una guía para evaluar la situación financiera de las compañías de vida.

Las publicaciones de la CAS y la SOA actuaron como catalizadores que impulsaron las investigaciones en este ámbito. Una de las aportaciones más relevantes es la de D’Arcy *et al.* (1997a) quienes describen la versión inicial del modelo DFA DynaMo, desarrollado para aseguradores americanos no vida con el objetivo de resolver las necesidades básicas de dicho sector. Dichos autores destacan el origen de la técnica DFA dentro de la industria de vida como repuesta al aumento del riesgo de tipo de interés a finales de la década de los 70 (D’Arcy *et al.*, 1997b). Posteriormente, D’Arcy *et al.* (1998) describen la aplicación de una nueva versión del modelo (DynaMo 2) y la elección de los *inputs* del mismo a una compañía aseguradora real con distintas líneas de negocio. Walling *et al.* (1999) examinan la forma de adaptar a los requisitos particulares de cada usuario al modelo DFA de uso público DynaMo, aportando fuentes de datos para cambiar los parámetros predefinidos en el modelo. Finalmente, D’Arcy y Gorvett (2004) utilizan una versión mejorada del modelo (DynaMo 3) para determinar si existe una tasa de crecimiento óptima en el negocio de seguro de no vida. Los autores se basan en la hipótesis de que como resultado de la antigüedad de las pólizas (*aging effect*), la tasa de crecimiento tiene un efecto significativo en la rentabilidad que obtiene un asegurador. Debe destacarse que en la actualidad la CAS está realizando la actualización del modelo DynaMo, lo que conducirá a su cuarta versión.

Otra aportación relevante en este campo es la realizada por Kaufmann (1999), que describe de manera formal y matemática el modelo DynaMo 2. El autor divide en cuatro los componentes principales del modelo: las variables *input* propias de cada empresa, la modelización estocástica de las variables claves, la modelización de los flujos de caja de la compañía, y la relación entre las distintas partidas del Activo y Pasivo. El trabajo se completa con las explicaciones sobre el proceso de simulación del DynaMo 2. Una síntesis del trabajo anterior introduciendo leves modificaciones puede verse en Kaufmann *et al.* (2001) donde se describen formalmente los procesos matemáticos empleados para la generación de las distintas variables del modelo, es decir, los tipos de interés, la inflación, la rentabilidad del mercado bursátil, los siniestros, los ciclos aseguradores y los patrones de pago. Asimismo, se describe el modelo de la compañía aseguradora (siguiente gráfico), que es la relación entre la estructura interna de la compañía y las variables

proyectadas, y finalmente se realiza un análisis práctico de la situación financiera de un hipotético asegurador.



Fuente: Kaufmann *et al.* (2001).

Blum *et al.* (2001) elaboran a partir de datos reales y del análisis de distintas opciones un generador de escenarios que incluye el riesgo de cambio entre distintas monedas para evaluar las estrategias de reaseguro de las compañías globales. Posteriormente, Blum y Dacorogna (2004) realizan una magnífica descripción teórica del DFA. Los autores abordan la definición del término, el potencial de la técnica para la gestión de riesgos y describen los elementos fundamentales y riesgos que normalmente incluyen los modelos. Fruto de estas investigaciones, en Blum (2005) puede verse el contenido de su Tesis Doctoral. El trabajo se divide en dos partes. La primera, se destina a realizar una revisión desde el campo matemático del DFA y de los elementos que lo integran. La segunda versa sobre el generador de escenarios económicos de un modelo DFA centrándose fundamentalmente en la modelización de los tipos de cambio y tipos de interés. Adicionalmente, se abordan aspectos relativos a la implantación de tales modelos y, de forma fundamental, su estimación y validación.

En Mayo de 2001, la CAS y la SOA solicitaron de forma conjunta el proyecto de investigación titulado *Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios*<sup>18</sup>. El objetivo del proyecto era desarrollar un modelo para la simulación de variables económicas que pudiera ser empleado entre otros en DFA. El modelo financiero, desarrollado en Excel y @Risk de Palisade, permite a los usuarios es-

<sup>18</sup> Dicho proyecto aparece en la bibliografía citado como Ahlgrim *et al.* (2004b).

pecificar los escenarios para tres variables económicas: tipos de interés nominales, inflación y rentabilidad de las acciones<sup>19</sup>. Fruto de este proyecto surgieron diversas publicaciones que es preciso mencionar. En este sentido, Ahlgrim *et al.* (2004a) describen el marco DFA y evalúan el impacto en el riesgo proyectado de dos modelos distintos de rentabilidad para el mercado de acciones. Los modelos son el modelo lineal de rentabilidad basado en el CAPM, incorporado en el modelo DynaMo y un modelo de cambio de régimen lognormal basado en Hardy (2001). Esta última opción fue la incorporada en el proyecto financiado por la CAS y la SOA. Asimismo, en Ahlgrim *et al.* (2004c, 2008) se compara el generador de escenarios desarrollado por los autores en el proyecto financiado por la CAS y SOA con el modelo desarrollado por la Asociación Americana de Actuarios (AAA)<sup>20</sup>. Los autores explican los procesos subyacentes usados en cada sistema de modelos y comparan mediante gráficos los valores de la salida para los factores comunes. Un resumen del proyecto puede verse en Ahlgrim *et al.* (2005).

Britt y Johnstone (2001) describen las características y componentes esenciales de un modelo de DFA, de forma que la complejidad del modelo dependa del propósito para el cual es elaborado. Eling *et al.* (2007a, 2008b) proporcionan un resumen de la técnica DFA y profundizan en la consideración de las estrategias de gestión en el marco DFA. Mediante la simulación efectuada a través de un sencillo modelo propio, los autores tratan de estudiar los efectos de diversas estrategias sobre el perfil de riesgo y rentabilidad de un asegurador no vida. Posteriormente, Eling y Parnitzke (2007) identifican varios problemas de la puesta en práctica de los modelos DFA que no han sido considerados adecuadamente en la literatura, particularmente la generación de números aleatorios y la modelización de dependencias no lineales a través de cópulas. En Eling y Toplek (2009) se emplean en un marco DFA las cópulas de Gauss, t, Gumbel, Clayton y Frank, y se evalúa su impacto sobre el riesgo del asegurador y la distribución de rentabilidad. Los autores encuentran que las dependencias no lineales tienen una influencia fuerte en el riesgo y los resultados financieros de las compañías.

Kirschner y Scheel (1997) describen un modelo DFA real utilizado por una compañía de seguros de no vida. La estructura del modelo consta de cinco secciones distintas: activos invertidos, lado asegurador, contabilidad, cálculos de impuestos y ratios financieros. Los autores describen los componentes de cada sección y la secuencia de pasos<sup>21</sup> que realiza el modelo para el horizonte de planificación para el cual se simula.

---

<sup>19</sup> La web de la CAS que contiene el proyecto es <http://www.casact.org/research/econ/>

<sup>20</sup> Fueron propuestos por *The Life Capital Adequacy Subcommittee* de la AAA.

<sup>21</sup> Los pasos que efectúa el modelo son: 1. Generación estocástica del escenario económico para el próximo período. 2. Aplicar dicho escenario económico para generar las operaciones del período. 3. Aplicar el escenario económico para valorar los activos existentes. 4. Aplicar los efectos endógenos o independientes de los efectos económicos sobre los pasivos. 5. Aplicar el escenario económico para valorar los pasivos existentes y los nuevos pasivos. 6. Aplicar una estrategia de reaseguro. 7. Aplicar una estrategia de rebalanceo. 8. Reequilibrar la cartera de activos y/o pasivos. 9. Desarrollar los efec-

Una referencia en el ámbito europeo es Schmeiser (2004) quien desarrolla un modelo de gestión del riesgo interno basado en DFA, que se aplica para calcular los nuevos estándares de capital basados en el riesgo de Solvencia II de un asegurador no vida alemán. Utiliza un modelo de tiempo discreto y una simulación Latino Hibernica, modelizando los factores de riesgo centrales del lado de inversión<sup>22</sup> y asegurador. El autor ilustra el impacto de diversas estructuras de activo y diferentes niveles del capital de acciones ordinarias en el momento inicial calculando la probabilidad de ruina del asegurador y su correspondiente *rating* de S&P para un período de un año. Después, se realiza el mismo estudio pero ampliando el horizonte e introduciendo el pago de impuestos y dividendos, y cambiando las hipótesis de partida para el volumen de primas suscrito y la correlación entre las variables de partida. Osetrova y Schmeiser (2006) también muestran la aplicación de un modelo propio DFA aplicable en el marco de Solvencia II. Los autores discuten los principales factores *input* y la estructura de dependencias entre las variables de su modelo. Acaban realizando distintos ejemplos de la aplicación del modelo desarrollado.

Los modelos DFA son potentes herramientas para la toma de decisiones. Lowe y Stanard (1997) describe un modelo DFA usado por un reasegurador de riesgos catastróficos para gestionar el proceso de inversión, asegurador y de gestión del capital. Los autores clasifican y discuten los riesgos, que clasifican en riesgo de activo, riesgo de pasivo y riesgo de negocio, a los que se enfrenta una empresa de seguros y que necesitan ser considerados al diseñar un modelo de DFA. Wiesner y Emma (2000) describen cómo ligar los aspectos técnicos del DFA con la planificación estratégica corporativa. Destacan que DFA es una herramienta que puede ayudar a las seleccionar estrategias de las compañías que sean consistentes con su visión corporativa. Christofides y Smith (2001) describen el uso de un modelo DFA, que utiliza el generador de escenarios TSM (*The Smith Model*), para evaluar el capital y su asignación, las estrategias de reaseguro, inversión y dividendos de un asegurador de no vida americano. El modelo empleado incorpora funciones que representan los costes friccionales y evalúa, a través de ocho escenarios distintos y un periodo de 5 años, las anteriores decisiones sobre el marco de maximizar el valor del accionista. Cumberworth *et al.* (2002) discuten las ventajas posibles de usar un modelo estocástico de simulación para ayudar a la toma de decisiones financieras. Los autores sugieren que DFA puede ayudar a contestar preguntas acerca del capital necesario, el reaseguro a comprar y los dividendos a pagar, y cómo estas cantidades pueden cambiar si cambia la composición de negocios de la compañía.

---

tos de los impuestos. 10. Contabilizar los activos y pasivos. 11. Crear los estados financieros del período y las estadísticas y medidas de la *performance*.

<sup>22</sup> Se establecen ocho categorías de activo (Propiedades inmobiliarias de Alemania, Mercado monetario, Acciones de Alemania, Acciones de Europa, Acciones mundiales, Renta fija de Alemania, Empresas filiales e Hipotecas de Alemania.), siete de las cuales modelizan sus rentabilidades mediante distribuciones normales, cada una con su media y desviación típica. Sólo la categoría de Hipotecas de Alemania es determinista. Además, entre las distintas categorías se establece una matriz de correlación lineal.

Uno de los posibles usos del DFA es el análisis de la estrategia de inversión de una compañía. En esta línea Rowland y Conde (1996) discuten varias cuestiones que se presentan a la hora de gestionar una cartera de inversión de un asegurador de no vida. Mediante el modelo empleado, los autores examinan cómo la elección de un horizonte de tiempo afecta a los resultados del análisis de optimización de impuestos, y realizan una evaluación de la optimización realizada bajo escenarios de resultados aseguradores estocásticos. Posteriormente, Kaufman y Ryan (2000) realizaron un análisis DFA, empleando el modelo FINANS de Milliman & Robertson, para determinar el impacto en los resultados financieros de un asegurador no vida derivado del aumento de la proporción de renta variable en la cartera. Utilizaron para este fin datos consolidados del sector no vida americano, recogidos en la fuente *Best's Aggregates and Averages*. Seleccionaron cuatro escenarios alternativos, en los cuales los cambios en el porcentaje de acciones eran compensados exactamente por cambios en la renta fija, y un período de proyección de 5 años. Las conclusiones de su estudio son que, dado que históricamente para la industria no vida el cociente provisiones/excedente es bajo, una mayor proporción de renta variable en la cartera de activo aumentará el ROE (*Return on Equity*) sin aumentar sensiblemente el riesgo. Kirschner (2000) utiliza un modelo propio, desarrollado a partir del comportamiento pasado de las condiciones económicas, para analizar la cartera de inversión de una hipotética compañía aseguradora. Bohra y Weist (2001) emplean el modelo ARMS para evaluar seis estrategias inversoras diferentes sobre un análisis rentabilidad-riesgo para un período de 5 años. Los resultados del análisis mostraron que la cartera actual de la compañía analizada era eficiente.

Otro uso en el cual se aplican los modelos DFA es al análisis del desempeño o *performance* futuro de la compañía. Christofides *et al.* (1996) describen el modelo GISMO<sup>23</sup>, y lo emplean para analizar la variabilidad de los resultados financieros obtenidos por la compañía bajo diversos escenarios. Hodes *et al.* (1996) describen un modelo financiero basado en flujos de caja usado por un asegurador que opera en varios ramos de negocio de los Estados Unidos, que originariamente había sido diseñado para evaluar la solvencia de la compañía pero que luego se empleó para decisiones estratégicas. Describen la génesis del modelo, los riesgos a los que se enfrentan las aseguradoras y cómo éstos pueden ser tratados en los modelos financieros. Emplean dicho modelo para evaluar los resultados obtenidos por la línea de seguro de accidentes de trabajo de una compañía. Esta línea es seleccionada por la alta sensibilidad a los efectos de las condiciones económicas, como el alto desempleo<sup>24</sup>, y por ser un negocio de cola larga. Kreps y Steel (1996) co-

---

<sup>23</sup> GISMO (*General Insurance Stochastic Model Office*) es un modelo estocástico que proyecta los flujos de liquidez y los capitales de una empresa de seguros, generado con el objetivo de servir como herramienta de gestión.

<sup>24</sup> Consideran varios efectos de una recesión en la frecuencia y en el coste del seguro laboral. Durante los años prósperos, las compañías contratan a nuevos trabajadores, y la frecuencia de las demandas se eleva. Además, las horas extraordinarias también aumenta, provocando que la frecuencia aumente aún más. Durante una recesión, los trabajadores son reacios a establecer una demanda, debido al temor de no haya trabajo una vez se hayan recuperado de sus bajas laborales. Además, las recesiones causan el alargamiento de las duraciones de las bajas, ya que es poco proclive a declararse curado si no hay trabajo.

mentan la metodología empleada en un modelo propietario construido para un asegurador canadiense del ramo de autos, cuyo uso primario era observar el impacto sobre el excedente de diversas decisiones de la compañía. Dicho, modelo según los autores, es un modelo estocástico de planificación (*stochastic planning model*) que definen como una representación de todos los flujos de liquidez de una compañía de seguros, donde las variables son estocásticas. Witcraft (1998) empleó una versión modificada del modelo FINANS para evaluar la probabilidad de que un asegurador alcáncese el nivel de beneficios proyectado en su plan financiero. El análisis indicó que existía una baja probabilidad de que la compañía lograra sus objetivos. Se identificaron las diferencias en las hipótesis con la compañía y los factores inductores de los resultados. Después de comunicar los resultados a la gerencia, la compañía cambió varias de las hipótesis empleadas en su plan volviéndolo más conservador, en línea con los resultados obtenidos en el análisis DFA.

Los modelos DFA pueden ser empleados para evaluar las distintas estrategias de reaseguro de una compañía. Vaughn (1996) estudia la aplicación de un modelo de simulación DFA para evaluar las consecuencias financieras del auto seguro o *self-insurance*, las posibles aplicaciones de dichos modelos y cómo éstos se integran en la planificación a largo y corto plazo de las compañías. Russo y Van Slyke (1996) afirman que tradicionalmente los actuarios y otros analistas financieros tienen a veces dificultades para interpretar la gran cantidad de datos de salida de un modelo financiero dinámico. En este artículo los autores intentan ilustrar los riesgos y beneficios asociados a los resultados financieros de un programa del reaseguro. Maitland (2001) analiza un programa de reaseguro de tipo XL catastrófico sobre un período de 5 años comparando dos estrategias mediante el empleo del modelo ReMetrica. Bohra y Weist (2001) emplean el modelo ARMS de la compañía American Re para, entre otras finalidades, analizar los cambios en la estructura del reaseguro de la compañía analizada.

Los modelos DFA son ampliamente empleados para evaluar la suficiencia de capital y la posterior asignación a las distintas líneas de negocio de la compañía. Collings (1999) explora cómo operan las influencias de distintos grupos de interés operan a la hora de fijar el nivel de capital necesario por una compañía de seguros y cómo pueden ser incorporadas en un marco DFA. En esta misma línea, Painter e Isaac (2006) introducen un acercamiento práctico para considerar los objetivos de todos los grupos de interés de una compañía de seguros al fijar los objetivos de capital apropiados. Someten a una hipotética compañía a un proceso de ERM y desarrollan un modelo de DFA para representar y cuantificar financieramente todos los riesgos potenciales que fueron identificados en el dicho proceso.

Mango y Mulvey (2000) emplean el modelo ARMS para ayudar a una compañía en la determinación del capital total requerido para apoyar sus actividades aseguradoras, y el capital asignado a cada división operativa. Dicho modelo es también empleado en Mulvey *et al.* (1999a) y Bohra y Weist (2001) para los mismos propósitos. Meyers (2001) evalúa la suficiencia del capital de una compañía por medio de la medida de riesgo TVaR, su asignación entre líneas de negocio por medio del

capital marginal implicado por el TVaR, y el aumento/disminución de la compra de reaseguro respecto a la política actual. Los resultados obtenidos mostraban que la compañía estaba bien capitalizada y que la compañía no debiera de comprar reaseguro. Scheel (2001) describe un método de valoración de empresas basado en DFA. Los objetivos del autor son obtener el valor de una empresa de seguros, los requisitos de capital y su función de distribución para el período de proyección. Posteriormente, Philbrick y Painter (2001) aplicaron el modelo FIRM de Swiss Re a un asegurador hipotético. Evaluaron la suficiencia de capital bajo el sistema RBC americano, la ratio BCAR (*A.M. Best's Absolute Capital Adequacy Ratio*), la ratio CAR (*Standard & Poor's Capital Adequacy Ratio*) y usando la medida de riesgo del TVaR. Después de considerar todas las medidas del riesgo, la compañía concluye que podrá reducir el capital significativamente sin deteriorar su suficiencia del capital. Los autores también trataron el problema de la asignación de capital a las líneas de negocio de la compañía. Por último, Brooke (2003) usa un modelo DFA para fijar el capital necesario, su asignación y la valoración de una compañía real con siete líneas de negocio y aplicando un amplio rango de técnicas.

Los modelos DFA deben ocuparse de la cantidad, pero también del momento del pago futuros de los siniestros. Ostaszewski (1998) ilustra las ventajas de las técnicas de remuestreo o *resampling* en los modelos DFA para tratar los datos empíricos de siniestralidad de una compañía. Estos pagos futuros deben estar recogidos en las provisiones de la compañía. Recoger de forma precisa las provisiones es de vital importancia para la exactitud y confianza de un modelo DFA, pero este proceso está sometido a mucha incertidumbre. Hayne (1999a) presenta distintos acercamientos para modelizar los flujos de liquidez futuros de los pasivos. En otro artículo que acompaña al anterior, Hayne (1999b) trata el problema de estimar la media y varianza de las distribuciones de las provisiones y de los pagos por demandas.

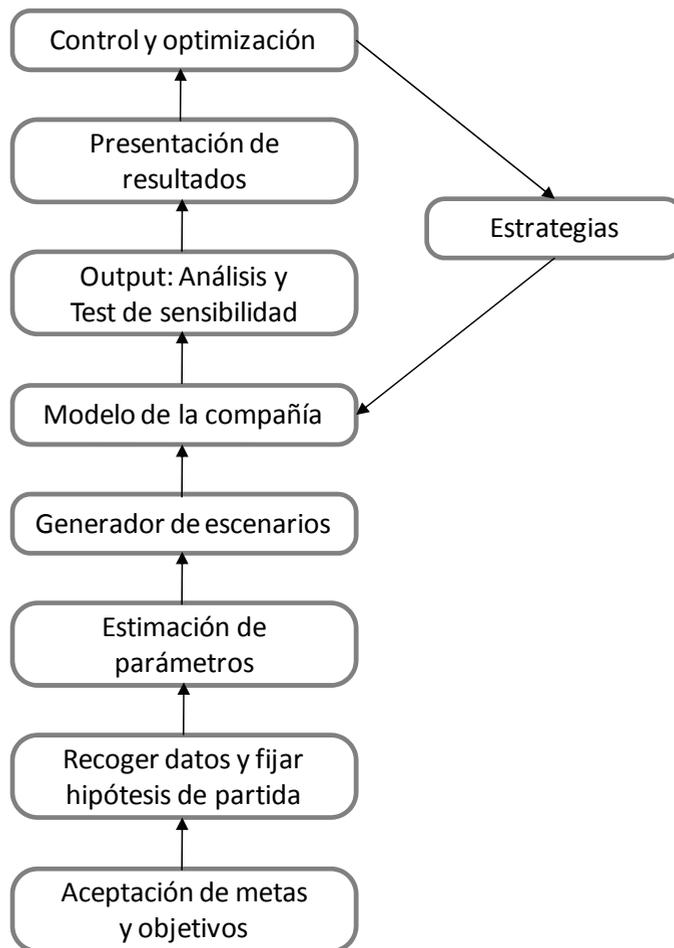
DFA posibilita la identificación de los riesgos a los que está expuesta una compañía aseguradora. Correnti *et al.* (1998) emplean el modelo FIRM con el objetivo fundamental de mostrar cómo se descompone la exposición global del riesgo de una compañía entre sus distintos componentes, sirviendo así para aislar y cuantificar los componentes de riesgo clave. Los autores consideran dos categorías principales de riesgos: riesgo de pasivo y de activo, que, a su vez, subdividen en riesgo del mercado de capitales y tasa de descuento. El proceso de descomposición lo efectúan considerando sucesivas simulaciones del modelo en las que dos de los factores son tratados de forma determinista y el tercero de forma estocástica. Mediante el uso de técnicas de análisis de la varianza se investigan los efectos de los distintos componentes en el resultado. Finalmente, en la siguiente tabla se resumen otros trabajos realizados en el marco DFA, no clasificados en los apartados anteriores.

Autor/es	Aportación realizada
Venter (1997)	Discute varios modelos para los tipos a corto plazo de interés y las ETTI resultantes, su calibración y cómo generar variables económicas correlacionadas.
Appel <i>et al.</i> (1997)	Identifican y describen las variables financieras importantes en un asegurador de accidentes de trabajo (primas, siniestros, gastos de explotación, reaseguro, dividendos y rentabilidad de las inversiones). Describen distintas técnicas para incorporarlos a un modelo DFA identificando las distintas fuentes de datos para la parametrización de dichos modelos.
Major (1999)	Discute el problema de la estimación de los parámetros de las distribuciones de probabilidad y de sus percentiles para los modelos DFA. El autor recomienda el empleo de parámetros vía test de estrés o intervalos de confianza para tratar la incertidumbre asociada al riesgo de parámetro.
Smith y Segre-Tossani (2003)	Comentan la insuficiencia de las herramientas matemáticas tradicionales en el entorno actual caracterizado por riesgos altamente correlacionados, acontecimientos extremos, riesgos conectados en cascada y riesgos con colas gruesas ( <i>fat tails</i> ). Proponen la utilización y aprovechamiento de nuevas técnicas matemáticas, estadísticas e informáticas para las modelos de DFA o ERM de las compañías.
Browne <i>et al.</i> (2001)	Realizan un análisis empírico basado en datos anuales del período 1985 - 1995 para 1.593 aseguradores de vida, utilizando para ello la fuente de datos de la NAIC. Su objetivo es identificar los factores exógenos y específicos de cada asegurador relacionados con la <i>performance</i> de los aseguradores de vida, con objeto de proporcionar una base en la construcción de modelos DFA de los aseguradores de vida.

## 5. ETAPAS DE UN PROCESO DFA

En este apartado describiremos los distintos pasos o etapas básicas que tiene que efectuar una compañía para desarrollar e implantar con éxito un modelo DFA. Distintas compañías y consultoras actuariales han desarrollado sus propios modelos DFA. Se debe advertir que no existe un modelo único de DFA, sino que debe

ser entendido como una combinación de software, métodos, conceptos, procesos y habilidades que ayudarán a los expertos a realizar un análisis crítico de los resultados de las compañías aseguradoras (Blum y Dacorogna, 2004). En general, se puede identificar una estructura genérica que suele seguir todo proceso DFA y que hemos sintetizado en los siguientes apartados (gráfico inferior). A continuación describiremos los principales aspectos a considerar en cada uno de dichos pasos.



Fuente: Elaboración propia a partir de Burkett *et al.* (2001) y Shiu (2006).

### 5.1. Paso A: Discusión y aceptación de las metas y objetivos

En el proceso DFA lo primero es identificar el propósito y los objetivos del modelo. La CAS (2009) establece que es esencial que el propósito de un modelo esté bien

definido lo más temprano posible, para lo cual es necesario adquirir una comprensión del proceso de negocio de la compañía. Para alcanzar dicha comprensión se considera que deben ser evaluados: el alcance o definición del proceso del negocio y de los pasos principales requeridos en ese proceso, la arquitectura o descripción del proceso, el funcionamiento, la infraestructura o procesos de soporte que añaden valor, el contexto, y finalmente los riesgos o entender las fuerzas y debilidades del proceso.

Dentro de este apartado es esencial identificar los riesgos que afectan fundamentalmente a los flujos de caja de la compañía y que, por tanto, deben ser incorporados al modelo. Además, habrá que realizar una selección de las medidas de rentabilidad y riesgo para evaluar el resultado de la compañía.

### **5.1.1. Paso A.1: Investigar los riesgos relevantes al asegurador**

La evaluación del riesgo es el propósito principal con el que se construyen los modelos DFA. Las compañías se enfrentan, fruto de su actividad, a múltiples riesgos que idealmente pudieran ser incorporados dentro del modelo. La práctica indica que la compañía debe modelizar en más detalle aquellos riesgos con mayor importancia relativa tanto sobre sus flujos de caja como sobre sus activos y pasivos. Un modelo dinámico debe proporcionar una evaluación cuantitativa del riesgo en términos de sus efectos en la cantidad y en el momento de los flujos de efectivo (CAS, 2009).

Las compañías aseguradoras presentan desafíos únicos para el análisis de la solvencia, ya que a pesar de estar expuestas a muchos tipos de riesgo comunes a otras instituciones financieras, su riesgo base es debido a la naturaleza fundamental de su negocio, el riesgo asegurador. Según la IAA (2004), el cálculo de los riesgos aseguradores para propósitos de solvencia es complejo por varias razones:

1. No hay un mercado líquido para muchos tipos de pasivos de los contratos de seguro.
2. Los acontecimientos asegurables pueden estar sujetos a varios tipos de hipótesis como por ejemplo: la frecuencia, severidad, índice de renovaciones del asegurado, etc.
3. Las hipótesis apropiadas pueden ser dependientes de la experiencia del asegurador que cubre ese riesgo. Esa experiencia puede no estar disponible en el detalle o volumen suficiente para estimar completamente todos los aspectos con credibilidad.
4. Debido a la naturaleza a largo plazo de muchos contratos de seguro, el horizonte temporal para proyectar los flujos de liquidez del contrato puede extenderse en el futuro, siendo necesario establecer hipótesis de valoración.
5. Para varios tipos de productos en seguro de vida, los beneficios disponibles para el asegurado son dependientes, en cierto modo, del comportamiento de

los activos comprados por el asegurador. El cálculo del riesgo debe poder modelizar la manera en la cual el asegurador realiza su ALM.

6. Con frecuencia, el cálculo del riesgo asegurador requiere modelizar el comportamiento del asegurado, como las opciones de rescate, las renovaciones, etc.
7. La naturaleza a largo plazo de muchos contratos de seguro requiere que la incertidumbre y los componentes extremos de los sucesos de riesgo sean considerados cuidadosamente.
8. Es necesario considerar las dependencias significativas entre los distintos riesgos.

Existen básicamente dos técnicas principales para la identificación de los riesgos que tienen un impacto en los resultados de la compañía. La primera consistiría en una identificación de riesgos a partir de clasificaciones efectuadas por organismos y/o profesionales con experiencia y credibilidad en la materia. Pero muchas veces dichas clasificaciones o listas de riesgos no resultan suficientes, o no son adecuadas para el propósito del modelo. En estas situaciones puede ser necesario recurrir a la segunda técnica, el análisis estadístico y econométrico. Éste nos proporciona información que ayuda a determinar los factores que se deben incorporar dentro de un modelo de DFA. Los factores incluidos serán aquellos que tengan un impacto financiero en el desempeño o *performance* del asegurador aunque, generalmente sólo se considera los factores que plantean amenazas materiales (Shiu, 2006). Cabe mencionar el artículo de Browne *et al.* (2001) quienes, basándose en datos reales de compañías con problemas financieros, identificaron las causas que afectaron en mayor medida a la *performance* de las compañías de vida. Este artículo proporciona una base para la construcción de modelos DFA para las compañías de vida.

Dejaremos de lado la técnica de estudio estadístico para la identificación de riesgos, puesto que excede el propósito de este trabajo, para centrarnos en la primera técnica. De esta forma, un modelo DFA puede considerar los riesgos sugeridos por los cuerpos profesionales actuariales. En la actualidad existen múltiples clasificaciones que recogen los mismos conceptos ordenados y/o nombrados de distintas maneras. A continuación mostramos unas clasificaciones representativas.

La clasificación establecida por el IAIS (2000) establece tres grandes categorías de riesgo: riesgos técnicos, riesgos de inversión y riesgos no técnicos. Los riesgos no técnicos se definen aquellos que no se pueden clasificar de manera conveniente como riesgos técnicos o riesgos de inversión. Ésta es también la clasificación empleada por Ryan *et al.* (2001). En la siguiente tabla se muestra esta estructura y las subclases de riesgos pertenecientes a cada categoría empleada por estos autores. En su artículo se puede ver una desagregación mayor ya que cada subclase se divide en riesgos específicos, al mismo tiempo que se ofrece una visión del rol que tienen los actuarios en el cálculo de cada uno.

<b>Riesgos</b>		
<b>Técnicos o Aseguradores</b>	<b>De inversión o de Activo</b>	<b>No técnicos u Otros</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mercado</li> <li>- Primas</li> <li>- Reclamaciones</li> <li>- Gastos</li> <li>- Social</li> <li>- Reaseguro</li> <li>- Legal/Legislativo</li> <li>- Otros económicos</li> <li>- Riesgo de cambio</li> <li>- Políticos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Riesgo de cambio</li> <li>- Políticos</li> <li>- Activos</li> <li>- Provisión por primas</li> <li>- Otros económicos</li> <li>- Financiación de riesgos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Operativo</li> <li>- Marketing/Gestión</li> <li>- Dependencia</li> <li>- Estructura de grupo</li> </ul>

Fuente: Ryan *et al.* (2001).

La CAS (2009) clasifica los riesgos que le afectan a las compañías de seguros de no vida en dos categorías principales: riesgos de producto y riesgos operativos. Los riesgos del producto estarían formados por los riesgos de activo, riesgos de pasivo y riesgos de ALM. Los riesgos operativos serían los riesgos de eventos, riesgos de gestión y riesgos de financiación.

Pero, como ya hemos citado con anterioridad, existen otras múltiples clasificaciones. Como por ejemplo la realizada por la IAA (2004), y que está en línea con la visión del CEIOPS, donde se sugiere que los riesgos del asegurador estén agrupados en cuatro categorías: riesgo de suscripción o asegurador, riesgo de crédito, riesgo de mercado y riesgo operativo.

Una visión alternativa es la que ofrecen D'Arcy *et al.* (1997b) para quienes los riesgos para los aseguradores se pueden clasificar en dos principales categorías según aparezcan en el Balance o en la Cuenta de Pérdidas y Ganancias. Además, cada uno de estas categorías se puede subdividir ya que el riesgo del Balance consiste en riesgo del activo y riesgo de pasivo, mientras el riesgo de la Cuenta de Pérdidas y Ganancias consiste en el riesgo asegurador y riesgo de inversión. Estos autores destacan que la ventaja de un modelo de DFA es que puede permitir la interacción entre los distintos tipos de riesgos. El problema es que en la práctica estas relaciones son difíciles de cuantificar.

	<b>Balance</b>	<b>Operaciones (Cuenta PyG)</b>
Áreas tradicionales actuariales	Pasivos	Aseguradores
Nuevas Áreas	Activos	Inversión

Fuente: D'Arcy *et al.* (1997b).

Como hemos ilustrado los riesgos se establecen generalmente en grandes categorías que pueden desagregarse en función del propósito de análisis. Dado que las circunstancias de cada asegurador son únicas, estos riesgos deben actuar como un punto de partida y no como una lista definitiva. Además, para tener una mayor comprensión del perfil de riesgo de la compañía es recomendable examinar sus estados financieros. En concreto, es preciso analizar la Cuenta Técnica, la Cuenta de resultados y el Balance. Para entender mejor los riesgos a que una organización hace frente también es importante considerar porqué las compañías han quebrado en el pasado. Ryan *et al.* (2001) comentan que A.M. Best analizó 683 insolvencias en los Estados Unidos entre 1969 y 1998. Las razones de las insolvencias se pueden ver resumidas en la siguiente tabla.

<b>Total 100%</b>		
<b>Riesgos aseguradores 42%</b>	<b>Riesgo de activo 9%</b>	<b>Otros riesgos 49%</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Insuficientes provisiones/primas, 22%</li> <li>- Crecimiento excesivo, 14%</li> <li>- Siniestralidad catastrófica, 6%</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Activos sobrevalorados, 6%</li> <li>- Impago del reaseguro cedido, 3%</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Filiales, 4%</li> <li>- Cambio significativo del negocio base, 4%</li> <li>- Fraude, 7%</li> <li>- Otros, 7%</li> <li>- No identificados, 27%</li> </ul>

Fuente: Ryan *et al.* (2001).

Otro aspecto importante es observar los riesgos normalmente considerados en los modelos DFA. El Informe KPMG elaborado en 2002 para la Comisión Europea realizó un estudio a partir de los modelos DFA empleados por grandes aseguradoras y consultoras, y cuyos resultados pueden verse a continuación.

Riesgo	Explícitamente	Implícitamente	Omitido
Asegurador (puro)	<input checked="" type="checkbox"/>		
Asegurador (gestión)			<input checked="" type="checkbox"/>
Provisiones		<input checked="" type="checkbox"/>	
Crédito	<input checked="" type="checkbox"/>		
Operativo			<input checked="" type="checkbox"/>
Inversiones	<input checked="" type="checkbox"/>		
Liquidez			<input checked="" type="checkbox"/>
Casamiento de flujos	<input checked="" type="checkbox"/>		
Negocio			<input checked="" type="checkbox"/>
Jurídico y legal		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Reaseguro			<input checked="" type="checkbox"/>
Fluctuaciones en las primas	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Fluctuaciones en el valor de mercado	<input checked="" type="checkbox"/>		
Cambios de mercado		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Cambios sociales		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Cambios del entorno		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Tipo de interés	<input checked="" type="checkbox"/>		
Tipo de cambio	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Tasa de inflación	<input checked="" type="checkbox"/>		
Ciclo económico	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Cambios tecnológicos		<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Fuente: Comisión Europea y KPMG (2002).

### 5.1.2. Paso A.2: Elegir las medidas de rentabilidad y riesgo

Las aplicaciones generales de los modelos de DFA son el análisis de la situación financiera de la compañía y el impacto financiero producido por las estrategias de negocio. Generalmente, se emplean medidas de rentabilidad complejas para evaluar las estrategias de negocio y medidas simples para el riesgo. Posteriormente se evalúa cada estrategia en base al binomio rentabilidad-riesgo, para lo cual es recurrentemente empleada la frontera eficiente. Por el contrario, en el caso de evaluar la solvencia de las compañías se aplican medidas muy avanzadas de riesgo que cuantifican de manera muy elegante el riesgo contenido en la cola de la distribución. Por lo tanto, el objetivo para el cual se realiza el modelo establece en gran parte la métrica usada para evaluar la salida del modelo. Shiu (2006) afirma

que las medidas deben ser elegidas de acuerdo con el propósito del análisis, por lo que cuando existan varias alternativas puede ser deseable emplear simultáneamente varias medidas en el análisis. La CAS (2009) establece que a veces puede ser deseable combinar dos medidas de riesgo en una única medida tomando un promedio. Sin embargo, se debe cuidar que la medida combinada o media del riesgo “no acepte” las estrategias que “serían rechazadas” por cualquiera de las medidas del riesgo cuando son aplicadas por separado. En la siguiente tabla se resumen las medidas de rentabilidad calculadas generalmente para un modelo DFA.

Medida	Comentario
Ganancia total $E(G) = E(X_t) - X_0$	Resulta de restar al valor esperado de una variable X al final del período de proyección, el valor de dicha variable en el momento inicial. Las variables utilizadas comúnmente son el excedente esperado, el capital y el margen de solvencia.
Ganancia prevista anual $E^*(G) = [E(X_t) - X_0]/T$	Resulta de dividir la ganancia prevista entre el período final e inicial $E(X_t) - X_0$ entre el número de períodos de proyección (T).
Valor Actual Neto (NPV) $VAN = \sum_{i=0}^T \frac{FC_i}{(1+k)^i}$	Las medidas de rentabilidad generalmente empleadas son sencillas, pero no tienen en cuenta el valor del dinero en el tiempo. El VAN descuenta todos los flujos de caja futuros simulados (FC) por el modelo a la tasa de descuento apropiada (k).
ROI $ROI = ([E(X_T)/X_0]^{(1/T)}) - 1$	El ROI es una medida relativa de rentabilidad, que evalúa la <i>performance</i> de una empresa considerando todos los capitales invertidos.
Otras medidas	EVA ( <i>Economic Value Added</i> ), el RAROC ( <i>Risk Adjusted Return on Capital</i> ), el valor de las acciones, el valor de la empresa al final del período u otras medidas que dependerán del uso del modelo.

Existen distintas medidas de riesgo que pueden ser empleadas en los modelos DFA. En la literatura actuarial son muy conocidas las medidas del riesgo de tipo de interés, empleadas en los modelos ALM. Los modelos estocásticos de DFA producen, como resultado de la simulación, diversas distribuciones de probabilidad con los posibles resultados para distintas variables de las compañías aseguradoras. Una medida de riesgo es una función de la distribución de probabilidad de los resultados obtenidos. Antes de describir las medidas comúnmente empleadas, es útil analizar el concepto de medida coherente de riesgo que está cobrando una gran relevancia en los últimos años.

Según Artzner *et al.* (1999) sea  $r : V \rightarrow R$  una medida de riesgo, donde  $V$  es un espacio de variables aleatorias en el cual se encuentran todos los factores de riesgo, se dice que  $r$  es una medida de riesgo coherente si satisface los siguientes axiomas:

- Subaditividad: para todo  $X, Y \in V$ ,  $r(X + Y) \leq r(X) + r(Y)$ . En seguros este axioma recoge los posibles beneficios de la diversificación.
- Monotonía: para todo  $X, Y \in V$  con  $X < Y$ , entonces  $r(X) < r(Y)$ . Este axioma significa que si el asegurador A tiene siempre pérdidas ( $X$ ) menores que las pérdidas del asegurador B ( $Y$ ) para todos los escenarios, entonces necesitará menos capital para el mismo riesgo de insolvencia.
- Invariabilidad de Traslaciones: para todo  $X \in V$ , y todo  $a \in R$ , entonces  $r(X + a) = r(X) + a$ . Este axioma significa que si cada pérdida se incrementa en la cantidad  $a$ , el capital total necesario aumenta en la misma cantidad.
- Homogeneidad Positiva: para cualquier  $\lambda \geq 0$  y  $X \in V$ , entonces  $r(\lambda X) = \lambda r(X)$ . Este axioma significa que si un asegurador compra un contrato del reaseguro cuota parte en la proporción  $\lambda$  para todo su negocio, puede reducir su capital en ese porcentaje.

En la siguiente tabla se resumen las medidas de riesgo más básicas.

Medida	Comentario
<p>Media simple de las pérdidas</p> $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$	Las pérdidas obtenidas de la simulación en $N$ períodos del modelo vienen representadas por las cantidades $(X_k, k=1, \dots, N)$ .
<p>Varianza</p> $\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2}{N}$	Es un estimador de la dispersión de una variable aleatoria $X$ respecto su media $\bar{X}$ . Representa la media aritmética de las desviaciones respecto a la media simple elevadas al cuadrado.
<p>Desviación estándar</p> $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	Muestra el promedio de desviación respecto al valor medio para el total de escenarios proyectados. A diferencia de la varianza se mide en las mismas unidades que la variable objeto de estudio.
<p>Rango</p> $R = X_{\max} - X_{\min}$	Cuantifica la diferencia entre el valor máximo y mínimo de los valores de la variable seleccionada. Se calcula fácilmente ordenando los valores según su tamaño.

Tales medidas tienen como ventaja que son fáciles de calcular y útiles para caracterizar la dispersión de una distribución en un solo número. Sin embargo, pueden dar una noción desvirtuada de la variabilidad para distribuciones asimétricas. Para estas distribuciones es más apropiado emplear las medidas de *downside risk*, que se define generalmente como el riesgo de aquella parte de la distribución de probabilidad que se sitúa por debajo de un determinado límite. Esto permite distinguir el riesgo de las desviaciones que están por encima del límite (*upside*) de las que están por debajo (*downside*). En la siguiente tabla resumimos las medidas más simples de *downside risk*.

Medida	Comentario
<p>Varianza <i>downside</i> o semivarianza</p> $\sigma_{downside}^2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma^- (X_k - X_m)^2}$	<p>Representa la media aritmética de las desviaciones al cuadrado de la media calculada respecto al límite establecido <math>X_m</math>. E <math>\gamma^-</math> es una variable binaria tal que si <math>X_k \leq X_m</math> entonces <math>\gamma^- = 1</math>, y si <math>X_k &gt; X_m</math> entonces <math>\gamma^- = 0</math>.</p>
<p>Semidesviación o <i>downside deviation</i></p> $\sigma_{downside} = \sqrt{\sigma_{downside}^2}$	<p>Mide el promedio de desviación con respecto al límite especificado, para el tramo inferior de la distribución de probabilidades<sup>25</sup></p>

En la siguiente tabla resumimos las medidas de riesgo más elaboradas, que capturan de forma más exacta los riesgos a los que se enfrentan las compañías aseguradoras. Las principales desventajas de estas medidas son la dificultad de cálculo y su menor conocimiento por las personas interesadas en los resultados del proceso DFA.

<sup>25</sup> A diferencia del *upside deviation* que se calcula respecto al tramo superior. Está claro que la suma de la *upside deviation* y la *downside deviation* da como resultado la desviación estándar.

Medida	Comentario
Probabilidad de ruina ( $RP$ ). $RP = P(EC_T < 0)$ $EC_T$ el excedente en el período T	Es el porcentaje de la distribución de probabilidad del excedente correspondiente al valor cero.
Coste Económico de la Ruina ( $ECOR$ ) o Déficit previsto del asegurado ( $EPD$ ) $ECOR = E(EC_T   EC_T < 0)$	Es la cantidad media de pérdidas superiores a los activos de la compañía, hecho un promedio sobre las situaciones en las cuales los pasivos exceden los activos.
<i>Expected Default Loss Rate on Surplus</i> $EDLR = E(EC_T   EC_T < 0) / EC_T$	Es el déficit previsto de fondos ( $EPD$ ) en las situaciones de ruina, expresado como porcentaje del excedente.
<i>Stress testing</i>	Evalúa el impacto financiero en la compañía de escenarios extremos.
Shortfall risk o riesgo de caída $SR = P(EC_T < L)$	Probabilidad de que el excedente caiga por debajo del límite especificado ( $L$ ).
Valor en riesgo ( $VaR$ ). $VaR_p = \min \{EC(k): (k/N) > p\}$ o $VaR_p = \min \{PEC(k): (k/N) > p\}$ <sup>26</sup> $PEC_T$ es la distribución de pérdidas del excedente	Máxima pérdida que se puede producir en la distribución del excedente o en la de pérdidas del excedente con un determinado nivel de confianza para el intervalo temporal analizado.
Tail $VaR$ ( $TVaR$ ) $TVaR_p(EC_T) = E(EC_T   EC_T \geq VaR_p(EC_T))$ o $TVaR_p(PEC_T) = E(PEC_T   PEC_T \geq VaR_p(PEC_T))$	Es el promedio de los escenarios en los que la distribución del excedente o de pérdidas del excedente supera al $VaR$ .
$XTVaR$ $XTVaR_p = TVaR_p - Media$	Es la diferencia entre el $TVaR$ y la media de la distribución de pérdidas.
Aplicar transformaciones a las distribuciones simuladas	Transformación de Wang (1998) Funciones de costes friccionales

A continuación describiremos en detalle cada una de estas medidas, de forma que presentamos las principales ventajas e inconvenientes de cada una.

<sup>26</sup> En la literatura actuarial es muy frecuente calcular el  $VaR$  y  $TVaR$  de la distribución de pérdidas agregadas de una compañía respecto al nivel 0 y no al valor del excedente inicial. Esto se realiza implícitamente al calcular el capital necesario proyectando los distintos factores de riesgo y su impacto en el valor del Activo y Pasivo. Sin embargo, en un modelo DFA también puede ser calculada la pérdida esperada respecto al excedente inicial de las distintas estrategias evaluadas.

### **La probabilidad de ruina, quiebra o insolvencia (RP)**

Es el porcentaje de la cola izquierda de la distribución de probabilidad del excedente correspondiente al punto donde éste toma el valor cero<sup>27</sup>. En la práctica se calcula como el cociente entre el número de simulaciones en las cuales el excedente toma valores negativos y el número total de simulaciones efectuadas. Indicaría, por tanto, la probabilidad de que el patrimonio sea insuficiente para cubrir las pérdidas. Matemáticamente se puede comparar el excedente requerido con el real como medida de la suficiencia del capital. El excedente requerido es el valor del percentil de la distribución del excedente determinado por la probabilidad de ruina deseada para ese horizonte temporal.

$$\text{Probabilidad de ruina (RP)} = P (EC_T < 0)$$

Donde

$EC_T$  el excedente de la compañía en el período  $T$

Las ventajas de la probabilidad de ruina son que el concepto es fácil de explicar y de calcular con la distribución del excedente y está apoyado por los reguladores y agencias de calificación (Mango y Mulvey, 2000). Por lo tanto, es una medida comúnmente empleada en los análisis de las salidas de modelos DFA. Sin embargo, la probabilidad de la ruina tiene tres debilidades:

- Mide solamente la probabilidad y no la severidad o coste económico de la ruina (Butsic, 1994 y Powers, 1995). La severidad de la ruina es importante para los asegurados, puesto que determina el porcentaje de sus reclamaciones que será pagado en caso de insolvencia.
- Es esencialmente una medida binaria (solvente/insolvente), no haciendo caso de lo que se denomina los “grados de solvencia”. Además asocia el “riesgo” implícitamente a un sólo porcentaje de la distribución del excedente, por lo que no considera el impacto marginal de cambios en la distribución que no afecten al porcentaje seleccionado.
- No hace caso del valor del dinero en el tiempo, otorgando la misma importancia a las insolvencias con independencia de que ocurran en un futuro próximo o lejano. Normalmente es más preocupante una ruina cuanto más cercana esté en el tiempo. La medida llamada coste descontado previsto de insolvencia (*Expected Discounted Cost of Insolvency* o *EDCI*), es una generalización discutida en Powers (1995) y Gerber y Shiu (1998).

---

<sup>27</sup> Dicho concepto se corresponde con la ruina económica, la ruina técnica se correspondería con el valor del capital mínimo regulatorio en el cual se establece la intervención de la compañía por parte del regulador.

## ***El Coste Económico de la Ruina (ECOR) o Déficit previsto del asegurado (EDP)***

El ECOR o EDP se puede definir como la cantidad media de pérdidas superior a los activos de la compañía, hecho un promedio sobre las situaciones en las cuales los pasivos exceden los activos<sup>28</sup>. Esta medida refleja no sólo la probabilidad de insolvencia sino también la dureza o severidad de la insolvencia bajo las condiciones simuladas, por lo que es recomendada por Butsic (1994)<sup>29</sup>. En la práctica se calcula como el valor esperado del excedente resultante en aquellas situaciones en las que la compañía se encuentra en situación de insolvencia. En el caso de emplear una simulación de escenarios con distinta probabilidad de ocurrencia, habrá que calcular el déficit medio ponderado por la probabilidad de cada escenario. Lo que mide el EDP es la escasez prevista de fondos a través del valor previsto del déficit de una compañía en caso de liquidación. Es decir:

$$ECOR = E (EC_T | EC_T < 0)$$

Barth (2000) muestra como para un valor fijo de *EPD*, hay una relación sustitutiva entre la probabilidad de ruina y el coste previsto de ruina, si se asume que una ruina ocurre. Por ejemplo, si se asume que sucede una quiebra, una compañía de seguros con una probabilidad del 1% y un coste previsto de 1.000.000 u.m. tiene aproximadamente el mismo *EPD* que otra con una probabilidad de ruina del 9% y de un coste previsto de 10.101 u.m. El *EPD* se puede expresar en unidades monetarias, como en el caso anterior. Sin embargo, cuando el propósito es comparar dicha medida entre compañías aseguradoras de distintos tamaños se suele expresar como el cociente con respecto al valor de los pasivos previstos o de la siniestralidad agregada prevista. En ambos casos debe tenerse en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Mango y Mulvey (2000) citan como ventaja del *EPD* que es un mejor indicador que la probabilidad de la ruina, puesto que la medida refleja mejor el conjunto de la distribución en vez de un solo percentil. Sin embargo, es más complejo de calcular y de explicar.

Existe una generalización del *EPD*, conocida generalmente como déficit objetivo esperado o *ETD* (*Expected Target Deficit*). El *ETD* implica calcular la pérdida prevista respecto al excedente objetivo con el cual se compara (*benchmark*).

### ***La ratio EDLR (Expected Default Loss Rate on Surplus)***

El EDLR fue propuesto por Mango (1999), y utiliza el déficit previsto a semejanza del EDP pero lo expresa como porcentaje del excedente en sí mismo. Esto tiene la ventaja de hacer comparaciones del mercado de capitales muy directas. Sin embargo, tiene la desventaja de no ser conocido.

---

<sup>28</sup> Cuando las obligaciones futuras son menores que los fondos sostenidos por la compañía de seguros para resolver esas obligaciones, el "déficit" es cero. Pero cuando las obligaciones futuras son mayores que los fondos sostenidos, el "déficit" es la diferencia entre los dos.

<sup>29</sup> Butsic (1994) establece que la medida relevante de solvencia para los asegurados es el valor actual del déficit previsto del asegurado como cociente de la siniestralidad prevista.

## Escenarios de estrés o Stress testing

Consiste en generar escenarios extremos, y comprobar el impacto que tendrá sobre el excedente de la compañía una determinada composición de productos y carteras de inversión. Mientras que la simulación estocástica permite conocer los posibles resultados de la compañía ante el conjunto de escenarios simulados, el *stress testing* utiliza un subconjunto de escenarios y evalúa el comportamiento de la compañía en tales escenarios de estrés. Esto puede ser muy útil para evaluar la solvencia ante el impacto de acontecimientos extremos en fechas predefinidas o con condiciones macroeconómicas específicas.

## Riesgo de caída (Shortfall risk)

El shortfall risk es la probabilidad de que una variable, en este caso el excedente, caiga por debajo de un cierto límite especificado ( $L$ ). La probabilidad de quiebra es un caso especial en el cual el límite es el punto en el cual se agota el capital.

$$\text{Shortfall risk (SR)} = P(EC_T < L)$$

## Valor en riesgo (VaR)

El VaR es una medida probabilística de las pérdidas esperadas para un período de tiempo en condiciones normales de mercado, en concreto, la máxima pérdida en el valor de mercado en condiciones normales que se puede esperar para un plazo e intervalo de confianza determinados (Jorion, 1996; Simons, 1996). Se define como el valor más pequeño que excede un umbral especificado  $\alpha$ . Para el caso de una variable aleatoria continua se calcula como  $VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha)$ . En el caso de los modelos de simulación DFA, como el *output* de la simulación la variable  $X$  toma valores discretos, el VaR se calcula fácilmente como el valor que toma la distribución de excedente o la distribución de pérdidas del excedente proyectado (PEC) en el percentil deseado  $p$ <sup>30</sup>:

$$VaR_p = \min \{EC(k): (k/N) > p\}$$

$$VaR_p = \min \{PEC(k): (k/N) > p\}$$

En el caso del seguro de no vida nos indica la mayor pérdida que se puede producir en el excedente con un determinado nivel de confianza. El VaR es una medida bastante aceptada en los mercados financieros, debido a que es fácil de interpretar y puede ser aplicada a cualquier cartera de activos y riesgos. No obstante, de acuerdo con las condiciones de coherencia de riesgo establecidas por Artzner *et al.* (1999), el VaR sólo satisface la de subaditividad en determinadas condiciones, por lo que según Embrechts *et al.* (2001) no es una medida coherente del riesgo y en determinadas ocasiones puede conducir a decisiones erróneas<sup>31</sup>.

---

<sup>30</sup> Por eso a veces se menciona como *Percentile Risk Measure*.

<sup>31</sup> Para algunos ejemplos en los cuales el VaR es una medida incoherente, ver Acerbi y Tasche (2002).

### **Tail VaR (TVaR) o Conditional Value-at-Risk (CVaR)**

A diferencia del VaR, el TVaR es una medida coherente de riesgo. El TVaR también es conocido en la literatura como *Mean Excess Loss*, *Conditional VaR*, *Mean Shortfall*, *Conditional Tail Expectation (CTE)*, *Expected Shortfall (ES)*, *Tail Conditional Expectation (TCE)*, *Policyholder's Expected Shortfall* o *Expected Tail Loss*, aunque no siempre estos términos son equivalentes.

El TVaR ha sido propuesto como una alternativa mejorada al VaR, véase Delbaen (2000), Rockafellar y Uryasev (2000, 2002) y Acerbi y Tasche (2002). En su cálculo sólo se tienen en cuenta los escenarios en los que la distribución del excedente o la distribución de pérdidas del excedente<sup>32</sup> ha superado al VaR y con dichos valores se calcula el promedio. Para cada probabilidad p, el TVaR se calcula como:

$$TVaR_p(EC_T) = E(EC_T | EC_T \geq VaR_p(EC_T))$$

$$TailVaR_p(PEC_T) = E(PEC_T | PEC_T \geq VaR_p(PEC_T))$$

El TailVaR es mayor que el VaR para un mismo valor de confianza, ya que es el VaR más el exceso de la pérdida prevista, es decir:

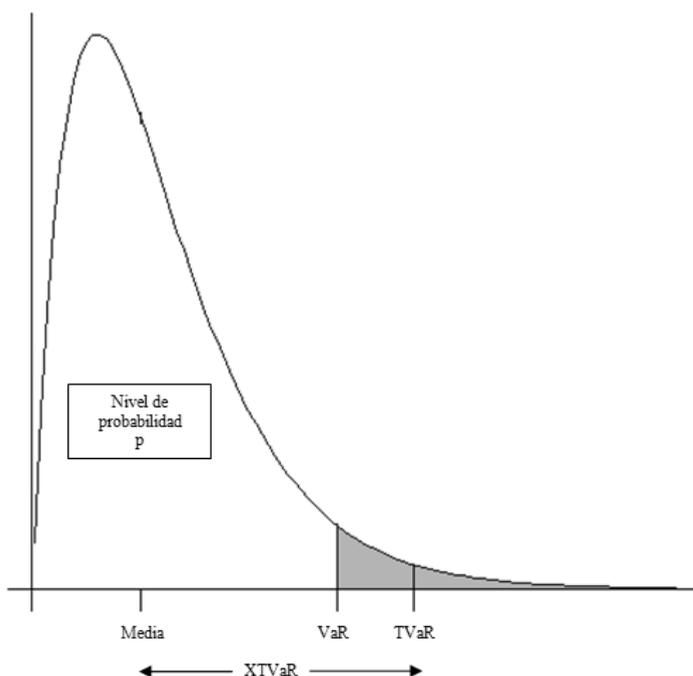
$$TailVaR_p(EC_T) = VaR_p(EC_T) + E[EC_T - VaR_p(EC_T) | EC_T > VaR_p(EC_T)]$$

$$TailVaR_p(PEC_T) = VaR_p(PEC_T) + E[PEC_T - VaR_p(PEC_T) | PEC_T > VaR_p(PEC_T)].$$

En el siguiente gráfico se representa VaR y del TVaR y el XTVaR para una hipotética distribución de pérdidas. El XTVaR es una medida propuesta recientemente que se calcula simplemente como diferencia del TVaR y la media de las pérdidas esperadas. Es fácil intuir que aunque distintas distribuciones tengan el mismo VaR, el TVaR puede ser diferente en función del grosor de la cola, por lo que se dice que mide mejor el riesgo en los casos extremos. Por eso el VaR se considera una medida correcta del riesgo para establecer la cantidad de capital requerida para mantener a una compañía solvente, pero no considera el excedente que quedaría a los beneficiarios en caso de insolvencia. Esta es la causa por la que desde el punto de vista de los asegurados se considere el TVaR una medida de riesgo más adecuada ya que está relacionado con la cantidad última que el asegurador podrá hacer frente en caso de insolvencia.

---

<sup>32</sup> Para el cálculo de dichas pérdidas es adecuado tener en cuenta el valor del dinero en el tiempo.



El TVaR se expresa en unidades monetarias como en la fórmula anterior, o como porcentaje o ratio de la siniestralidad agregada prevista<sup>33</sup>.

$$\text{Ratio TVaR} = \text{TVaR} / \text{Siniestralidad esperada}$$

El TailVaR se concentra en los escenarios que son específicamente perjudiciales a la solvencia de la compañía, por lo que, como afirma Brooke (2003), tiene importantes ventajas para determinar la asignación de capital. Una unidad de negocio tendrá más capital asignado si sus resultados más extremos son peores que los de otras unidades de negocio. Esto significa que la asignación de capital reflejará no sólo la probabilidad de que la unidad de negocio consuma su propio capital, sino también la expectativa de que necesite capital de las otras unidades.

Una crítica que se le efectúa al TVaR es que sólo considera las pérdidas sobre el nivel del VaR. De esta forma, la compañía aseguradora no tiene ningún incentivo para reducir las pérdidas por debajo del nivel del VaR. Sin embargo, existe otra medida denominada la transformación de Wang (WT) que se considera una mejora sobre el TVaR puesto que tiene en cuenta toda la distribución. Además, el TVaR no recoge correctamente las pérdidas extremas de baja frecuencia y alta

<sup>33</sup> Además el TVaR o el ratio TVaR también pueden ser expresados, para comparar distintas compañías, como cociente entre los pasivos previstos.

severidad, dado que explica solamente la media de pérdidas esperada sobre el VaR. Wang (2002b) muestra un ejemplo para entender el mejor comportamiento de la medida WT en estas situaciones.

### **Transformación de Wang (Wang Transform o WT)**

Este método consiste en aplicar una transformación a la función de distribución (Wang, 1998). Si se define la distribución empírica de supervivencia como:

$$\hat{S}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(x \leq X_k)$$

donde  $I$  es la función del indicador, que adquiere el valor “1” cuando la afirmación es verdadera y “0” cuando es falsa.

Se puede poner un énfasis en los valores de cola usando la denominada por Wang (1998) “*Proportional Hazards Transform*”<sup>34</sup>:

$$S(x)^* = \hat{S}(x)^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

### **Transformaciones mediante funciones de costes friccionales**

Los modelos DFA intentan modelizar los riesgos que afectan al Balance y a la Cuenta de resultados de una compañía de seguros, pero en la práctica no pueden considerar todos los riesgos a los que se enfrenta un asegurador. Cuando el objetivo del modelo es la determinación de los requisitos de capital esto significa que podríamos estar subestimando la probabilidad de deterioro financiero para una cantidad dada de capital. Además, los modelos tradicionales de DFA empleados comúnmente para establecer la adecuación del capital no han tenido en cuenta los riesgos operativos. La incorporación de funciones de costes friccionales posibilita que las técnicas DFA evalúen el capital teniendo en cuenta dicho riesgo. Christofides y Smith (2001) muestran múltiples ejemplos de costes friccionales como son los bonus a los directivos cuando la empresa obtiene buenos resultados o los costes de aumentar el capital cuando los resultados son malos.

Christofides y Smith (2001) y Brooke (2003) proponen transformar las distribuciones proyectadas por el modelo mediante el uso de “funciones de coste friccionales” para tratar de considerar los movimientos de efectivo no incorporados o modelados en DFA. Estas funciones ajustan la salida de un modelo de DFA de modo que los acontecimientos inesperados (buenos o malos) den lugar a costes adicionales. Esta transformación se aplica a la distribución modelizada de resultados para conseguir una imagen más realista de la distribución real. Brooke (2003) ilustra gráficamente una función de coste friccional típica y compara la distribución de beneficios antes y después del efecto de esa transformación.

---

<sup>34</sup> El Manual DRM de la CAS (2009) en su Capítulo 8 afirma que esta transformación se aplica generalmente a las distribuciones unilaterales o de una sola cola. Aplicado a una distribución con dos colas se acentúa la cola derecha y atenúa la cola izquierda.

En resumen, podemos decir que la elección de la medida de riesgo es una tarea compleja ya que frente a la multitud de posibilidades válidas, cada una cuenta con sus propias fortalezas y debilidades, la comunidad actuarial no ha convergido en una medida de consenso. De hecho, y en referencia al proceso Solvencia II, el CEIOPS era partidario de emplear el TVaR, pero la Comisión Europea se ha decantado por utilizar el VaR en la fórmula estándar. Además, las medidas anteriormente analizadas hacen referencia a las medidas adecuadas para evaluar la situación financiera y la gestión del riesgo de la empresa. Pero si el objetivo del modelo es la toma de decisiones estratégicas puede ser útil complementar el análisis con otras medidas como son el volumen de primas suscrito, la ratio de siniestralidad, la cuota de mercado, etc. Estas medidas suelen ser más fáciles de entender y más consistentes con los objetivos estratégicos fijados en la planificación de las compañías aseguradoras.

Una vez establecida la medida a emplear surgen otra serie de decisiones. La compañía todavía debe resolver a una serie de cuestiones como son: la base sobre la cual calculará esa medida, el límite aceptable y el horizonte temporal. El Estándar Actuarial de Práctica para las valoraciones de la ASB<sup>35</sup> sugiere que la contabilidad estatutaria es la base apropiada para medir los resultados financieros. Bajo el proyecto Solvencia II la valoración de activos y pasivos debe realizarse de forma coherente con el mercado, desechándose la perspectiva contable. Según se cita en CAS (1995b), la SOA concluyó que la base apropiada para resumir los resultados de un modelo DFA era la base de efectivo o *cash-flow*, siendo el resto sólo importantes en cuanto sirven para identificar restricciones en las operaciones de la empresa. Por otro lado, nosotros somos de la misma opinión que Daykin y Hey (1990) quienes afirmaron que el modelo contable no provee de toda la información necesaria para tomar decisiones sobre la estrategia de negocio futura, de tal forma que es importante modelizar los flujos de caja futuros para tener una visión de la compañía como entidad dinámica. En lo referente al límite aceptable de la medida, muchas veces dicha decisión vendrá impuesta por las normas del regulador, pero en otras la compañía tendrá que decidir entre más capital y menos rentabilidad o viceversa. Respecto al horizonte temporal adecuado para realizar el análisis, Solvencia II se decanta por un año en el modelo estándar. Sin embargo, en un modelo interno pueden ser empleados otros horizontes temporales más amplios. Los Manuales elaborados por la CAS sobre el DFA no prescriben un horizonte temporal de análisis, sino que generalmente se limitan a establecer que un modelo DFA para compañías de vida debe tener un horizonte temporal más amplio que el de una compañía de no vida.

---

<sup>35</sup> *Actuarial Standard of Practice for Appraisals*, promulgado por la ASB (*Actuarial Standards Board*). La ASB es una entidad independiente, establecida en 1988 con el objetivo de establecer Estándares Prácticos para la profesión actuarial en los Estados Unidos. Su página web es <http://www.actuarialstandardsboard.org/>

### 5.1.3. Paso A.3: Evaluar el resultado de la compañía

Una vez seleccionadas las medidas de rentabilidad y riesgo, los modelos DFA intentan representar el desempeño financiero o *performance* de la compañía para comparar distintas alternativas estratégicas. Dejando a un lado las medidas de rentabilidad ajustadas al riesgo ya mencionadas, existen dos medidas principales para evaluar los resultados de una compañía frente a los escenarios proyectados: la ratio de Sharpe y la frontera eficiente.

#### Ratio de Sharpe

La ratio de Sharpe mide la relación entre la prima de riesgo, el exceso de rentabilidad media sobre el tipo de interés libre de riesgo, y la desviación estándar de los rendimientos. Ésta es la fórmula original propuesta por Sharpe (1966), también conocida como *SR desv*. Es decir, si  $E(EC_T)$  es el valor esperado del excedente al final del período de simulación y  $r_f$  la tasa libre de riesgo, el valor de la ratio viene dado por:

$$SR_{desv} = \frac{E(EC_T) - EC_0(1+r_f)^T}{\sigma(EC_T)}$$

El empleo de la desviación estándar en el denominador de la ratio de Sharpe provoca que se tengan en cuenta las desviaciones positivas de la rentabilidad en torno a su valor medio. Esto puede ser subsanado empleando medidas de riesgo *downside*. A continuación se muestran dos versiones de la ratio de Sharpe calculadas sobre la probabilidad de quiebra y el déficit previsto del asegurado (Eling et al. 2008b).

$$SR_{RP} = \frac{E(EC_T) - EC_0(1+r_f)^T}{RP}$$
$$SR_{EDP} = \frac{E(EC_T) - EC_0(1+r_f)^T}{EDP}$$

#### Frontera eficiente

La frontera eficiente es la herramienta más empleada para comparar los resultados de distintas estrategias o decisiones. Es un diagrama de rentabilidad-riesgo en el cual, una vez elegida una medida de rentabilidad y otra de riesgo, se evalúa cada estrategia y se dibuja en un gráfico. Cada estrategia representa un punto, éste pertenecerá a la frontera eficiente si no hay otro con un riesgo más bajo para el mismo nivel del rendimiento o, visto desde otro punto, si no hay otro con más rendimiento para el mismo nivel del riesgo. Los puntos de la frontera eficiente son aquellas combinaciones de rentabilidad-riesgo que dominan a las demás. Pero entre estos puntos no podemos establecer a priori cuál va a ser la posición de la empresa ya que dependerá de su aversión al riesgo medida a través de las denominadas curvas de indiferencia. Desafortunadamente, la comparación de estrategias puede conducir a resultados totalmente diversos si cambiamos las medidas usadas de rentabilidad y/o la de riesgo.

## 5.2. Paso B: Recogida de datos y fijación de las hipótesis de partida

Una condición necesaria para desarrollar un buen modelo DFA es la buena calidad de los datos históricos relativos a las variables y factores dominantes que afecten al activo y pasivo de la compañía. Dicha información servirá para explicitar las hipótesis que utilizará el modelo para proyectar el Balance de la compañía y los flujos de caja. Dado que DFA es un sistema de información, la fiabilidad del modelo dependerá en gran medida de la calidad de los *inputs*. Klaas y Romeike (2005) establecen como los criterios más importantes para una calidad adecuada de los datos, que éstos sean: consistentes, correctos, completos, exactos, suficientes, confiables, comprensibles e importantes.

Otro aspecto relevante en esta etapa es determinar el período de proyección que efectuará el modelo, lo cual depende principalmente de las características de los riesgos a los cuales está expuesta la compañía y del horizonte de planificación de la gerencia. Una característica importante del período de proyección es que debe ser lo suficientemente largo para capturar los efectos completos de los riesgos. Así, el período de la proyección de un asegurador de vida es generalmente más largo que el de un asegurador no vida debido fundamentalmente a (Shiu, 2006):

- Los pasivos y activos de una compañía de vida son a más largo plazo.
- Los pasivos de las compañías no vida son más inciertos. Esto es debido a que no se conoce ni el momento en el que ocurrirá el siniestro, ni la cantidad que habrá que pagar. Por la contra, en seguros de vida la cantidad a abonar está habitualmente predeterminada.

Al determinar el período de proyección de la compañía siempre habrá que tener presente el equilibrio entre la fiabilidad de las proyecciones y la necesidad de considerar completamente todos los activos y las obligaciones del asegurador. Según la IAA (2004) ampliar el horizonte temporal en el cual se analiza la solvencia de las compañías de seguros aumentará generalmente la necesidad de hacer hipótesis explícitas en el comportamiento futuro del asegurado y de la gerencia. La razón reside en que a mayor horizonte temporal mayor será la probabilidad de que el comportamiento actual cambie, por lo que parece razonable permitir (IAA, 2004):

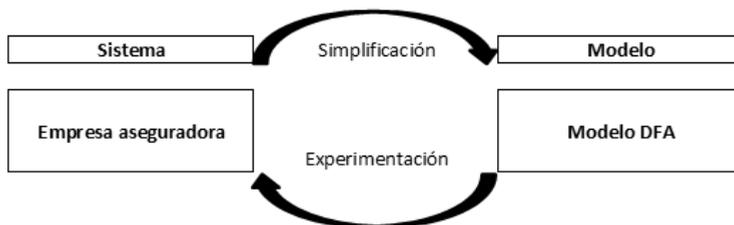
- Transferencias futuras de riesgo.
- Cambios en la estrategia de (re)inversión de la compañía y/o de los procedimientos internos de gestión de riesgo, dando por resultado respectivamente riesgos más bajos de ALM y/o riesgos operacionales.
- Futuros riesgos derivados del nuevo negocio suscrito.

## 5.3. Paso C: Construcción del modelo

Una compañía aseguradora es un sistema o conjunto de elementos relacionados de forma ordenada entre sí y que contribuyen a la obtención de los objetivos em-

presariales. Los sistemas están formados por subsistemas ordenados de una forma particular para conseguir tales objetivos. Para el estudio de sistemas complejos y grandes, en donde la experimentación del propio sistema es dificultosa, se desarrollan modelos. Así, se puede definir un modelo como una representación simplificada de un sistema con el objetivo de estudio o experimentación para la ayuda en la toma de decisiones (Barceló, 1996). Un modelo DFA es una representación de los flujos de caja futuros de la compañía, por lo que debe reflejar la realidad y sus riesgos para proporcionar información útil en la toma de decisiones. Por este motivo, los encargados de la construcción del modelo deben realizar un trabajo arduo de validación de variables, hipótesis y correlaciones empleadas de modo que se refleje lo más fielmente posible la realidad empresarial de la compañía.

El análisis del riesgo es una de las tareas clave de los gestores de las aseguradoras. De esta forma, los modelos DFA se construyen para ayudar a los gerentes de una compañía a intentar anticipar los resultados de diversas acciones. Por otra parte, el uso de dichos modelos se ha visto incrementado en los últimos años fundamentalmente como consecuencia de un entorno más complejo. Por eso los modelos DFA identifican las fuentes de incertidumbre especificando los posibles valores que pueden tomar las variables, a través de sus funciones de probabilidad. Los modelos DFA deben representar las partes y las relaciones más importantes de una compañía aseguradora y de su entorno, con el objetivo de reflejar lo más fielmente su actividad y realizar así de forma fiable las simulaciones de, por ejemplo, distintas estrategias operativas o de cambios en el entorno. El siguiente gráfico muestra la relación existente entre una empresa aseguradora y un modelo DFA.

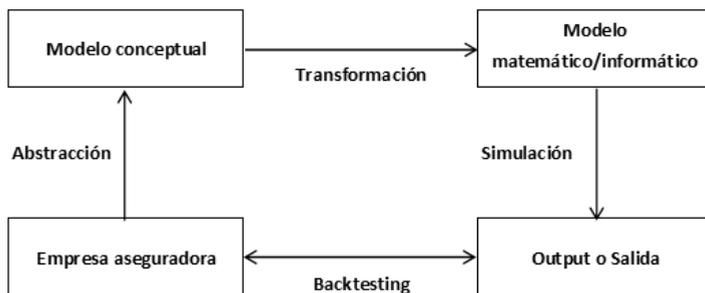


Fuente: Elaboración propia a partir de Barceló (1996).

El primer paso para la elaboración de un modelo DFA es la profunda comprensión del funcionamiento de una empresa aseguradora que permitirá, por medio de un proceso de abstracción, su representación a través de un modelo conceptual. El modelo conceptual debe ser una representación simplificada de la realidad, pero que mantiene intactas las principales relaciones y propiedades del sistema al que representa (Barceló, 1996). Una vez elaborado el modelo conceptual debemos transformarlo en un modelo matemático e informático que posibilite la simulación. Este proceso se realiza gracias a la formalización a través de los distintos modelos matemáticos que representan las distintas relaciones entre las variables del mismo, y su posterior programación (Barceló, 1996).

Una vez programado el modelo estamos en disposición de obtener los resultados u *outputs* del modelo. En teoría, este proceso puede efectuarse por el método analítico o por el método de simulación. Los modelos DFA emplean muchas variables aleatorias con complejas relaciones, por lo que el método empleado es el de simulación por técnicas de Monte Carlo.

Los resultados del modelo debemos compararlos con el comportamiento real obtenido para la validación del proceso de modelización. Debido a que la actividad empresarial se encuadra en un entorno en continuo cambio y además la empresa también puede sufrir cambios internos, el modelo DFA debe ser continuamente validado de forma que nos aseguremos de que no queda obsoleto. En el siguiente gráfico se ilustran los pasos anteriormente citados.



Fuente: Elaboración propia a partir de Barceló (1996).

La CAS (2009) establece que en la construcción del modelo hay que resolver una serie de cuestiones básicas como son la elección entre:

- Modelos estocásticos o deterministas.
- Horizonte temporal del modelo e intervalos de tiempo.
- Modelos generales o específicos.
- Modelos lógicos o basados en los inputs del usuario.
- Interrelaciones con sistemas externos.
- Relaciones entre filiales y la compañía matriz.

El uso para el cual se diseñe el modelo será un determinante fundamental de dichas decisiones. Britt y Johnstone (2001) comentan que un sistema bien diseñado de DFA debiera ser modular, de modo que se puedan emplear fácilmente distintos submodelos. De este modo, no sería necesario simular todos los subsistemas para la toma de decisiones particulares. Warthen y Sommer (1996) destacan que el aspecto más importante en el diseño del modelo es cerciorarse de que da respuesta a las cuestiones que se le plantean. Eso implica que la especificación del

modelo debe incluir el cálculo del *output* que será útil al procedimiento de toma de decisiones. El proceso global de construcción del modelo se puede subdividir en el generador de escenarios, la calibración y el desarrollo del modelo de flujos de la compañía. Estos serán objeto de estudio en los apartados siguientes.

### **5.3.1. Paso C.1: Generador estocástico de escenarios**

El generador de escenarios es el elemento central<sup>36</sup> del modelo DFA, en el cual se explicitan los modelos estocásticos seleccionados para proyectar los factores de riesgo que afectan a la compañía. Los factores de riesgo típicamente incorporados en DFA incluyen riesgos económicos (como inflación o tipos de interés), riesgos aseguradores (como frecuencia o severidad), riesgos de activo (rentabilidad de los inmuebles o de las acciones) y riesgos de negocio (como los ciclos aseguradores)<sup>37</sup>.

Un aspecto clave en todo modelo estocástico es ligar las distintas variables a un conjunto pequeño de factores económicos claves o inductores, los denominados *driving factors* (Mulvey *et al.*, 1998). Así, es común ligar unas variables claves como tipos de interés y/o inflación al resto de variables del modelo. La relación entre ellas puede ser estocástica o determinista, al igual que el proceso que genera la propia variable. Cada variable o relación estocástica aumentará el trabajo para analizar los resultados y el tiempo de simulación del modelo. Por eso, al construir un modelo debe seleccionarse de forma cuidadosa las variables o relaciones estocásticas. Una técnica que se recomienda es un test de sensibilidad. Esta técnica puede ser implementada mediante la incorporación de variables o relaciones estocásticas que anteriormente eran tratadas de forma determinista. Si la situación financiera de la compañía o de la línea analizada cambia de forma relevante, el constructor del modelo debe plantearse la necesidad de que dicha variable o relación sea tratada de forma estocástica. Una advertencia, a veces olvidada y muy útil, reside en preguntarse si los resultados del modelo tienen sentido, ya que si difieren de los esperados puede ser que el modelo sea erróneo o demasiado simple.

#### **A. Propiedades deseadas del generador de escenarios**

Los escenarios no se deben generar de forma aislada, sino que deben reflejar las relaciones entre las distintas variables empleadas en el modelo, puesto que los cambios en una de ellas pueden estar correlacionados con los cambios en otra/s. Por este motivo los modelos estocásticos de DFA emplean normalmente una estructura de cascada con uno o más factores que, actuando como *drivers*, generan las probables condiciones económicas futuras. Los factores como tipos de interés y tasa de inflación son, como ya hemos citado, los empleados principalmente para generar escenarios correlacionados.

---

<sup>36</sup> Esto es cierto en los modelos estocásticos de DFA, ya que en los modelos determinísticos los escenarios son prefijados de forma externa por la dirección de la compañía o por el supervisor.

<sup>37</sup> Blum y Dacorogna (2004) muestran en un gráfico los factores de riesgo normalmente incluidos en los modelos.

A diferencia de la técnica DFA que emplea los test de escenarios, donde éstos son fijados manera consistente, la simulación estocástica puede producir escenarios poco realistas si no se relaciona las variables. Blum y Dacorogna (2004) afirman que no se deben producir escenarios para cada factor de riesgo individual, sino que hay que establecer las dependencias contemporáneas entre los factores de riesgo y las dependencias ínter temporales a lo largo del tiempo. Distintas técnicas como la factorización de Cholesky, el empleo de cópulas, el método de Iman-Conover<sup>38</sup>, o técnicas de series temporales (ARIMA, VAR, VECM, etc.), proporcionan métodos para generar variables correlacionadas. Si los analistas no pueden incluir estas correlaciones en los modelos estocásticos, el riesgo estaría subestimado. Feldblum (1992) destaca que la consideración separada de riesgos correlacionados es insuficiente, ya que la interdependencia entre los distintos riesgos lleva a un gran peligro para la solvencia de las compañías.

Otra propiedad que debe tener el generador de escenarios es la transparencia (Blum *et al.*, 2001), en el sentido de que cada uno de los parámetros tenga un significado práctico tal que posibilite los ajustes manuales del usuario<sup>39</sup>. El objetivo es corregir la estimación o incorporar las expectativas del comportamiento futuro que no son reflejadas por los datos históricos. Muchas veces la compañía realiza varias simulaciones estocásticas con distintos parámetros para el generador de escenarios por la carencia de datos suficientes para la correcta calibración del modelo. Una forma de alcanzar parámetros mejor estimados es utilizar modelos y datos con frecuencias mayores, es decir, emplear por ejemplo, un modelo en base mensual y no anual.

Blum (2005) recuerda que si un Generador Económico de Escenarios (ESG) contempla varias economías, además de incluir los factores de riesgo para cada una debe incorporar un modelo para los tipos de cambio. Cita como requisitos de los modelos para los factores de riesgo económicos los siguientes:

- Los escenarios deben ser representativos del comportamiento empírico de los factores de riesgo modelados. Dada la estructura multivariante y dinámica de la técnica DFA, esto incluye particularmente la dependencia contemporánea e intertemporal. Además, se deben reflejar correctamente los resultados extremos y emplear estructuras que puedan hacer frente a horizontes de largo plazo.
- Los modelos deben respetar los principios económicos generalmente aceptados. Para los factores de riesgo financieros esto significa particularmente que los modelos deben estar libres de arbitraje. Este requisito llega a ser importante si los modelos también se utilizan para la valoración de mercado.
- Los modelos deben ser simples y transparentes. En términos estadísticos, esto exige el requisito de parsimonia, es decir, bajo número de parámetros.

---

<sup>38</sup> Es empleado por el programa @Risk de Palisade.

<sup>39</sup> La transparencia del modelo es una propiedad contemplada por el modelo DynaMo, ya que permite un ajuste fácil de las variables *input*, al presentarlas en la hoja de Excel inicial del modelo.

- Los métodos y las herramientas para la calibración y la validación deben ser una parte integral del modelo.
- El modelo y su implementación deben tener buenas propiedades.

Otras propiedades citadas por Britt y Johnstone (2001) son la cobertura y el arreglo a los requisitos particulares del usuario. Respecto a la cobertura, los autores consideran que lo óptimo sería que el generador económico pudiera modelizar todas las variables requeridas en el análisis DFA, por lo que el número de las variables se debe considerar dependiendo del uso del modelo<sup>40</sup>. Por su parte, el ajuste a las necesidades particulares del usuario debe realizarse buscando un equilibrio entre la facilidad de empleo y la flexibilidad. Los modelos, que permiten al usuario especificar los parámetros o incluir variables adicionales, agregan mayor flexibilidad pero requieren una mayor maestría del usuario.

La anterior lista básicamente concuerda con las aportadas por otros autores. Por ejemplo, Berger y Madsen (1999)<sup>41</sup> destacan que la compañía *America Re-Insurance* en el desarrollo de su modelo ARMS, definió los criterios siguientes para modelizar diversas economías:

- Debe ser lógicamente defendible, es decir, las relaciones entre las variables económicas deben ser consistentes con la teoría económica y con los datos históricos.
- Debe producir relaciones apropiadas en un cierto plazo. Los movimientos en las variables económicas deben ser razonables a través de horizontes de largo plazo y a través de diversos pasos o *steps* de tiempo, que son los períodos en los que se divide el horizonte temporal del modelo. Es decir, las propiedades estadísticas de los factores deben ser consistentes independientemente del tipo de simulación temporal (mensual, anual, etc.) empleada.

## B. Tipos de modelos de generadores de escenarios

Los generadores de escenarios que emplean los modelos DFA se pueden clasificar en función de la técnica empleada. Berger y Madsen (1999) distinguen dos tipos de técnicas para la modelización de activos:

- Los *modelos de valoración* se basan en la suposición de que cualquier oportunidad de mercado que genere una rentabilidad libre de riesgo será explotada hasta que se agote. Estos modelos fallan al intentar calcular las rentabilidades razonables de los activos o los tipos de interés en horizontes temporales amplios.

---

<sup>40</sup> Por ejemplo, para apoyar las decisiones sobre la estrategia de reaseguro no se requiere un generador económico de escenarios que modele una extensa variedad de clases de activo.

<sup>41</sup> Berger y Madsen (1999) también muestran cómo producir escenarios coherentes con las propiedades que se desea que tenga el generador de escenarios especificados por el usuario empleando el modelo ARMS.

- Los *modelos estratégicos o basados en la simulación de Monte Carlo* permiten explorar múltiples trayectorias plausibles para el futuro, proporcionando una visión a largo plazo que puede ser usada para diseñar estrategias de gestión según el binomio rentabilidad-riesgo. Britt y Johnstone (2001) subdividen los modelos basados en simulación de Monte Carlo en modelos actuariales y modelos estadísticos. Los modelos actuariales englobarían a los clásicos modelos actuariales del riesgo ampliados a una amplia gama de factores de riesgo, como tipos de interés, inflación, etc. Los modelos estadísticos estarían formados por modelos avanzados y modelos tradicionales en los que la rentabilidad de las distintas clases de activo era obtenida mediante técnicas de media, varianza y correlación. De esta forma se asumía generalmente que las rentabilidades de cada clase de activo se distribuían de forma normal con medias, varianzas y correlaciones especificadas<sup>42</sup>. Los modelos estadísticos basados en medias-varianzas y correlaciones, como el elaborado por Schmeiser (2004), son empleados en modelos sencillos de DFA. En la actualidad destacan en mayor medida modelos más avanzados, que pueden o no adoptar una estructura de cascada. El DynaMo adopta una estructura de cascada con los tipos de interés a corto plazo generando variables como la inflación o la rentabilidad de las acciones, y cuya estructura es muy similar a la ya mostrada del modelo de Kaufmann *et al.* (2001)

### **5.3.2. Paso C.2: Estimación de los parámetros de los modelos**

El constructor del modelo DFA debiera cerciorarse de la correcta estimación de los parámetros que se utilizan para cada variable, y probar y validar el carácter razonable de las hipótesis y de sus interacciones dentro del modelo. Los procesos estocásticos deben ser calibrados antes de que puedan ser empleados para simular. Por tanto, la estimación de los parámetros consiste en encontrar los valores que permitan construir escenarios consistentes y realistas. La técnica se centra en fijar los parámetros de acuerdo con el comportamiento histórico de las variables (estimación de máxima verosimilitud, método de los momentos, etc.). Como resultado los escenarios generados tienen el mismo comportamiento estocástico que los datos históricos, lo que no es necesariamente la mejor proyección para el futuro (Blum *et al.*, 2001). En términos prácticos este método recibe tres críticas:

- Se asume implícitamente que el comportamiento futuro de las variables es fundamentalmente igual al empleado para la estimación, es decir, al comportamiento pasado.

---

<sup>42</sup> Esta técnica tiene como ventaja la simplicidad. Pero las desventajas citadas por los autores son dos. La primera es que el modelo muestra un ajuste pobre a los datos, especialmente en la cola que es crítica para el cálculo y la asignación de capital. La segunda reside en que, al no establecerse ningún control sobre cómo una variable progresa a partir de un período al siguiente, variables que históricamente tienen reversión a la media, como tipos de interés e inflación, tienden a valores que exhiben una autocorrelación demasiado baja.

- Los escenarios generados no explican cambios fundamentales o cambios de régimen de las variables, ni pueden explicar acontecimientos extremos no experimentados en el pasado.
- Los escenarios generados simulan el mismo riesgo emanado del comportamiento pasado de las variables, por lo que los acontecimientos inusuales o “extremos” ocurrirán en el mismo grado que tales acontecimientos ocurrieron en el pasado.

Para intentar solucionar los problemas de la estimación de parámetros en base única a su comportamiento pasado, Blum *et al.* (2001) proponen un procedimiento formado por tres etapas. La primera consistiría en hacer distintas simulaciones estocásticas con diversos sistemas de parámetros para el generador de escenarios. Estos sistemas se pueden basar en valoraciones estadísticas, pero también en ajustes manuales que reflejen otras hipótesis. Posteriormente, en la segunda etapa, se deben identificar los escenarios simulados que han conducido a resultados extremos y explorar sus características comunes. La tercera y última etapa, complementaría las simulaciones estocásticas con técnicas de *stress testing* que modelizan los acontecimientos adversos.

Una vez especificados los parámetros del modelo, debe realizarse su validación. Un método frecuentemente empleado para esta tarea es el *back-testing*. La hipótesis subyacente es que un modelo bien especificado debe razonablemente reproducir los resultados reales de la compañía. En el caso de que los resultados reales difieran en exceso de proyecciones realizadas puede ser conveniente investigar tales diferencias con el fin de reconciliar los resultados del modelo con los resultados reales.

### **5.3.3. Paso C.3: Modelo de la compañía**

Una vez estimados y validados los parámetros que utilizarán los distintos procesos estocásticos y las relaciones entre ellos, se debe crear un puente de unión entre la simulación estocástica de los flujos de liquidez y los *outputs* del modelo. El modelo de la compañía en DFA refleja la estructura financiera y operativa de las compañías aseguradoras. Mientras los escenarios generados describen posibles evoluciones de los factores de riesgo, el modelo de la compañía refleja el comportamiento del asegurador ante el conjunto de escenarios simulados. Por tanto, el modelo corporativo integra la simulación de los factores de riesgo con la actividad de activo y pasivo de la compañía. Britt y Johnstone (2001) afirman que el modelo de la compañía realiza un número de tareas, que incluyen: modelizar los activos no invertidos como el material informático, modelizar los pasivos no aseguradores como los impuestos o la emisión de deuda, y producir informes pro-forma y datos pro-forma (Cuentas de resultados, crecimiento en primas netas suscritas, ratios de gastos, etc.).

Los modelos DFA deben reflejar lo más fielmente la realidad, lo requiere considerar todas las partidas del Balance y de la Cuenta de Pérdidas y Ganancias. La

modelización de todas las partidas es una tarea compleja y que no agrega mucho valor al análisis. Por ello, cualquier modelo DFA debe siempre buscar un equilibrio entre sencillez y valor. Así, una solución habitual en los modelos DFA es ligar la evolución de determinadas partidas que se consideran no excesivamente relevantes con otras que se toman como referencia.

#### 5.4. Paso D: Simular el modelo

Un modelo DFA proyecta los flujos de liquidez futuros y los valores del activo y pasivo de la compañía. Debido a la mayor velocidad y capacidad de los ordenadores y la mejora en los paquetes de *software*, DFA se ha convertido en una herramienta de gestión del riesgo apoyada por métodos de simulación basados en programas de ordenador.

Un modelo DFA, en teoría, puede ser resuelto por el método analítico o por el método de simulación. Los modelos DFA emplean muchas variables aleatorias con complejas relaciones, por lo que el método empleado es el de simulación por técnicas de Monte Carlo. Así, podemos afirmar que los modelos DFA emplean la simulación para obtener soluciones numéricas. El método de Monte Carlo se puede ver como un método no determinístico o numérico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud.

Un método de simulación es un método de cálculo en el que la distribución de los posibles resultados de las variables definidas como *output* se genera mediante el cálculo repetido (número de iteraciones) de valores diferentes para las distintas combinaciones de las variables aleatorias de entrada o *inputs* del modelo. Las técnicas más empleadas de simulación son la técnica de Monte Carlo puro y estratificado, donde destaca el método Latino Hiperbólico. El método de toma de muestras Monte Carlo es una técnica tradicional de toma de muestras para variables aleatorias en los procesos de modelización por simulación. En dicho método, las muestras son seleccionadas de forma completamente aleatoria para todo el rango de la distribución, y por lo tanto se requiere una gran cantidad de muestras para alcanzar la convergencia en distribuciones con colas largas. Por el contrario, el método de simulación Latino Hiperbólico es un método relativamente nuevo de recolección de muestras por estratificación. Está diseñado para recrear con mayor precisión distribuciones de entrada tomando muestras para un número más reducido de iteraciones. Las técnicas de toma de muestras estratificadas, al contrario que las técnicas del tipo Monte Carlo puro, tienden a alcanzar la convergencia de una distribución con menos muestras.

Un elemento trascendental de cualquier método de simulación es el generador de números aleatorios, que se puede definir como un algoritmo que determina la selección de números aleatorios entre el rango entre 0 y 1. El generador de números aleatorios tiene una semilla o número que inicia la selección de números a partir del generador de números aleatorios.

Una vez hemos que realizado un repaso básico a los métodos y componentes de la simulación<sup>43</sup>, debemos centrar ahora el debate en su aplicación particular a los modelos DFA. Analizaremos el método de simulación, el número de iteraciones y la semilla a emplear para obtener buenos resultados en el modelo.

Dado que muchos de los riesgos a los que se enfrenta la empresa, y generalmente los riesgos aseguradores y operativos, tienen una cola derecha larga, es conveniente el empleo del método de simulación Latino Hibercúbico. De esta forma, y como ha sido ya se ha citado, se permite alcanzar la convergencia de una distribución con menos muestras, lo que implica un menor tiempo de simulación. Otra posibilidad es emplear el método de Monte Carlo aleatorio, pero en este caso puede ser conveniente aumentar el número de iteraciones.

Otro aspecto fundamental es el número de iteraciones a efectuar en el modelo. Una recomendación teórica es que dicho número sea mayor cuanto mayor sea el número de factores de riesgo incluidos en el modelo, los procesos estocásticos que el modelo contiene, los lazos de regeneración o *feedback loops* y el horizonte temporal para el que se emplea. En la práctica se aplica el principio de convergencia según el cual se debe ir ampliando sucesivamente el número de simulaciones efectuadas hasta que las distribuciones de salida sean estables. Dicha estabilidad se habrá alcanzado cuando al realizar más iteraciones no se produzcan cambios notables en el perfil o en las estadísticas descriptivas de dichas distribuciones.

Las distintas opciones de la semilla del número de generadores dependerán del propósito del análisis. Inicialmente, la semilla debe fijarse de forma aleatoria, siendo la forma adecuada de obtener el número de iteraciones que conducen a la estabilidad de los *outputs*. Una vez obtenido este número resulta adecuado establecer el mismo valor de la semilla (valor fijo). De esta forma, el generador de números aleatorios generará las mismas series de números aleatorios cada vez que se ejecuta una simulación, lo que es de suma utilidad para realizar los tests de sensibilidad de: determinados parámetros, hipótesis, modelos para las variables de proyección o evaluar estrategias de negocio alternativas.

Otra opción es el empleo de distintos generadores de números aleatorios. Teóricamente sería adecuado analizar los resultados obtenidos por medio de distintos generadores en vistas a garantizar que los resultados obtenidos no son fruto de unos números aleatorios particulares.

## **5.5. Paso E: Análisis del modelo: Output y test de sensibilidad**

Los resultados obtenidos por el modelo deben ser resumidos en las medidas de rentabilidad y riesgo aceptadas, con el objetivo de ser discutidos e interpretados. Así la compañía puede establecer los riesgos y ventajas asociados a las estrategias analizadas en el modelo, o determinar el capital necesario bajo los escenarios

---

<sup>43</sup> Un examen más exhaustivo será realizado en el capítulo 4 de este trabajo.

simulados. Si bajo algunos escenarios adversos plausibles los resultados no son aceptables para los directivos, se deben identificar las causas o factores de riesgo que los han impulsado. Para ello es muy útil incluir en la construcción del modelo distintos *outputs* intermedios considerados relevantes en la salida del modelo.

A modo de ejemplo, imagínese que una compañía aseguradora elabora un modelo DFA con el fin de determinar el capital ajustado al riesgo necesario. En función del uso del modelo deben adoptar una u otra medida de riesgo. Todas las medidas de riesgo son calculadas para la función de distribución del excedente proyectado (Activos-Pasivos) o para la función de distribución de pérdidas del excedente (Excedente final-Excedente inicial). Dichas funciones son los *outputs* finales del modelo. Suponga que una de las medidas seleccionadas, como la probabilidad de ruina de la compañía, tiene una probabilidad asociada superior al límite especificado para ese período. La compañía seguramente desee saber cuáles son las causas principales de ese deterioro financiero. Si el modelo DFA ha sido construido con variables intermedias, se podrá determinar si detrás de esas simulaciones están escenarios que provocan una alta siniestralidad o una mala rentabilidad de las inversiones, entre otros. Por lo tanto, un buen consejo para las personas o equipos interesados en el desarrollo de modelos DFA es incluir en la salida los valores de las siguientes variables: flujos aseguradores del período, flujos de inversión, frecuencia y severidad (u otras variables empleadas para modelizar la siniestralidad como el *loss ratio*, etc.), rentabilidad de las acciones y otras propiedades de la compañía, provisiones, tipos de interés, inflación, impuestos, primas, reaseguro, y/o de cualquier otra que tenga interés para el objeto del estudio efectuado. El análisis de los escenarios específicos que han determinado las situaciones no aceptables por la compañía recibe el nombre de análisis *drill-down*. Fruto de este proceso es útil recurrir a análisis ABC, que establece cuáles son los factores de riesgo o escenarios que provocan un mayor número de situaciones no aceptables. La compañía debe entonces determinar la razonabilidad de tales escenarios y su probabilidad relativa de ocurrencia, viendo si está en línea con lo proyectado por el modelo. En caso afirmativo, un modelo DFA potente debe ser capaz de sugerir posibles medidas correctivas, que serán bien recibidas por la directiva de la compañía.

Una vez realizadas las simulaciones del modelo DFA, se debe realizar un análisis de sensibilidad para examinar cómo los resultados originales reaccionan a cambios en las hipótesis o parámetros iniciales. Para ello, es importante establecer un valor fijo de la semilla con el fin de que las nuevas simulaciones se realicen con los mismos números aleatorios, evitando el efecto que podría tener una nueva serie de números aleatorios en el resultado del modelo. Con este proceso la compañía busca cerciorarse de que los resultados obtenidos en la simulación son robustos y no producto de un sistema particular de hipótesis y parámetros empleados. Tanto Burkett *et al.* (2001) como Eling *et al.* (2008b) destacan la importancia de analizar la robustez de los resultados<sup>44</sup>.

---

<sup>44</sup> Estos últimos autores, a partir de un modelo DFA propio, analizan la robustez de los resultados variando el capital inicial asumido por la compañía, el horizonte temporal, y los parámetros alfa (porcentaje de inversiones de alto riesgo de la compañía) y beta (cuota de mercado de la compañía del negocio asegurador).

## 5.6. Paso F: Elaboración de un informe de resultados

Como resultado de las anteriores etapas se debe elaborar un informe dirigido a la gerencia de la compañía o a los reguladores, dependiendo del propósito del análisis. Por ejemplo, en el Reino Unido el regulador obliga a elaborar un informe resumen del análisis de solvencia de un asegurador bajo diversos escenarios adversos, recibiendo dicho informe el nombre de Informe de la condición financiera (*Financial Condition Report* o FCR). El informe elaborado describirá principalmente los resultados encontrados por el modelo y cómo éstos se alcanzaron.

Un proceso de DFA crea una cantidad extensa de información y datos, por lo que la comunicación eficaz con directivos o supervisores dependerá de la habilidad para resumir esa información. Los métodos principales para facilitar el resumen de los resultados son: los gráficos o distribuciones de las variables, las tablas o cuadros con la identificación y clasificación de los escenarios, los análisis estadísticos, etc. Las distribuciones o gráficos de las variables relevantes para la toma de decisiones permiten evaluar la forma y valores particulares de las funciones de distribución (valor esperado, *shortfall risk*, VaR, etc.). Las técnicas del tipo *drill-down* permiten la identificación y clasificación de los escenarios evaluados, posibilitando que la compañía valore la probabilidad de ocurrencia de tales escenarios y la adopción de medidas correctivas para evitar o alcanzar esas situaciones. Además existen varios métodos estadísticos (Test de Granger<sup>45</sup>, análisis de regresión, análisis de la varianza, etc.) que ayudan a determinar el efecto de distintas variables individuales en una variable objetivo, contribuyendo a determinar las variables explicativas de los resultados del modelo.

Varios textos proporcionan recomendaciones o guías para realizar una comunicación eficaz, de forma que se puede completar el objetivo del DFA; proporcionar a distintos grupos de interés información útil de la compañía para la toma de distintas decisiones. Wiesner y Enma (2000) muestran algunas recomendaciones útiles en el proceso de comunicación de información a la gerencia: realizar las comunicaciones breves y enfocadas, eliminando las medidas o la información que sean secundarias a los objetivos primarios; relacionar cómo las distintas estrategias están en línea con la visión y las metas corporativas; seleccionar los resultados más importantes del proceso e incluirlos en un breve resumen ejecutivo, de forma que los resultados numéricos vengán apoyados por gráficos; evitar las proyecciones de números específicos, mostrando las tendencias y patrones al discutir distintas estrategias; no discutir de manera extensa el proceso de DFA (DFA no es la meta, es una herramienta); y por último apoyar con otra información de la compañía el análisis DFA. La CAS (2009) también ha elaborado un conjunto de materiales que proporcionan consejos a la hora de resumir los resultados del análisis. Una de las principales conclusiones de estos textos es que toda presentación debe estar estructurada en tres partes (véase el siguiente cuadro), de forma que la audiencia

---

<sup>45</sup> El Test de Granger consistente en comprobar si los resultados de una variable sirven para predecir los valores de otra variable.

del proceso, principalmente la gerencia de la compañía o los supervisores, obtengan la información necesaria para sus decisiones.

Fases de una presentación	Contenido
1. Orientación	La meta es preparar a la audiencia para la presentación de resultados financieros. Los aspectos a presentar incluyen: metas del estudio, opciones que se evaluarán, medidas financieras evaluadas, hipótesis realizadas y descripción del proceso de modelización.
2. Presentación de resultados	Gama de resultados financieros para cada una de las distintas opciones evaluadas y riesgos asociados.
3. Conclusión	Resumir la presentación y alcanzar una conclusión, de forma que se dejen especialmente claros los siguientes aspectos: exposición de las metas del estudio, resumen de los resultados y una opinión sobre la mejor línea de acción.

Fuente: Elaboración propia a partir de CAS (2009).

### 5.7. Paso G: Control y optimización

Los modelos DFA pueden contener un submódulo para la optimización de distintas estrategias objeto de análisis. Una vez identificadas las estrategias óptimas, la compañía debe realizar un reajuste de la actual o implantar una nueva para alcanzar sus objetivos. Los modelos estocásticos de ALM, generalmente disponen de módulos de optimización estocástica, principalmente para la estrategia de inversión. Los modelos DFA son generalmente más complejos que los modelos estocásticos de ALM, por lo que resulta muy complicado optimizar estrategias. Sin embargo, algunos modelos sofisticados de potentes compañías han incorporado rutinas que optimizan un conjunto amplio de estrategias, principalmente las estrategias de inversión, reaseguro, estructura de capital y pago de impuestos. Debido a la dificultad de aplicación de estas técnicas, es común que las distintas estrategias se prueben de forma manual. El proceso consiste en ir probando distintas estrategias entre una lista previamente elaborada y optar por la que mejores resultados haya obtenido.

A lo largo de este capítulo hemos visto que DFA es, principalmente, una técnica de generación estocástica de los flujos de caja y de los activos y pasivos de una compañía aseguradora para un período de proyección. Está basada en un conjunto de herramientas avanzadas para la gestión del riesgo como la simulación de tipo Monte Carlo, la teoría de valor Extremo o la teoría de Cópulas, entre otras, que es necesario resaltar, y a las cuales se les dedica el siguiente capítulo de este trabajo de investigación.

## **CAPÍTULO 3**

# **HERRAMIENTAS PARA LA CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO EN DFA**

### **1. INTRODUCCIÓN**

DFA es el proceso que consiste en la simulación de la actividad aseguradora de forma integral con fines alternativos a través de la modelización estocástica de las variables determinantes de la evolución de los activos y pasivos. Para llevar a cabo esta tarea, DFA integra diversos modelos y técnicas financieras, estadísticas y actuariales en un modelo de simulación dinámica.

Los modelos DFA emplean muchas variables aleatorias con complejas relaciones. Dado que no es posible realizar evaluaciones analíticas, los modelos DFA emplean técnicas de simulación de Monte Carlo. La simulación es un sistema por el cual se generan números aleatorios generalmente siguiendo una cierta distribución de probabilidad. Para ello, habitualmente se realiza el ajuste a distribuciones paramétricas a partir de un conjunto de observaciones, aplicándose los test de bondad de ajuste y los criterios para la selección de modelos alternativos.

Un aspecto esencial es que los escenarios generados deben reflejar las relaciones entre las distintas variables empleadas en el modelo. En este sentido el coeficiente de correlación lineal, empleado por el CEIOPS para la agregación de las cargas de capital bajo el modelo estándar, es una medida incapaz de reconocer relaciones no lineales entre las variables. El modelo estándar se puede resolver analíticamente, gracias al empleo de las matrices de correlación lineal, sin embargo esta opción no siempre es factible en DFA. En este sentido, es útil describir los métodos más habituales para dotar a las variables aleatorias de una estructura de dependencia<sup>1</sup>. Entre estos métodos destacan la estructura de cascada, la factorización de Cholesky, el método de Iman-Connover (IC) y el empleo de cópulas.

La dependencia en las colas entre varias variables cobra una gran importancia en el contexto de la solvencia de una compañía aseguradora, y se incorpora en un modelo DFA a través de las cópulas. Básicamente, las cópulas generan la estruc-

---

<sup>1</sup> Estas son las principales técnicas para dotar de una estructura de dependencia contemporánea, mientras que para la dependencia intertemporal se suelen aplicar técnicas derivadas del análisis de series temporales.

tura de dependencia deseada entre variables uniformes, a partir de las cuales por el método de la inversa se generan los verdaderos valores de la distribución. En este trabajo se realiza una revisión de la tipología de las cópulas, sus principales características y cómo estas pueden ser empleadas en un contexto DFA. Finalmente, se trata la Teoría del Valor Extremo (*Extreme Value Theory*, EVT) que cada día está cobrando más importancia en la gestión del riesgo de las compañías aseguradoras, en especial en la modelización de la cuantía de los siniestros y del riesgo operativo y de mercado. En este sentido, abordaremos las distribuciones paramétricas de valor extremo y los distintos métodos para su calibración a partir de una muestra de observaciones.

El objetivo de este capítulo es describir las principales herramientas cuantitativas que se precisan para construir un modelo DFA, para lo que se estructura en los siguientes apartados. En el apartado 2 se realiza una revisión de los métodos de simulación de Monte Carlo. Posteriormente, en el apartado 3 se expone el concepto de dependencia entre variables aleatorias y las medidas de asociación entre ellas. En el apartado 4 se analizan los distintos métodos para generar dependencia entre las variables aleatorias de un modelo DFA, prestándole una atención especial a la Teoría de Cópulas. En el apartado 5 se analizan las técnicas tradicionales de bondad de ajuste y selección de modelos. Finalmente, en el apartado 6 se realiza una revisión de la Teoría de Valor Extremo.

## **2. LA SIMULACIÓN DE MONTE CARLO**

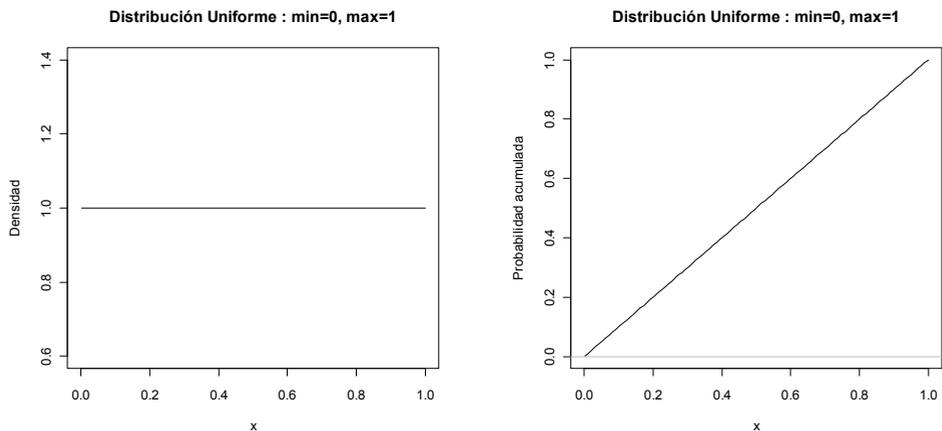
El análisis financiero dinámico o DFA es el proceso que consiste en la simulación de la actividad aseguradora de forma integral a través de la modelización estocástica de las variables determinantes de la evolución de los activos y pasivos. Es común que un modelo DFA se emplee para analizar el riesgo o la solvencia de una compañía. Para ello DFA se sirve del método de Monte Carlo, que consiste en la realización de un número de simulaciones a partir de un conjunto de parámetros seleccionados aleatoriamente y del cálculo del resultado para cada combinación de parámetros. A modo de ejemplo, para el cálculo de la probabilidad de ruina dividiremos el número de simulaciones en el que el excedente de la compañía ha caído por debajo de cero entre el número de simulaciones totales efectuadas. De ello se deriva que es necesario un elevado número de simulaciones para realizar una estimación más precisa y así reducir la influencia de una muestra en el total estimado. El método Latino Hipercúbico (LH) para la generación de muestras permite obtener unos resultados aceptables con un menor número de simulaciones.

Para realizar la simulación de un modelo DFA debemos reproducir la aleatoriedad de los componentes del modelo mediante la generación de las variables aleatorias. La generación de una variable aleatoria se refiere al proceso por el cual obtenemos muestras de números aleatorios a partir de una distribución de probabilidad especificada previamente. El método más empleado para la generación de variables aleatorias es el método de la transformación inversa o método de la inversión.

## A. Método de la inversa

El método de la inversa consiste en generar variables aleatorias según una distribución de probabilidad a partir de variables aleatorias distribuidas uniformemente. Para aplicar este método el primer paso consiste en la generación de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución uniforme en el intervalo  $[0,1]$ . En un segundo paso se aplica la función inversa de la distribución de probabilidad que se desea simular al número aleatorio uniforme, obteniendo así el número deseado.

Formalmente: Sea  $X$  una variable aleatoria cuya función de distribución es  $F(x)$ .  $F^{-1}(z)$  es la función inversa de la función de distribución y está definida como:  $F^{-1}(z) = \min\{x | F(x) \geq z\}$  estando  $z$  comprendido entre 0 y 1. Además,  $F^{-1}(0) = -\infty$  y  $F^{-1}(1) = +\infty$ . Para generar  $n$  valores de  $X$  a partir de su función de distribución  $F(x)$  extraeremos  $n$  valores  $u$  a partir de la distribución Uniforme con mínimo 0 y máximo 1. La ley Uniforme  $(0,1)$ <sup>2</sup> proporciona la misma probabilidad a cada uno de los puntos en el intervalo  $[0,1]$ , y su función de densidad viene dada por  $f(x) = 1/(max - min)$  para  $min \leq x \leq max$ , por lo que puede verse que sus valores no depende de  $x$ . De esta forma, obtenemos  $u_1, u_2, \dots, u_n$  realizaciones independientes de  $\mathcal{U}[0,1]$ . En el siguiente gráfico se muestra la función de densidad (izquierda) y de distribución (derecha) de la ley Uniforme  $(0,1)$ .



Una vez extraídos  $n$  valores de  $u \in [0,1]$  calculamos  $x_i = F^{-1}(u_i)$ . Por tanto,  $(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_n))$  es la realización de una muestra de  $n$  valores de la ley con función de distribución  $F(x)$ .

---

<sup>2</sup> La distribución Uniforme es un caso especial de la distribución Beta.

### Ejemplo. Generación de muestras mediante el método de Monte Carlo con diferentes programas informáticos.

En Excel podemos emplear las funciones estadísticas que posee para generar muestras aleatorias. En primer lugar, generamos la distribución uniforme y posteriormente empleamos las distribuciones inversas, que están implementadas para el caso de la Normal, Gamma, Lognormal,  $t$  de Student y Beta.

Si queremos generar diez muestras de una Normal (0,1), insertamos en una celda la función =ALEATORIO() y en otra celda la función =DISTR.NORM.INV() con probabilidad el número uniforme previamente generado y la media y desviación estándar deseadas.

En @risk se puede efectuar tanto simulación por el método de Monte Carlo puro como por el método LH que veremos a continuación. Las distribuciones de este paquete informático son de la forma RiskFunción, así por ejemplo para generar una variable aleatoria distribuida como una Normal(0,1) introduciremos RiskNormal(0,1). A la hora de efectuar una simulación debemos seleccionar el método de selección de muestras de Monte Carlo.

En R podemos emplear las funciones random. Por ejemplo, para generar 1000 muestras de una Normal (0,1) simplemente establecemos rnorm(1000)

A veces resulta difícil obtener la función inversa para determinadas distribuciones, en cuyo caso se emplean otros medios o procedimientos. Ejemplos de estos métodos son el método de la aproximación a la función inversa, el método de aceptación-rechazo propuesto por John Von Neumann (1951), etc. Existen además distribuciones a las que es difícil o imposible aplicar los anteriores métodos por lo que se suelen aplicar métodos particulares para su simulación. Entre este tipo de distribuciones destaca particularmente la distribución Normal. Un método frecuentemente empleado para generar muestras a partir de una distribución Normal es el método de Box-Muller. Este método emplea dos variables independientes  $u_1$  y  $u_2$  para generar dos variables aleatorias independientes  $x_1$  y  $x_2$ :

$$x_1 = \cos(2\pi u_2) \sqrt{-2 \ln(u_1)}$$
$$x_2 = \sin(2\pi u_2) \sqrt{-2 \ln(u_1)}$$

### B. Método de la tabla de búsqueda

Los anteriores métodos se aplican a distribuciones continuas, pero pueden ser adaptados a las distribuciones discretas mediante el método de la tabla de búsqueda. Sea  $N$  una variable aleatoria discreta con valores  $n_1, n_2, \dots, n_j$  y función de probabilidad en un punto  $p(n_i) = P(N = n_i)$  siendo  $p(n_i) \geq 0$ . La variable  $N$  está distribuida por la ley discreta deseada si está definida por:

$$N = 0 \quad \text{si } u_i < p_0$$
$$N = 1 \quad \text{si } p_0 \leq u_i < p_0 + p_1$$

Y, así sucesivamente, hasta  $N = j$  si  $\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq u_j < \sum_{i=1}^j p_i$

### Ejemplo. Generación de muestras para variables discretas.

Para generar 5 números aleatorios distribuidos mediante una Poisson(2,5) debemos generar entonces 5 valores para la uniforme. Suponemos que dichos valores son  $u_1 = 0,35477$ ,  $u_2 = 0,06050$ ,  $u_3 = 0,97709$ ,  $u_4 = 0,79629$ ,  $u_5 = 0,15028$ . Sabemos que las probabilidades acumuladas para la Poisson(2,5) son  $p_0 = 0,0821$ ,  $p_1 = 0,2873$ ,  $p_2 = 0,5438$ ,  $p_3 = 0,7576$ ,  $p_4 = 0,8912$ ,  $p_5 = 0,9580$ ,  $p_6 = 0,98580$ , etc. Por lo que el número  $N$  resultante para cada uno de las 5 simulaciones es:

Simulación	Uniforme	Nº siniestros
1	0,35477	2
2	0,06050	0
3	0,97709	6
4	0,79629	4
5	0,15028	1

En @risk emplearíamos la distribución RiskPoisson(2,5). A la hora de efectuar una simulación debemos seleccionar el método de selección de muestras de Monte Carlo.

En R para generar 1000 muestras de la Poisson(2,5) simplemente establecemos:

```
rpois(1000, 2.5)
```

### C. El método de muestreo Latin Hypercube (LH)

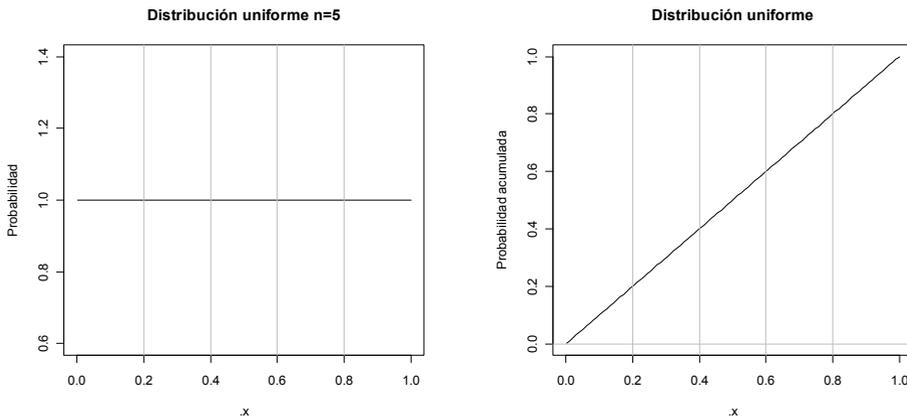
El método de Monte Carlo general o puro está basado en la extracción de muestras y por tanto requiere un gran número de iteraciones  $N$  para que la estimación que realice sea exacta. Debido a que el método converge lentamente, el tiempo de simulación puede ser elevado. Además, a medida que el número de muestras aleatorias para las variables *input* se eleva, puede llevar a una mayor varianza para el resultado esperado, lo que aumenta la incertidumbre del resultado. Las técnicas de reducción de la varianza permiten reducir esta incertidumbre (Rubinstein, 1981). El método general de Monte Carlo se suele denominar Monte Carlo aleatorio, puro o simple (*Random Monte Carlo*). El método de extracción de muestras Latino Hipercúbico (LH) mejora la exactitud y convergencia del método de Monte Carlo ya que reduce el número de muestras necesarias y su varianza. El método LH divide el rango de cada variable en intervalos distintos equiprobables. Estos intervalos se muestrean de acuerdo con su función de probabilidad asociada a cada una de las variables, lo que permite el muestreo del rango completo de cada variable *input*. De este modo, el método LH genera muestras aleatorias que describen de una manera más exacta la función de probabilidad a partir de las

cuales son generadas. Otra ventaja del método LH es que permite imponer una estructura de dependencia, a través de la correlación de *Spearman* que analizaremos posteriormente, a las variables aleatorias.

El método LH consistente en, una vez definido el tamaño muestral ( $n$ ), se estratifica la función de probabilidad de la Uniforme (0; 1) en  $n$  intervalos equiprobables y, posteriormente se procede a la selección de un valor para cada intervalo mediante un muestreo aleatorio con reemplazamiento. Una vez extraído un valor de la uniforme se genera un número aleatorio de acuerdo con el método de la inversa y, se repite el anterior proceso hasta que el número de valores de la muestra sea de  $n$  observaciones.

Emplear el método LH asegura que cada una de las partes o intervalos de la distribución de probabilidad estará presente en la muestra, lo que conduce a una velocidad de convergencia más elevada. Por tanto, el método LH produce una varianza menor, o en última instancia igual, que el método simple de Monte Carlo. A continuación se reproduce un ejemplo de generación de valores a través del método LH:

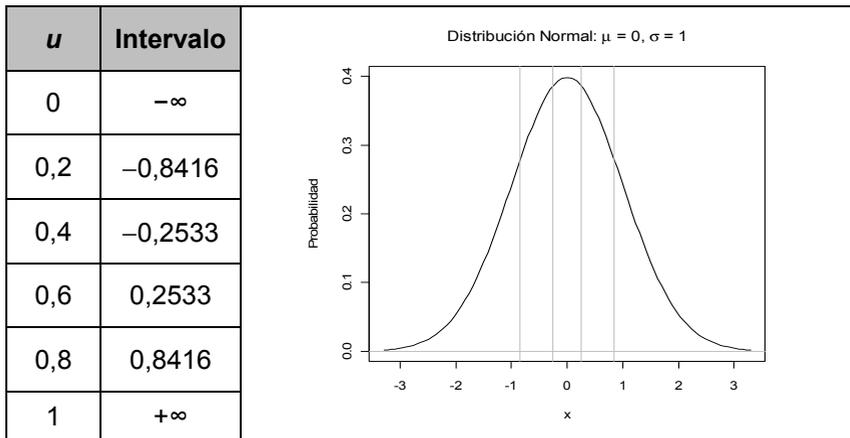
Supóngase que queremos generar una muestra de tamaño  $n = 5$  para dos variables aleatorias con distribución Uniforme (0; 1). Entonces los puntos inicial del intervalo es el 0, el punto final es el 1 y  $n = 5$  como muestra el siguiente gráfico. En el gráfico de la derecha se representa la función de distribución y en la izquierda la función de probabilidades para una Uniforme (0; 1) con 5 intervalos (0; 0,2), (0,2; 0,4), (0,4; 0,6), (0,6; 0,8), (0,8; 1). Los intervalos para una muestra LH se generan de forma equiprobable, y por tanto, cada intervalo debe tener la misma probabilidad asociada.



Una vez formados los intervalos, el siguiente paso consistiría en extraer valores específicos para cada variable. Esto se realiza cogiendo un valor en cada uno de los cinco intervalos. Posteriormente los valores de las variables son agrupados en un vector de dos dimensiones. En el método inicial de LH el agrupamiento era realizado

mediante permutaciones de los  $n$  números enteros para cada variable. Por ejemplo: Permutación 1: (2, 3, 5, 4, 0) y Permutación. 2: (2, 4, 3, 5, 1). Empleando las posiciones de estas permutaciones dentro de los intervalos para cada variable se forma la agrupación de valores. Sin embargo, si deseamos obtener una muestra con las variables correlacionadas, el método LH permite el empleo del método de Iman-Conover que induce la correlación empleando la técnica no paramétrica de la correlación de *Spearman*. Dichos conceptos serán introducidos en los apartados de este capítulo correspondientes a la generación de variables con una estructura de dependencia.

Para obtener muestras a partir de una distribución de probabilidad específica se realizaría el mismo proceso que en el ejemplo anterior, y posteriormente se emplearía el método de la inversa. Es decir, si deseamos 5 muestras generadas a partir de una Normal (0,1), primero debemos generar 5 intervalos como los anteriores para las distribuciones uniformes, de forma que seleccionaremos una muestra de un valor uniforme dentro de cada intervalo. Dados los siguientes intervalos para la Uniforme (0; 1), los intervalos para la Normal estándar (0; 1) serán los que se muestran en el siguiente gráfico.



Una fórmula comúnmente empleada para generar uniformes dentro de los intervalos deseados  $\frac{1}{n}u_m + \left(\frac{m-1}{n}\right)$ , donde  $n$  es el número de muestras que queremos extraer y  $m = 1, \dots, n$ . En la siguiente tabla se muestra un ejemplo práctico para  $n = 5$ .

Intervalo $m$	$U(0; 1)$ iniciales $u_m$	$U(0; 1)$ en los intervalos	Normal (0;1)
1	0,2201	0,0440	-1,7058
2	0,9603	0,3921	-0,2740
3	0,3115	0,4623	-0,0946
4	0,6339	0,7268	0,6031
5	0,9855	0,9971	2,7584

Obsérvese como las uniformes re escaladas caen en los intervalos deseados. Por el método de la inversión obtenemos la muestra de valores, que debe ser permutada para obtener una verdadera muestra aleatoria.

**Ejemplo. Generación de valores a través del método LH con diferentes programas informáticos.**

La aplicación del método LH en Excel precisa de la estratificación en intervalos de la distribución uniforme entre 0 y 1, como en los ejemplos anteriores, y posteriormente el empleo de las distribuciones inversas que tiene Excel. Para establecer los intervalos simplemente establecemos el salto  $1/k$ , siendo  $k$  el número de muestras de una variable que deseamos establecer. El primer intervalo estará comprendido entre  $(0, 1/k)$  y los posteriores serán  $(1/k, 2/k)$ , etc. Posteriormente generamos las uniformes en esos intervalos mediante la función:

$$U = \text{ALEATORIO()} * (\text{max} - \text{min}) + \text{min}$$

Siendo max el valor máximo del intervalo y min el valor mínimo del intervalo. Una vez generadas las uniformes realizaremos la inversa para obtener la muestra deseada. A modo de ejemplo para generar 10 muestras de una Normal estándar podemos establecer los intervalos con salto 0,1. Posteriormente generamos las uniformes mediante la fórmula citada arriba y efectuaremos =DISTR.NORM.ESTAND.INV() con probabilidad el valor de la uniforme:

Intervalo	Uniforme	Normal
0-0,1	0,0613	-1,5436
0,1-0,2	0,1403	-1,0789
0,2-0,3	0,2607	-0,6413
0,3-0,4	0,3360	-0,4234
0,4-0,5	0,4548	-0,1134
0,5-0,6	0,5389	0,0977
0,6-0,7	0,6422	0,3643
0,7-0,8	0,7274	0,6050
0,8-0,9	0,8958	1,2578
0,9-1	0,9259	1,4460

En @RISK, la simulación por el método LH simplemente se realiza seleccionando dicho método en el tipo de muestreo en el momento de configurar la simulación. En R se puede emplear el paquete lhs para la generación de muestras LH. La función randomLHS( $n, k$ )<sup>3</sup> donde  $n$  es el número de particiones o muestras a tomar

<sup>3</sup> También pueden emplearse otras funciones del paquete lhs que tratan de generar unas muestras más óptimas para efectuar una simulación. La función improvedLHS() que intenta generar una muestra

y  $k$  el número de variables se emplea para la generación de uniformes. Esta función genera una muestra de uniformes que mediante el método de la inversión se transforma en la muestra con la función de distribución especificada. Por ejemplo, supongamos que deseamos generar cinco muestras de dos variables aleatorias independientes a partir de una distribución normal estandarizada. Para ello cargamos el paquete LHS y especificamos<sup>4</sup>:

```
x=randomLHS(5, 2)
qnorm(x)
```

#### D. Generación de números distribuidos uniformemente

Para generar variables aleatorias según una distribución de probabilidad existen diversos métodos que a su vez requieren de un generador base de variables aleatorias uniformemente distribuidas entre 0 y 1. Existen también una amplia variedad de métodos para generar uniformes pseudo aleatorias, por lo que nos limitaremos a realizar una breve revisión. Para entender lo que es un generador de números aleatorios debemos entender lo que es una secuencia aleatoria de números. En una secuencia aleatoria todos sus elementos se generan de forma independiente unos de otros, y el valor del próximo elemento en la secuencia no se puede predecir a partir de los elementos previamente generados. Los modelos de simulación requieren la generación de números aleatorios de calidad para asegurarse que las conclusiones alcanzadas no son sensibles a los números aleatorios generados. Existen fundamentalmente dos tipos de generadores de números aleatorios: los verdaderos generadores de números aleatorios (TRNGs) y los generadores de números pseudoaleatorios (PRNGs). La diferencia entre ellos es que los generadores de números aleatorios emplean una fuente de aleatoriedad natural o entropía<sup>5</sup>, mientras que los generadores de números pseudoaleatorios utilizan un algoritmo determinista para generar números. Cada método tiene sus ventajas y desventajas como se muestra en las siguientes tablas.

---

de uniformes óptima mediante el método LH respecto a una distancia euclídea óptima  $\frac{n}{n^{1/k}}$ . O la función `geneticLHS()` que intenta generar una muestra de uniformes óptima mediante el método LH de forma que se maximice la distancia media entre todos los valores de forma que estén lo más separados posibles. La función `maximinLHS()` intenta optimizar la muestra maximizando la distancia mínima entre los valores.

<sup>4</sup> En el caso de que deseemos utilizar los mismos números aleatorios para otras simulaciones debemos de fijar la semilla mediante la función `set.seed()`.

<sup>5</sup> Dependen principalmente de las características aleatorias de los elementos físicos: la desintegración radiactiva, el ruido eléctrico, etc.

<b>Ventajas de los generadores de números aleatorios</b>	
<b>Generadores de verdaderos números aleatorios</b>	<b>Generadores de números pseudoaleatorios</b>
No tienen periodicidad	Rapidez
No son previsibles	Comodidad
Alto nivel de seguridad	Reproducibilidad
	Portabilidad

<b>Desventajas de los generadores de números aleatorios</b>	
<b>Generadores de verdaderos números aleatorios</b>	<b>Generadores de números pseudoaleatorios</b>
Lentos	No son estrictamente aleatorios
Ineficientes y costosos	Tienen periodicidad
Difíciles de instalar	Reproducibilidad
Secuencias no reproducibles	

La principal desventaja de los generadores PRNGs es que a partir de un mismo valor inicial o semilla se genera siempre la misma sucesión de números, pero puede verse también como una ventaja, ya que nos permite repetir un experimento en las mismas condiciones simplemente utilizando el mismo valor de la semilla. Algunas referencias ineludibles para entender los generadores de números pseudoaleatorios son Ripley (1987) y Knuth (1998). Las condiciones de un buen generador de números pseudoaleatorios son que genere verdaderos números aleatorios idénticamente e independientemente distribuidos según una Uniforme (0; 1), deben tener una longitud del periodo elevada de forma que nos aseguremos de que no se repite el ciclo de números aleatorios en la práctica, deben ser eficientes (rápidos y que empleen poca memoria), deben permitir repetir la misma secuencia de números y deben ser portables (que trabajen de la misma forma en diferentes entornos de *software* y *hardware*).

Una vez conocidos el algoritmo y la semilla del generador<sup>6</sup>, los números aleatorios pueden ser replicados. Las secuencias de números aleatorios generados por un buen generador a menudo semejan ser más aleatorias incluso que las generadas por los verdaderos generadores de números aleatorios (Bratley *et al.*, 1987). Pero las secuencias *pseudo-aleatorias*, deben satisfacer algunos criterios de aleatoriedad que se examinan a partir de los diversos test.

---

<sup>6</sup> La semilla de un generador es el número que se emplea para iniciar la generación de números.

Formalmente, la construcción determinista de los generadores de números pseudo aleatorios desvirtúa el concepto de aleatoriedad de las variables aleatorias i.i.d. según la Uniforme (0; 1). Pero desde un punto de vista práctico, son muy empleados y la experiencia indica que estos generadores funcionan de forma adecuada cuando pasan los test de aleatoriedad. Las ventajas de estos generadores son opuestas a las desventajas de los verdaderos generadores de números naturales, es decir, son rápidos, eficientes y fáciles de implementar, y sus secuencias son reproducibles conociendo el algoritmo y la semilla.

En los modelos de simulación se emplean generalmente generadores de números pseudoaleatorios para lo cual es necesario realizar test de aleatoriedad de los números generados, entre los que se pueden incluir test empíricos y teóricos, exámenes gráficos o el empleo de los números como *input* para un problema conocido (Kenny, 2005):

El objetivo de los generadores de números pseudoaleatorios es intentar imitar el concepto matemático de variables aleatorias independientes distribuidas de manera uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . Formalmente, un generador de variables uniformes puede ser definido como una estructura  $(S, \mu, f, U, g)$  donde  $S$  es un conjunto finito de estados,  $\mu$  es la probabilidad de  $S$  empleada para seleccionar el estado inicial  $S_0$  llamado semilla del generador,  $f : S \rightarrow S$  es la función de transición,  $U = [0, 1]$  es el conjunto *output* y  $g : S \rightarrow U$  es la función *output*. El estado evoluciona de acuerdo a la recurrencia  $s_i = f(s_{i-1})$  para  $i \geq 0$  y el output en  $i$  es  $u_i = g(s_i) \in U$ . Los  $u_i$  son los llamados números aleatorios producidos por el generador. Dado que  $S$  es finito, el generador puede regresar a un estado en el que ya estuvo anteriormente. El menor valor de  $j > 0$  para el que se repita el estado, es decir  $s_{i+j} = s_i$  por lo que  $u_{i+j} = u_i$  para  $i \geq 0$  se llama longitud del período  $p$ .

Uno de los primeros procedimientos o algoritmos para la generación de números aleatorios es el denominado método de los cuadrados medios o *Middle Square Method* propuesto por Von Neumann (1951). Este método parte de un número de  $n$  dígitos  $x_0$ , se eleva al cuadrado y se extraen las posiciones centrales, con lo que se obtiene un nuevo número  $x_1$ . Los principales problemas de este método son que proporciona secuencias que a partir de un cierto número se repiten cíclicamente así como la dificultad para seleccionar un  $x_0$  adecuado de forma que la secuencia no encuentre ni el valor cero ni el número de partida (véanse los ejemplos en Alonso y Albarrán, 2007).

Actualmente los números pseudoaleatorios son generados a través de programas informáticos que emplean algoritmos. En general, existen cuatro consideraciones para determinar si los números aleatorios generados son satisfactorios. La primera consideración es que los números generados deben pasar los test o baterías de aleatoriedad. En segundo lugar, deben contener los suficientes dígitos para que la generación de números sea lo suficientemente densa, lo cual permite efectuar un elevado número de iteraciones en cada simulación. En tercer lugar, se requiere que la fuente generadora de los números sea eficiente, lo que implica rapidez y reducida ocupación de memoria del ordenador. Esto implica que se puedan efec-

tuar simulaciones para distintos parámetros o estrategias de la compañía en un tiempo razonable. Finalmente, el ciclo del generador debe ser lo más amplio posible. A continuación nos centraremos en el primer requisito.

Existe una amplia gama de test estadísticos que intentan medir la aleatoriedad de la secuencia de números generados. Los diversos test intentan verificar distintos aspectos o propiedades de las secuencias generadas. Por ello generalmente se emplean conjuntos de test que se denominan baterías de test estadísticos de aleatoriedad y son necesarios para asegurarnos de que las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas como una Uniforme (0; 1). Test específicos para probar la aleatoriedad de los RNGs son propuestos en MacLaren y Marsaglia (1965), Marsaglia (1985), L'Ecuyer (1992), Marsaglia (1995)<sup>7</sup>, Knuth (1998) y Mascagni y Srinivasan (2000), entre otros. Los números generados por un generador deben cumplir varias propiedades estadísticas básicas como: estar uniformemente distribuidos, ser estadísticamente independientes, su valor esperado debe ser igual a 1/2, su varianza esperada debe ser igual a 1/12, no debe haber correlación entre los términos de la secuencia generada, entre otros. Varios de los test diseñados tratan de verificar estas y otras propiedades estadísticas. Entre estos test podemos citar el Chi-Cuadrado, test K-S, test de correlación serial, test de dos niveles, test de rachas (longitud de las rachas, rachas por debajo y sobre el valor medio, etc.), test de Poker, test de permutaciones, etc. Estos test se suelen agrupar en baterías, algunas de las cuales son de acceso libre en las direcciones que se muestran en la siguiente tabla.

p-lab <sup>8</sup>	<a href="http://random.mat.sbg.ac.at/">http://random.mat.sbg.ac.at/</a>
Crypt-X <sup>9</sup>	<a href="http://www.isi.qut.edu.au/resources/cryptx/tests.php">http://www.isi.qut.edu.au/resources/cryptx/tests.php</a>
Diehard	<a href="http://www.stat.fsu.edu/pub/diehard">www.stat.fsu.edu/pub/diehard</a>
ENT	<a href="http://www.fourmilab.ch/random/">http://www.fourmilab.ch/random/</a>

### Tipología de generadores

El procedimiento más habitual para la generación de números pseudo aleatorios es el empleo de los Generadores Congruenciales Lineales o Generadores Coherentes Lineales<sup>10</sup> (LCG o *linear congruential generators*), propuestos por Lehmer en 1951. Estos generadores tienen la forma  $x_i = ax_{i-1} + c \pmod{m}$   $i = 1, 2, \dots, n$ , en donde la secuencia de números se inicia en  $x_0$  que es el inicializador o semilla (*seed*) de la

<sup>7</sup> El denominado "Marsaglia Random Number CDROM" recoge en un CD-ROM la batería de test DieHard. Estos test fueron desarrolladas por el Profesor George Marsaglia del Departamento de Estadística de la Universidad del Estado de Florida. El CD-ROM se encuentra disponible en Internet en la dirección <http://www.stat.fsu.edu/pub/diehard/>

<sup>8</sup> Proyecto elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salzburgo.

<sup>9</sup> Test proporcionados por el ISRC (*Information Security Research Centre*) de Australia.

<sup>10</sup> Los generadores congruenciales lineales son un caso particular de los generadores congruenciales afines.

secuencia.,  $a > 0$  es el multiplicador (*multiplier*),  $c$  es el incremento (*increment*) y  $m > 0$  es el módulo (*modulus*) del generador aleatorio. La anterior ecuación también puede ser escrita como  $x_i = ax_{i-1} + c - m \left\lfloor \frac{ax_{i-1} + c}{m} \right\rfloor$ , donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa la parte entera. A partir de esta última expresión se comprueba fácilmente que ninguno de los números generados puede ser mayor que el valor del módulo, es decir, que  $x_i < m$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además, para generar números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  basta con dividir cada  $x_i$  entre el módulo  $m$ , es decir:  $u_i = \frac{x_i}{m}$ . La calidad del generador de números aleatorios depende de la adecuada elección de los valores de  $a$ ,  $c$  y  $m$ . En Knuth (1998) se establecen las condiciones para la selección de parámetros prestando especial importancia a la longitud de las secuencias. La longitud de las secuencias se refiere al número  $p$  de números pseudoaleatorios diferentes que un generador produce antes de entrar en un proceso cíclico. Lo más adecuado para un estudio de simulación es emplear un generador de período completo, que se define como aquel en el que la longitud de sus secuencias es igual al módulo. La gran ventaja de los generadores congruenciales es que son generadores rápidos, sin embargo tienen la desventaja de que tienen un ciclo corto.

La serie de números de Fibonacci está compuesta por la secuencia:  $x_{j+2} = x_{j+1} + x_j$  para  $\forall j \geq 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ <sup>11</sup>. El método del generador de números aleatorios de Fibonacci retardados o LFG (*Lagged Fibonacci Generators*) propuestos en L'Ecuyer (1990) son una variante del método anterior y su expresión general viene dada por  $x_j = x_{j-k} + x_{j-l} \text{ mod } m$ . Knut (1998) emplea la siguiente secuencia  $x_j = x_{j-100} + x_{j-37} \text{ mod } 2^{30}$ . La principal ventaja de estos generadores es que son muy rápidos y tienen un periodo más largo que los LCG.

Existe una gran cantidad de generadores de números pseudoaleatorios, entre los que destacamos los generadores tipo AWC (*add-with-carry*) y los SWB (*subtract-with-borrow*) propuestos en Marsaglia y Zaman (1991), el generador MWC (*multiple-with-carry*) (véase Couture y L'Ecuyer, 1997), los generadores de Tausworthe o LFSR (*linear feedback shift register*) propuestos en Fushimi y Tezuka (1983), los GFSR (*generalised feedback shift registers*), el generador no lineal BBS (*Blum Blum Shub*) propuesto en Blum *et al.* (1986) o el *Mersenne Twister* desarrollado por Matsumoto y Nishimura (1998).

Además de existir una amplia gama de generadores también pueden crearse generadores a partir de la combinación de otros de la misma o de distinta clase. La combinación de generadores es una forma de aprovechar las ventajas de cada tipo de generador, al mismo tiempo que se incrementa la longitud del ciclo. Ejemplos de generadores obtenidos por combinación son el "Super-Duper" propuesto en Marsaglia (1972) que emplea un generador congruencial lineal y un generador de Tausworthe, el generador propuesto en Wichmann y Hill (1982, 1984) que combina tres generadores congruenciales lineales, o los generadores propuesto en L'Ecuyer (1988) y L'Ecuyer *et al.* (2002) que combinan dos generadores del tipo LFGs.

---

<sup>11</sup> Por lo tanto la serie de Fibonacci es  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ ,  $x_5 = 5$ , etc.

## Ejemplo. Tipo de generadores de los programas informáticos y generador de Wichman-Hill.

En Excel 2003 y 2007 se emplea el generador de Wichman-Hill. La idea básica del algoritmo es que si toma tres números aleatorios uniformes entre [0,1] y los suma, la parte fraccionaria de la suma es en sí misma un número aleatorio entre [0,1]. De manera más formal, sea  $X_{i+1} = 171 X_i \text{ mod } 30269$ ;  $Y_{i+1} = 172 Y_i \text{ mod } 30307$  y  $Z_{i+1} = 170 Z_i \text{ mod } 30323$ ,  $U_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{30269} + \frac{Y_{i+1}}{30307} + \frac{Z_{i+1}}{30323}$  es un número aleatorio uniformemente distribuido.

La versión 5.0 de @RISK permite elegir entre ocho generadores diferentes de números aleatorios, siendo el generador predefinido el "Mersenne Twister". Este es una de las principales modificaciones de esta versión, ya que las versiones anteriores no permitían la elección de distintos generadores de diversos tipos (multiply-with-carry, generador de Fibonacci retardado, subtract-with-borrow o SWB, etc.) o combinaciones de estos elaborados por George Marsaglia.

La ventaja de emplear R es que permite una generación de números pseudoaleatorios muy potente y eficaz permitiendo además establecer el tipo de generador entre los siguiente: el generador combinado de Wichmann- Hill, un generador de tipo multiple-with-carry (MWC) propuesto por George Marsaglia "Marsaglia-Multicarry", el generador combinado "Super-Duper", "Mersenne-Twister" (por defecto), el generador "Knuth-TAOCP" que es la versión de Knut (1998), el generador "Knuth-TAOCP-2002" que es una versión mejorada de su predecesor o también se puede implantar un generador especificado por el usuario.

A continuación describiremos mediante un ejemplo el algoritmo de Wichman y Hill para la generación de números pseudoaleatorios. Supongamos que queremos generar 5 números aleatorios uniformes, y que el valor de las semillas son de (valores entre 1 y 30.000) 951, 1475 y 632. El proceso del algoritmo se resume en el cuadro inferior (donde R denota la función de Excel RESIDUO).

Secuencia	$X_{i+1}$	$Y_{i+1}$	$Z_{i+1}$	$X_i / 30269$	$Y_i / 30307$	$Z_i / 30323$	Suma	$U(0,1)$
<b>Fórmula</b>	=R (171*X <sub>i</sub> ;30269)	=R (172*Y <sub>i</sub> ;30307)	=R (170*Z <sub>i</sub> ;30323)					=R (Suma;1)
<b>Semilla (0)</b>	951	1475	632					
<b>1</b>	11276	11244	16471	0,373	0,371	0,543	1,287	0,287
<b>2</b>	21249	24627	10354	0,702	0,813	0,341	1,856	0,856
<b>3</b>	1299	23171	1446	0,043	0,765	0,048	0,855	0,855
<b>4</b>	10246	15195	3236	0,338	0,501	0,107	0,947	0,947
<b>5</b>	26733	7138	4306	0,883	0,236	0,142	1,261	0,261

Mediante R simplemente cargaríamos el paquete RNG e introduciríamos:

```
setRNG(kind="Wichmann-Hill", seed=c(979,1479,1542))
runif(5)
```

### 3. DEPENDENCIA ENTRE VARIABLES ALEATORIAS

Para efectuar una correcta modelización de los riesgos es imprescindible no sólo reflejar la aleatoriedad de las variables sino también sus dependencias. Esto quiere decir que la generación de escenarios en el marco de un modelo DFA no debe ser completamente aleatoria, sino que los escenarios deben mantener una determinada estructura de correlaciones. Por tanto para obtener escenarios realistas y consistentes debemos incorporar al modelo una estructura de dependencia entre los distintos factores de riesgo. Un elemento fundamental es el conocimiento de las variables inductoras de la correlación y la estimación adecuada de las correlaciones. Embrechts *et al.* (2002) indican que una correcta implementación de un sistema DFA requiere una adecuada comprensión de los conceptos de dependencia y correlación.

Un modelo DFA puede considerar la correlación entre distintas clases de activo, de pasivo o entre el activo y pasivo. En este sentido el CEIOPS considera que el requerimiento del capital total de una compañía aseguradora debe ser inferior que la suma de los capitales requeridos para los riesgos individuales, siempre y cuando estos riesgos no estén perfectamente correlacionados. Este beneficio por diversificación se consigue gracias al empleo de matrices de correlación que resumen las dependencias entre riesgos. Sin embargo, la Asociación Internacional de Actuarios (IAA, 2004) sugiere el empleo de cópulas para poder capturar mejor la dependencia en las colas de las distribuciones de los riesgos (*tail dependency*). Blum y Dacorogna (2004) afirman por otro lado, no sólo la necesidad de establecer las dependencias contemporáneas entre los factores de riesgo sino también las dependencias intertemporales a lo largo del tiempo. En caso de no incluir estas correlaciones en los modelos estocásticos, el riesgo estará mal estimado.

Un aspecto íntimamente relacionado con el de la dependencia entre variables es el beneficio por diversificación (*diversification benefits*, BD) que surge al tener riesgos que no están perfectamente correlacionados. En este sentido, en una cartera aseguradora el BD intenta recoger que no todas los ramos de actividad tienen la misma probabilidad de desarrollarse de forma negativa o positiva en un momento temporal concreto<sup>12</sup>. De esta forma, una compañía aseguradora que realice su actividad en varios ramos tendrá una menor necesidad de capital que la suma de los capitales requeridos para cada una de las líneas de negocio.

Supónganse dos variables aleatorias con dependencia perfecta, lo que quiere decir que X e Y son comonotónicos. Sea:

$$\begin{aligned}VaR(Z) &= VaR(X) + VaR(Y) \\TVaR(Z) &= TVaR(X) + TVaR(Y)\end{aligned}$$

Denominando a S, la suma agregada de los riesgos, el beneficio por diversificación puede ser definido como la reducción en el capital necesario derivado de la

---

<sup>12</sup> El beneficio por diversificación también aparece en el activo en la inversión de activos no perfectamente correlacionados, etc.

combinación de ramos o riesgos no comonotónicos. Por lo tanto, refleja la diferencia entre el valor no diversificado y el valor diversificado del capital de una compañía aseguradora, y puede venir expresado en términos absolutos o relativos. De esta forma, el beneficio por diversificación debiera decrecer a medida que la dependencia entre los riesgos aumente<sup>13</sup>. Dhaene *et al.* (2002a, 2002b) definen el beneficio por diversificación para  $VaR(S)$  y  $TVaR(S)$  de la siguiente forma:

$$BD_{VaR} = 1 - VaR(S)/VaR(Z)$$

$$BD_{TVaR} = 1 - TVaR(S)/TVaR(Z)$$

Mediante la elasticidad del beneficio derivado de la diversificación al coeficiente de correlación ( $\rho$ ) se puede medir la sensibilidad de cambios en  $BD$  ante cambios en el coeficiente  $\rho$ . De esta forma cuanto mayor sea la elasticidad  $BD - \rho$ , mayor será el beneficio derivado de la diversificación ante cambios en la correlación de los riesgos. Como consecuencia de esta alta sensibilidad, ante pequeños cambios en la correlación, la aseguradora experimentará una elevada reducción de sus necesidades de capital agregadas. Es importante establecer que en base a las anteriores expresiones el beneficio por diversificación debe establecerse para un nivel de confianza determinado. Esto es debido a que el beneficio por diversificación cambia en función del percentil seleccionado (véase por ejemplo Piwcewicz, 2005).

Las tres principales medidas de asociación, o correlación empleando su concepto de forma genérica, entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son: la correlación lineal o correlación de *Pearson*, la correlación de *Spearman* y la *Tau de Kendall*. La asociación intenta medir la intensidad de la dependencia entre variables.

#### A. El coeficiente de correlación lineal

El coeficiente de *Pearson* o coeficiente de correlación<sup>14</sup> mide el grado de intensidad lineal<sup>15</sup> entre variables (Embrecht *et al.*, 2002), y está definido como:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

<sup>13</sup> Desmedt y Walhin (2008) comparan el nivel de solvencia requerido por un asegurador mediante el  $TVaR$  y analizando el beneficio por diversificación derivado de la agregación de riesgos. El beneficio aumenta cuanto menor es la dependencia. Sin embargo puede darse el caso de que el beneficio por diversificación definido según las expresiones de Dhaene *et al.* (2002a, b) muestren resultados distintos a los esperados para el caso de emplear el  $VaR$ . Esto es debido a que el  $VaR$  no es una medida coherente del riesgo, ya que no es una medida subaditiva.

<sup>14</sup> A veces también se denomina *Pearson Product-Moment Correlation Coefficient*.

<sup>15</sup> Mientras la regresión intenta predecir el valor de una variable a partir de los valores de la otra, la correlación intenta establecer el grado en el que un modelo lineal describe la relación entre las dos variables. Por lo tanto, se dice que en la regresión una variable es la variable explicativa y la otra variable es la explicada estableciéndose una relación direccional, mientras que en la correlación no existe una relación direccional.

Siendo:

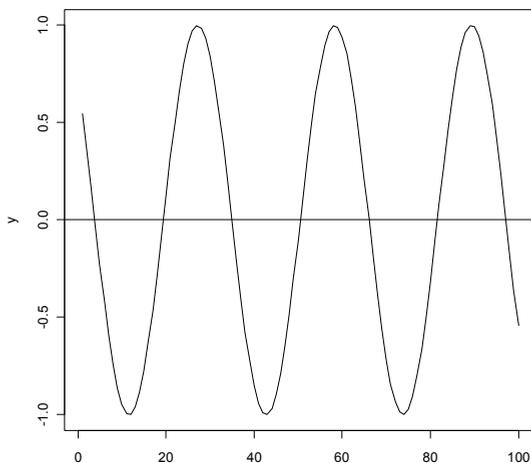
$Cov(X, Y)$  la covarianza entre las variables  $X$  e  $Y$ .

$\sigma(X)$  y  $\sigma(Y)$  las desviaciones típicas de  $X$  e  $Y$ .

Las propiedades del coeficiente de correlación lineal son las siguientes:

- El coeficiente de correlación lineal está siempre comprendido en el rango  $[-1, 1]$ .
- Se dice que las variables están perfectamente correlacionadas cuando su coeficiente de correlación lineal es  $\rho = \pm 1$ , lo que ocurre si y sólo si  $Y = aX + b$  para las constantes  $a > 0$  ( $\rho = +1$ ) o  $a < 0$  ( $\rho = -1$ ) y cualquier valor de  $b$ .
- El coeficiente de correlación es invariante ante cambios de escala.

Debe recordarse que dos variables independientes están incorrelacionadas, pero que estén incorrelacionadas no significa que sean independientes, ya que el coeficiente de correlación lineal sólo mide la dependencia lineal entre las variables. En el siguiente gráfico se muestra la variable  $X$  y la variable  $Y = \text{seno}(X)$ . Mientras que las dos variables son perfectamente dependientes, el coeficiente de correlación lineal entre las dos variables es cero<sup>16</sup>. Esto es debido a que dicho coeficiente es incapaz de reconocer relaciones no lineales entre las variables, como la dada por la relación sinusoidal.



La popularidad de la correlación lineal está explicada por tres motivos (Embrecht *et al.* 2002). La primera razón es que la correlación lineal es fácil de calcular a

---

<sup>16</sup> El ajuste a través de una recta de regresión lineal se muestra en el gráfico mediante una línea recta.

partir de los segundos momentos (varianzas y covarianzas), mientras que otras medidas de dependencia resultan más difíciles. La segunda razón es que el coeficiente de correlación lineal es fácilmente manipulable bajo transformaciones lineales. Y la tercera y última razón, es que el coeficiente de correlación lineal es una medida de asociación natural cuando  $X$  e  $Y$  provienen de una distribución normal multivariante<sup>17</sup>, ya que es suficiente para especificar completamente la dependencia entre las distribuciones marginales<sup>18</sup>. Los principales problemas del coeficiente de correlación lineal son (Embrecht *et al.* 2002):

- La correlación sólo está definida cuando la varianza de los riesgos toma valores finitos. Sin embargo, no es una medida apropiada de dependencia para riesgos con distribuciones de cola gruesa en los que la varianza semeja infinita, ya que el coeficiente de correlación no estaría definido.
- La independencia entre dos variables implica incorrelación, pero lo contrario no es siempre cierto. Un coeficiente de correlación lineal 0 no implica independencia entre los riesgos, ya que esto sólo acontece en el caso de la distribución conjunta normal multivariante.
- El coeficiente de correlación no es invariante ante transformaciones no lineales en los riesgos. Es decir si  $T : R \rightarrow R$  entonces  $\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y)$ .

Podemos concluir que el coeficiente de correlación lineal no es una medida de dependencia adecuada para las colas de la distribución, es decir los eventos extremos. La anterior afirmación viene derivada en que dicho coeficiente se basa en los momentos centrales y no es válida para todo tipo de distribuciones multivariantes<sup>19</sup>. Las otras medidas de dependencia, denominadas de forma genérica coeficientes de correlación por rango, la correlación de *Spearman* y la *Tau de Kendall* (*Spearman's rank correlation* y *Kendall's tau* o *Kendall's rank correlation*), miden el grado de dependencia monótona entre variables aleatorias, mientras que el coeficiente de correlación de Pearson mide exclusivamente el grado de dependencia lineal. Además, a diferencia de la correlación lineal son invariantes ante transformaciones estrictamente monótonas de  $X$  e  $Y$ , por lo que se dice que son medidas de asociación no paramétrica. De esta forma, la correlación por rangos de una muestra  $(X, Y)$  es la misma que la de las muestras transformadas después de aplicar logaritmos  $(\log(X), \log(Y))$ , o de la exponenciación de las variables  $(\exp(X), \exp(Y))$ .

---

<sup>17</sup> La correlación lineal es una medida perfecta de asociación para variables aleatorias normalmente distribuidas, no siendo tan efectiva en para variables con otras distribuciones. Sin embargo cualquier variable aleatoria continua  $X$  con función de distribución  $F(X)$  puede ser transformada en una variable normal mediante la transformación  $Y = \Phi^{-1}(F(X))$ . Por tanto, podemos aplicar esta transformación y luego calcular las correlaciones entre las variables transformadas (Mildenhall, 2005).

<sup>18</sup> De forma general se cumple para las distribuciones esféricas y elípticas.

<sup>19</sup> Además, si estamos analizando series con presencia de heterocedasticidad el coeficiente de correlación lineal no es robusto (Boyer *et al.*, 1999).

## B. La correlación de Spearman

La correlación de Spearman es una correlación no paramétrica, que necesita la ordenación de las variables. Dada una muestra de observaciones  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una variable aleatoria  $X$ , la ordenación por rango (*grades* o *rank order*)  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  son permutaciones de las observaciones originales ordenadas de tal forma que  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . Denominamos  $j$  a la posición por orden de  $X_{(j)}$  dentro del rango de posibles valores de la variable. Para calcular el coeficiente de *Spearman*, simplemente debemos establecer la posición numérica de cada uno de los valores de cada variable y posteriormente calcular la correlación lineal entre dichos órdenes. De esta forma, el valor del coeficiente de *Spearman* permanecerá siempre entre  $[-1, 1]$ .

Si  $X$  e  $Y$  son dos variables aleatorias con distribuciones marginales  $F_X$  y  $F_Y$ , y  $F_X(X)$  y  $F_Y(Y)$  son las puntuaciones de las ordenaciones de la muestra. El coeficiente *rho* de *Spearman* se calcularía simplemente como:

$$rho(X, Y) = \frac{Cov(F_X(X)F_Y(Y))}{\sqrt{Var(F_X(X))}\sqrt{Var(F_Y(Y))}}$$

Lo que equivale al coeficiente de correlación lineal  $\rho$  entre las funciones de distribución ordenadas:

$$rho(X, Y) = \rho(F_X(X)F_Y(Y))$$

En el caso de que las variables aleatorias sean continuas la correlación de *Spearman* se puede calcular mediante la fórmula

$$12E[(F_X(X) - 0.5)(F_Y(Y) - 0.5)].$$

## C. La Tau de Kendall

La tercera medida de asociación es la Tau de Kendall, que analiza las concordancias y discordancias entre pares de puntos de los datos  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$ . De manera informal, se dice que un par de variables aleatorias es concordante si los valores grandes (pequeños) de una variable están asociados con valores grandes (pequeños) de la otra variable. Formalmente:

- Si  $x_i < x_j$  e  $y_i < y_j$  se dice que los pares de observaciones  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$  son concordantes si  $(x_i - x_j, y_i - y_j) > 0$ .
- Si  $x_i < x_j$  e  $y_i > y_j$  se dice que los pares de observaciones  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$  son discordantes si  $(x_i - x_j, y_i - y_j) < 0$ .

Si  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son vectores aleatorios independiente e idénticamente distribuidos, con una función de distribución conjunta  $F$ . La *Tau de Kendall* para las

variables X e Y se define como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia tal que:

$$\tau(X, Y) = P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0] - P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0]$$

Donde  $P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0]$  represente la probabilidad de concordancia y  $P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0]$  la probabilidad de discordancia.

La *tau de Kendall* para  $(X_i, Y_i)$  e  $i = 1, 2, \dots, n$  puede ser calculada en la práctica como:

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \text{sign}((X_i - X_j, Y_i - Y_j))$$

Donde:  $\text{sign}(z)$  toma el valor 1 cuando  $z > 0$ , valor 0 cuando  $z = 0$  y valor  $-1$  cuando  $z < 0$ .

### Ejemplo. Cálculo y comparación de las medidas de asociación.

Dadas las siguientes variables X e Y, vamos a calcular las distintas medidas de asociación analizadas:

X	Y
5	5
6	4
3	0
8	6,5
4	4,5

El coeficiente de correlación lineal se calcula como:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,2 \cdot [(5 - 5,2)(5 - 4) + \dots + (4 - 5,2)(4,5 - 4)]}{1,72 \cdot 2,168} = 0,804$$

La rho de Spearman se calcula a partir de la puntuación otorgada en la ordenación de variables como:

Orden X	Orden Y
3	4
4	2
1	1
5	5
2	3

Siendo el coeficiente de correlación lineal entre el orden X y el orden Y, por lo tanto:

$$\begin{aligned} rho(X, Y) &= \frac{Cov(F_X(X)F_Y(Y))}{\sqrt{Var(F_X(X))}\sqrt{Var(F_Y(Y))}} \\ &= \frac{1(3-3)(4-3) + \dots + (2-3)(3-3)}{1,41 * 1,41} = 0.7 \end{aligned}$$

La tau de Kendall se calcula como:

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} sign((X_i - X_j, Y_i - Y_j)) \\ &= \frac{2}{20} (-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1) = 0,6 \end{aligned}$$

Para el cálculo de las anteriores medidas de asociación en R simplemente podemos emplear la función `cor()` del paquete `stats`.

Primero definimos las variables de la forma siguiente

```
x=c(5,6,3,8,4)
y=c(5,4,0,6.5,4.5)
```

Posteriormente calculamos las tres medidas de asociación mediante:

```
cor(x,y, method="pearson")
cor(x,y,method="kendall")
cor(x,y,method="spearman")
```

#### D. Propiedades de la Tau de Kendall y la rho de Spearman

La *Tau de Kendall* y el coeficiente de *Spearman* satisfacen las siguientes propiedades (Embrechts *et al.* 2002):

- Sus valores permanecen en el intervalo  $[-1, 1]$  al igual que el coeficiente de correlación lineal.
- Si X e Y son comonotónicos, la Tau de Kendall y el coeficiente de Spearman toman el valor 1.
- Si X y  $-Y$  son comonotónicos, la Tau de Kendall y el coeficiente de Spearman toman el valor  $-1$ .
- Si X y  $-Y$  son independientes, la Tau de Kendall y el coeficiente de Spearman toman el valor 0.

- Para el coeficiente de Spearman  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ , y para la tau  $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$ .
- La Tau de Kendall y el coeficiente de Spearman son invariantes ante transformaciones estrictamente monótonas.
- La Tau de Kendall y el coeficiente de Spearman son bastante robustos ante la presencia de *outliers* o valores extraños.

Existen varias relaciones entre las tres medidas de asociación citadas, especialmente en el caso de que la muestra provenga de una distribución normal multivariante. A modo de ejemplo si  $(X, Y)$  son una normal bivalente o  $t$  de Student con coeficiente de correlación lineal  $\rho$ , entonces la tau y el coeficiente de correlación de Spearman se puede calcular como:

$$\tau(\Phi(X), \Phi(Y)) = \frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$$

$$\rho(\Phi(X), \Phi(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsen(\rho/2)$$

### E. Dependencia entre variables aleatorias (Comonotonicity)

El concepto de correlación lineal es muy restrictivo, ya que sólo se sostiene para variables aleatorias con relación lineal. La generalización del concepto de correlación perfecta se lleva a cabo en la comonotonicidad, concepto introducido por Yaari (1987) y Schmeidler (1986). Formalmente: dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son comonotónicas si existe una tercera variable  $Z$  y las funciones no decrecientes  $f$  y  $g$  tal que  $X = f(Z)$  e  $Y = g(Z)$  con probabilidad uno (Wang, 1998a). En el caso multidimensional se dice que un vector  $X$  es comonotónico si y sólo si existe una tercera variable  $Z$  y las funciones no decrecientes  $t_1, \dots, t_n$  tal que  $X = (t_1(Z), \dots, t_n(Z))^t$  (Wu, 2007).

La comonotonicidad o perfecta dependencia representa un elevado grado de asociación entre dos valores, pero que no necesariamente se traduce en un elevado coeficiente de correlación lineal. Es decir, si  $X$  e  $Y$  están perfectamente correlacionados se puede establecer entre ellos la condición lineal  $Y = aX + b$ . La comonotonicidad es una extensión del concepto de perfecta correlación entre variables aleatorias, ya que permite dependencias no lineales<sup>20</sup>. Por lo tanto, la relación expuesta anteriormente entre una variable  $X$  y su seno es de comonotonicidad o perfecta dependencia. Sin embargo su correlación lineal es cero por lo que se dice que son linealmente independientes. El opuesto a la perfecta dependencia es la perfecta independencia o contramonotonicidad. De esta forma la perfecta depen-

<sup>20</sup> En una simulación de Monte Carlo para simular riesgos comonotónicos  $X$  e  $Y$  debemos emplear la misma muestra de números aleatorios uniformes, como paso previo a efectuar el método la inversión de las funciones de distribución u otro método empleado. Si  $X$  e  $Y$  son riesgos independientes, debemos generar dos muestras de variables uniformes independientes.

dencia y la perfecta independencia son los tipos más fuertes de concordancia y discordancia respectivamente.

### F. Propiedades deseadas de las medidas de dependencia

Sea  $\delta(\cdot, \cdot)$  una medida de dependencia que asigna un número real a cualquier par de valores reales de las variables  $X$  e  $Y$ , las propiedades deseadas de la medida de dependencia se dice que son (Embrechts *et al.*, 2002):

- Propiedad 1. Simetría:  $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ .
- Propiedad 2. Normalización:  $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$ .
- Propiedad 3. Comonotonicidad:  $\delta(X, Y) = 1$  si y sólo si  $X$  e  $Y$  tienen dependencia perfecta y contracomonotonicidad (*Countermonotonic*), es decir,  $\delta(X, Y) = -1$  si y sólo si  $X$  e  $Y$  tienen dependencia imperfecta.
- Propiedad 4. Para una transformación estrictamente monótonica  $T : R \rightarrow R$  en el rango de  $X$ :
  - $\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) & \text{si } T \text{ es creciente} \\ -\delta(X, Y) & \text{si } T \text{ es decreciente} \end{cases}$
- Propiedad 5. Independencia:  $\delta(X, Y) = 0$  si y sólo si  $X$  e  $Y$  son independientes.

Las propiedades 1 y 2 son cumplidas por la correlación lineal, mientras que la *rho de Spearman* y la *tau de Kendall* cumplen también las propiedades 3 y 4 si las variables  $X$  e  $Y$  son continuas. Debe resaltarse que la propiedad 5 contradice a la 4 (véase Embrechts *et al.* 2002), por lo que ninguna medida satisface todas las propiedades.

### G. Dependencia en las colas (Tail Dependence)

La dependencia en las colas es una medida de la probabilidad de eventos extremos. Para una distribución bivalente la dependencia en la cola superior se define formalmente como:

Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias continuas con funciones de distribución  $F_X$  e  $F_Y$ . El coeficiente de dependencia en la cola superior de  $X$  e  $Y$  viene dado por la expresión:

$$\lambda_S = \lim_{u \rightarrow 1^-} P[Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)]$$

Donde  $\lambda_S \in [0, 1]$ . Se dice que  $X$  e  $Y$  son independientes asintóticos en la cola superior cuando  $\lambda_S = 0$ . Por el contrario si  $\lambda_S > 0$ , lo que equivale a decir  $\lambda_S \in (0, 1]$ , se dice que  $X$  e  $Y$  son dependientes asintóticos (*asymptotically dependent*) en la cola superior.

Por su parte, para la dependencia en la cola inferior se establece como:

Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias continuas con funciones de distribución  $F_X$  e  $F_Y$ . El coeficiente de dependencia en la cola inferior de  $X$  e  $Y$  viene dado por la expresión

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0^+} P[Y \leq F_Y^{-1}(u) | X \leq F_X^{-1}(u)]$$

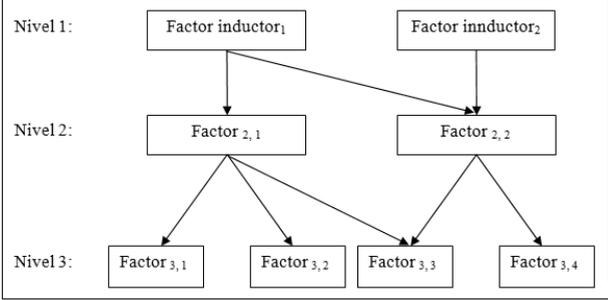
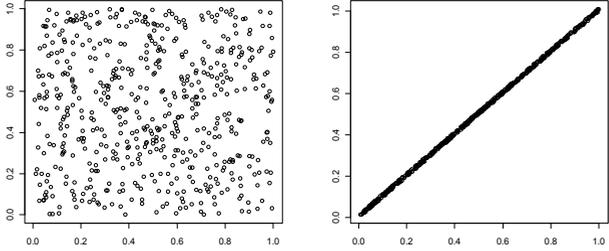
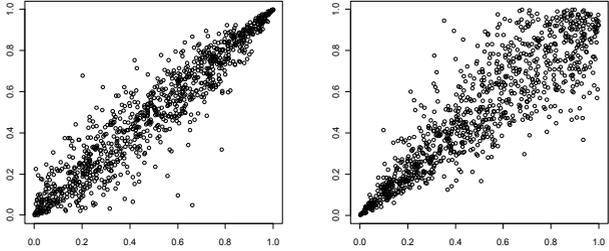
La dependencia en las colas entre varias variables cobra una gran importancia en el contexto de la solvencia de una compañía aseguradora. A modo de ejemplo, si estamos analizando la siniestralidad de los distintos ramos de una compañía y éstos tienen dependencia en la cola superior existe una probabilidad elevada de alcanzar siniestralidad elevada en todos los ramos de forma conjunta, lo que amenazaría la fortaleza financiera del asegurador en situaciones extremas.

La dependencia en las colas se incorpora en DFA a través de las cópulas. Básicamente las cópulas generan una estructura de dependencia entre las variables uniformes a partir de las cuales por el método de la inversión se generan los verdaderos valores de la distribución. Por lo tanto, imaginemos que tenemos dos líneas de negocio y que para cada una podemos modelizar la severidad de la siniestralidad a través de una determinada distribución. En el caso de que los números aleatorios sean generados a través de una cópula con dependencia en la cola superior, la siniestralidad agregada de la compañía para un determinado nivel de confianza será superior al caso de que los dos ramos sean modelados mediante cópulas sin dicha dependencia o a través de coeficientes de correlación lineal.

DFA tiene como uno de sus objetivos velar por la solvencia dinámica de las compañías aseguradoras de forma que si estas experimentan dependencias, por ejemplo, en la siniestralidad para valores elevados, debemos modelizar de forma adecuada tal dependencia. Las herramientas para correlacionar variables basadas en la matriz de correlaciones lineales generan dependencias lineales, es decir la misma dependencia independientemente de los valores de las distintas variables. Por el contrario, las cópulas permiten una modelización muy versátil de las dependencias en las colas, es decir para valores elevados o reducidos de las variables.

#### **4. MÉTODOS DE GENERACIÓN DE DEPENDENCIA ENTRE LAS VARIABLES DEL MODELO**

Las formas habituales de generar dependencia contemporánea entre variables son: mediante una estructura de cascada, en las que unas variables se generan a partir de los valores de otras, generando variables aleatorias correlacionadas mediante una matriz de varianzas-covarianzas (Cholesky), el método de Iman-Conover o aplicando cópulas. Las técnicas de series temporales, que analizaremos en el Capítulo 5 de este trabajo destinado a los riesgos de mercado, son las candidatas idóneas para establecer las dependencias intertemporales de variables aleatorias.

Método para generar dependencia	Ilustración
<p><b>Estructura de cascada</b></p> <p>Se muestra un ejemplo de estructura de cascada en tres niveles, en la que existen dos inductores.</p>	
<p><b>Matriz de correlaciones</b></p> <p>Se muestran el gráfico de dos factores con coeficiente de correlación cero y uno.</p>	
<p><b>Cópulas</b></p> <p>Se muestra el gráfico de dos factores cuya estructura de dependencia es una cópula de Gumbel y una cópula de Clayton<sup>21</sup>.</p>	

#### 4.1. Estructura de cascada, factorización de Cholesky y método de Iman-Conover

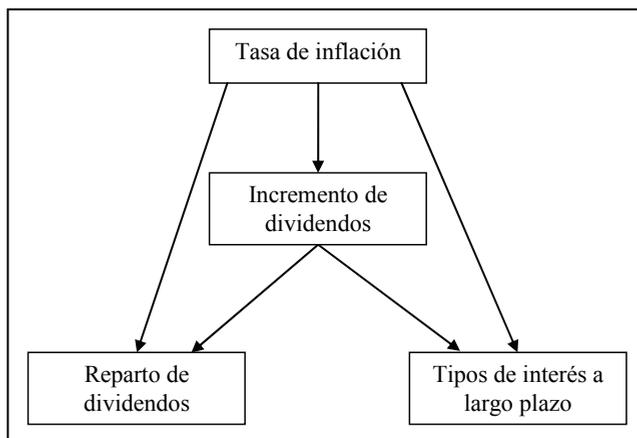
En este apartado describiremos los métodos más tradicionales para dotar a las variables aleatorias de una estructura de dependencia. Entre estos métodos destacan la estructura de cascada, la factorización de Cholesky y el método de Iman-Conover (IC).

<sup>21</sup> La cópula de Gumbel genera dependencia en la cola superior, mientras que la cópula de Clayton genera dependencia en la cola inferior.

### A. Estructura de cascada

Una forma de correlacionar los cambios entre variables es a través del empleo de estructuras de cascada. De esta forma se puede emplear una estructura de cascada con uno o más factores, que actuando como inductores, generan las probables condiciones económicas futuras. Los factores como tipos de interés y tasa de inflación son los empleados principalmente para generar escenarios correlacionados.

Un ejemplo clásico de los modelos con estructura de cascada es el propuesto por Wilkie (1986) empleado para la modelización del activo y diseñado originalmente para su uso en el Reino Unido<sup>22</sup>. El modelo está compuesto de cuatro submodelos interconectados mediante una estructura de cascada (véase el gráfico siguiente): modelo de la inflación en precios, modelo a largo plazo del tipo de interés (*consols yield*), modelo de dividendos y otro modelo de rentabilidad o reparto de dividendos. El modelo de Wilkie presenta una estructura de cascada en la que la inflación es la variable inductora y se modeliza como un proceso autorregresivo de primer orden o AR (1). Una vez proyectada la inflación, ésta afecta a la rentabilidad de los activos, lo cual permite solamente causalidad unidireccional.



Fuente: Wilkie (1986)

Otros modelos con estructura de cascada empleados en el ámbito actuarial para la modelización de activos son los de Whitten y Thomas (1999), el modelo TY de Yakoubov *et al.* (1999), etc. Además, existen otras propuestas con una estructura similar a la de Wilkie pero aplicados a otros países como Australia (Carter, 1991), África del Sur (Thomson, 1994), Japón (Tanaka y Inui, 1995) y Finlandia (Ranne, 1998). En

<sup>22</sup> El ajuste del modelo se realizó con datos del intervalo 1919-1982.

DFA se han empleado modelos de cascada para la generación correlacionada de activos y pasivos. Los ejemplos más claros de estos modelos son el modelo Dynamo y el modelo empleado en Kaufmann *et al.* (2001). El modelo DynaMo adopta una estructura de cascada con los tipos de interés a corto plazo actuando como inductor del resto de variables (inflación, rentabilidad de las acciones, etc.) Dicha estructura es similar a la empleada en el modelo de Kaufmann *et al.* (2001).

### B. La factorización de Cholesky

El método de la factorización de Cholesky<sup>23</sup> puede ser utilizada en un modelo DFA para generar variables correlacionadas, es decir, dotar a un modelo de generación de escenarios de consistencia. Para cada factor de riesgo se generan números aleatorios siguiendo una distribución asumida, pero transformaremos dichas distribuciones para que mantengan una estructura de correlación a través de la matriz de varianzas-covarianzas de los factores de riesgo. Este método permite crear números aleatorios correlacionados, de forma que podemos generar escenarios multivariantes correlacionados.

Tenemos la matriz de varianzas-covarianzas de los factores de riesgo que queremos correlacionar (matriz  $\Omega$ ). Como  $\Omega_{(n \times n)}$  es una matriz simétrica y con valores reales, la podemos descomponer mediante un proceso de factorización matricial en una matriz por su transpuesta, es decir:

$$\Omega_{(n \times n)} = A_{(n \times n)} A_{(n \times n)}^t$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Donde  $A_{(n \times n)}$  es la matriz de Cholesky (matriz triangular inferior). Podemos generar una matriz de variables correlacionadas a partir de la matriz  $D_{(n \times m)}$  de variables aleatorias independientes, donde “n” el número de factores de riesgo que deseamos correlacionar y “m” el número de simulaciones:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

<sup>23</sup> El método permite a partir de números aleatorios normalmente distribuidos y de la estructura de correlación estimada entre las variables, generar números aleatorios correlacionados, que se pueden emplear en la generación de escenarios en cada simulación.

La matriz  $C$  representa las nuevas variables correlacionadas. Esta matriz se calcula por producto de matrices:  $C_{(m \times n)} = D_{(m \times n)} \cdot A^t_{(n \times n)}$ . Esta nueva matriz  $C$  presenta los factores de riesgo correlacionados por su estructura de varianzas-covarianzas, es decir:

$$\text{Var}(C) = C^t C = (DA^t)^t DA^t = AD^t DA^t = AIA^t = AA = \Omega$$

### Ejemplo. Correlación de variables mediante Cholesky.

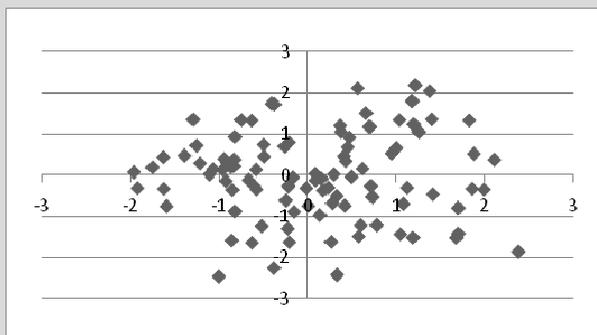
Supongamos que queremos correlacionar dos variables distribuidas como una Normal estándar cada una de ellas. Además sabemos que el coeficiente de correlación lineal entre ellas es de 0,75.

	X1	X2
Media	0	0
Desviación Estándar	1	1
Correlación	0,75	

Primero debemos generar las  $N$  variables aleatorias no correlacionadas, que recordemos se producía a través de =DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO()) para cada una de las variables.

1	0,324409939	-2,413307811
2	0,944369276	0,540275096
3	1,252146831	1,066355253
...	...	...
$N$	0,59848503	-1,210355549

Su representación gráfica vienen dada por:



Posteriormente a partir de la matriz de correlación histórica debemos calcular la matriz de Cholesky. Por lo tanto, si la matriz de correlación es:

1	0,75
0,75	1

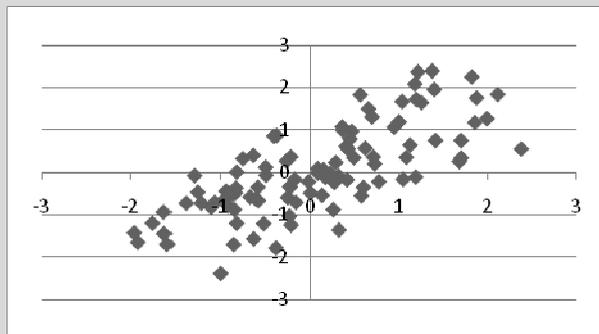
Su matriz de Cholesky superior es:

1	0,75
0	0,66

Por lo que simplemente debemos multiplicar la matriz de Cholesky superior por la matriz de variables aleatorias sin correlacionar mediante producto matricial. Para ello debemos emplear la función =MMULT(Matriz de variables aleatorias sin correlacionar; Matriz de Cholesky superior) obteniendo como resultado la matriz de variables correlacionadas:

1	0,32440994	-1,35294562
2	0,94436928	1,06563534
3	1,25214683	1,64443783
...	...	...
N	0,59848503	-0,35171117

Podemos representar gráficamente las variables correlacionadas.



El software R facilita el procedimiento anterior ya que es más flexible que Excel para el trabajo con matrices. Supongamos ahora que queremos correlacionar tres variables aleatorias normalmente distribuidas con media=0 y desviación típica=1- Además sabemos que el coeficiente de correlación lineal entre la variable X1 y X2 es de 0,8; entre X1 y X3 es de 0,6 y entre X2 y X3 es de 0,5.

	X1	X2	X3
Media	0	0	0
Desviación Estándar	1	1	1

Por tanto la matriz de correlaciones para tres factores de riesgo, a la que denominamos  $c$  será :

```
c=matrix(c(1,0.75,0.75,1),ncol=2)
```

Podemos calcular la matriz de Cholesky como:

```
chol(c)
```

Que nos da la matriz superior triangular, mientras que  $t(chol(c))$  nos da la matriz inferior triangular. Por lo tanto es obvio, por su definición, que el comando  $t(chol(c))\%*\%chol(c)$  es la matriz  $c$  original. Si queremos correlacionar 10 muestras para las dos variables aleatorias normales estándar haremos simplemente debemos generar la matriz incorrelacionada:

```
A=matrix(c(rnorm(10),rnorm(10)),ncol=2)
```

La matriz  $A$  está compuesta por dos columnas cada una de ellas formada por 10  $N(0,1)$  independientes. Por lo tanto para correlacionar esta matriz  $A$  de  $N(0,1)$  según su matriz de correlaciones histórica simplemente efectuaremos:

```
s=A%\%chol(c)
```

Si queremos que la nueva matriz tenga por columnas las  $N(0,1)$  correlacionadas (lo que en principio es más recomendable por la forma en la que  $R$  trabaja), en el caso de que las deseemos las variables por filas simplemente tendríamos que especificar:

```
p=t(chol(c))%\%t(a)
```

Es frecuente asumir, pese a sus contra evidencias empíricas, que la distribución que mejor se ajuste a los rendimientos de una cartera de activos es la distribución normal multivariante. En  $R$  para generar la distribución normal multivariante se puede emplear, entre otros, la función `rmvnorm()` del paquete `mvtnorm`. En esta función nos pide la media de cada variable y la matriz de varianzas-covarianzas. Además, esta función permite la descomposición de dicha matriz por los siguientes métodos: autovalores, valores singulares o por el método de Cholesky siendo el método predefinido el primero.

Siguiendo con el ejemplo anterior, si deseamos generar el 10 muestras correlacionadas por el método de los autovalores haríamos:

```
D=rmvnorm(n=10, sigma=c)
```

Por el método de los valores singulares solo tenemos que establecer:

```
D=rmvnorm(n=10^6, sigma=c, method="svd")
```

Y para aplicar el método de Cholesky:

```
D=rmvnorm(n=10^6, sigma=c, method="chol")
```

### C. El método de Iman Conover (IC)

El método de Iman Conover (IC) es una herramienta para tratar la dependencia entre variables aleatorias, que posibilita correlacionar muestras de variables, siendo el método recomendado por Mildenhall (2005) para generar variables correlacionadas por su rapidez, eficiencia y fácil comprensión<sup>24</sup>. Además, es el método empleado por varios programas informáticos entre los que destaca @Risk de Palisade, y es especialmente adecuado para realizar simulaciones donde las distribuciones marginales son muestreadas de forma independiente pero deben ser combinadas para alcanzar cierto grado de correlación.

El método IC funciona de la siguiente forma: Dadas dos muestras de  $N$  valores a partir de dos distribuciones marginales conocidas  $X$  e  $Y$ , y una estructura de correlación deseada entre ellas  $\rho(X, Y)$ , el primer paso consiste en determinar una muestra a partir de alguna distribución bivalente de referencia que tenga exactamente la correlación lineal deseada. El segundo paso, consiste en reordenar las muestras de  $X$  e  $Y$  para tener el mismo orden que la distribución de referencia. Como resultado obtendremos una muestra de una distribución bivalente con la distribución marginal correcta y con el coeficiente de correlación de *Spearman* igual al de la distribución bivalente. Además, dado que la correlación lineal y la correlación de *Spearman* presentan valores próximos, el *output* tiene aproximadamente la estructura de correlación deseada. Iman y Conover (1982) citan las siguientes ventajas de su método:

- Es un método fácil de entender y de implementar.
- Es válido para todo tipo de distribuciones.
- Las distribuciones marginales permanecen inalteradas.
- Puede ser aplicado a cualquier técnica de muestreo, por lo que la muestra resultante contiene los mismos valores que la muestra de entrada pero con una ordenación diferente<sup>25</sup>.

Por contra, las únicas dificultades del método vienen derivadas de la descomposición de Cholesky y la inversión de matrices. La idea del método básico de IC es dotar de una estructura de correlaciones de *Spearman*  $R_s$ <sup>26</sup> a partir de una distribución normal multivariante a las distribuciones marginales deseadas. Posterior-

<sup>24</sup> La existencia de algoritmos simples para determinar muestras para las distribuciones con la estructura de correlación deseada es lo que hace que el método IC sea tan eficiente.

<sup>25</sup> Esta ventaja es muy importante en @Risk ya que permite el muestreo por la técnica de Latino Hiper-cúbica. Aplicando el método IC y esta técnica de muestreo nos aseguramos de que la integridad de los intervalos se mantiene.

<sup>26</sup> Podemos obtener la matriz de correlaciones lineales  $R$  a partir de las correlaciones de Spearman mediante la fórmula  $R = 2 \operatorname{seno} \left( \frac{\pi R_s}{6} \right)$ .

El método para correlacionar las distribuciones normales es el método de factorización de Cholesky. Por lo tanto, la estructura de dependencia puede ser implementada por multiplicación de la matriz de Cholesky con los datos de la distribución normal estándar.

mente a estos valores les aplicamos la distribución normal de forma que obtenemos números distribuidos entre  $[0,1]$ . Finalmente, a estos números aleatorios le aplicamos la distribución inversa de las marginales deseadas obteniendo las muestras correlacionadas (Embrechts *et al.* 2002). Estos pasos se pueden resumir para el método Iman Conover básico en:

- Simular una distribución normal estándar multivariante  $(X_1, X_2, \dots, X_n)^t$  con la matriz de correlaciones lineales  $R$  deseada y obtenida a partir de la matriz de correlaciones  $R_S$ .
- Obtener los valores de  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^t = (F_1^{-1}\Phi(X_1), F_2^{-1}\Phi(X_2), \dots, F_n^{-1}\Phi(X_n))^t$ .

La matriz de correlaciones de Spearman  $R_S$  de los valores simulados para la matriz  $Y$  es exactamente igual a la de la matriz  $X$ , sin embargo su matriz de correlaciones lineales no será la misma aunque se aproxima. Mildenhall (2005) proporcionan un ejemplo práctico y un algoritmo para aplicar el método IC detallado, de forma que se entiende mejor su funcionamiento y las distintas modificaciones que el método básico pueden ser incorporadas.

## 4.2. Cópulas

Un modelo de simulación estocástica multivariante está compuesto por dos componentes: las distribuciones marginales univariantes que caracterizan a cada una de las variables y la estructura de dependencia entre cada una de las variables. La estructura de dependencia entre variables es lo que se conoce como cópula, y a través de la combinación de distintas cópulas con distintas distribuciones marginales podemos construir un elevado número de distribuciones multivariantes distintas.

La técnica de simulación de Monte Carlo de  $k$  variables,  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , requiere como hemos visto frecuentemente la generación de  $k$  variables aleatorias uniformes  $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ . Si las variables  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  son independientes, necesitaremos generar  $k$  variables uniformes independientes  $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ . Por el contrario, si las variables  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  son dependientes, debemos generar  $(U_1, U_2, \dots, U_k)$  de forma dependiente. Por lo tanto, para un conjunto de distribuciones marginales dadas, la estructura de dependencia entre las variables  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  está determinada completamente por la estructura de las variables uniformes de las que proceden. La estructura de dependencia se relaciona con una función específica que describe por completo la relación entre las variables aleatorias, y que se denomina cópula.

Una cópula es una técnica que establece la relación o estructura de dependencia entre variables. La estructura de dependencia se refiere a la función específica que describe la relación entre variables aleatorias, y por tanto cada cópula implica una estructura de dependencia particular. De este modo, podemos definir una cópula como la función que une las distribuciones marginales univariantes a la distribución multivariante. Formalmente:

Sean  $u_1, u_2, \dots, u_k$   $n$  realizaciones de una distribución uniforme. La relación que se establece entre ellas se describe a través de la función de distribución conjunta o función cópula  $C$ :

$$C(U) = C(u_1, u_2, \dots, u_k) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_k \leq u_k)$$

Donde:  $C(U)$  es una función de distribución multivariante.

En el caso de dos riesgos, su relación vendrá establecida a través de una cópula de dos dimensiones denotada por  $C(u, v)$ . Esta cópula es una función de distribución de dos variables definida en el dominio  $[0,1]^2$  y cuyas marginales univariantes son uniformes en el dominio  $[0,1]$ . Además, podemos decir que para  $\forall u, v \in [0,1]$  tenemos que  $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ ,  $C(u, 1) = u$  y que  $C(1, v) = v$ .

Alternativamente podemos definir una cópula bivariante como cualquier función  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  con las siguientes propiedades:

- $C(u, v)$  es un componente creciente de  $u$ .
- $C(u, 1) = u$  y  $C(1, v) = v$  para  $\forall u, v \in [0,1]$ .
- $C(u_1, u_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(v_1, v_2) \geq 0$ .

Y de forma semejante, podemos definir una cópula  $n$ -dimensional como una función de distribución multivariante  $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  con las siguientes propiedades:

- $C(x_1, x_2, \dots, x_k)$  es un componente creciente de  $x_k$ .
- $C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i$  para  $\forall i \in (1, 2, \dots, n), x_i \in [0,1]$ .
- Para cada  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0,1]^n$  con  $(a_i \leq b_i) \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(x_{1i_1}, \dots, x_{ni_n}) \geq 0$  siendo  $x_{j1} = a_j$  y  $x_{j2} = b_j$  para  $\forall j \in (1, 2, \dots, n)$ .

Una de las principales ventajas de las cópulas es que su estructura de dependencia no se ve alterada ni por transformaciones no lineales, ni por las características de las distribuciones marginales subyacentes (*distribution-free*). Otra ventaja fundamental, es que permite simular variables correlacionadas según la estructura de dependencia de la cópula, que puede ser estimada a partir de la dependencia empírica.

Cuando se aplica esta técnica para tener en consideración la estructura de dependencia empírica, la relación de dependencia está enteramente determinada por la cópula, mientras que los parámetros de escala y forma (media, desviación estándar, asimetría y curtosis) están determinados completamente por las distribuciones marginales. Por lo tanto, piénsese que en un modelo DFA se está estudiando el empleo de distintas familias de cópulas. A pesar de que las cópulas se generen para las mismas distribuciones marginales, la estructura de dependencia puede ser totalmente distinta. Además, las cópulas que presenten dependencia en las

colas son más peligrosas para la compañía ya que pueden provocar la ocurrencia de pérdidas elevadas de forma conjunta

La aplicación de cópulas en los modelos DFA permite modelizar los resultados de la interacción de, por ejemplo dos o más líneas de negocio, teniendo en consideración diferentes alternativas:

- *Relación simétrica*: los resultados buenos de la línea A son más probables en el caso de buenos resultados en la línea B y además, los malos resultados en la línea A son más probables en el caso de malos resultados en la línea B.
- *Relación con cola derecha*: los resultados buenos de la línea A son más probables en el caso de buenos resultados en la línea B, pero los malos resultados en la línea A no significan necesariamente malos resultados en la línea B.
- *Relación con cola izquierda*: los resultados buenos de la línea A no significan necesariamente buenos resultados en la línea B, pero los malos resultados en la línea A son más probables en el caso de malos resultados en la línea B.

Los campos de aplicación de las cópulas se extienden a todos aquellos ámbitos en los que es necesario considerar la correlación entre distintas variables. El empleo de cópulas puede emplearse para la modelización de la dependencia de la cartera de activos, de la cartera de pasivos o de sus interrelaciones. Referencias básicas sobre la Teoría de cópulas son Joe (1997), Nelsen (1999), Cherubini *et al.* (2004) y Denuit *et al.* (2005).

La aplicación de las cópulas al sector asegurador para modelizar la siniestralidad de una compañía se fundamenta en la ocurrencia de sucesos relacionados que pueden afectar a varias líneas de negocio simultáneamente. Wang (1999) propone el uso de cópulas para la modelización de la distribución de los siniestros agregados de carteras aseguradoras dependientes. A este trabajo le han seguido las aportaciones de Frees y Valdez (1998), Klugman y Parsa (1999) y Belguise y Levi (2002) para modelizar dependencias entre siniestros<sup>27</sup>. Isaacs (2003), Tang y Valdez (2005) y Eling y Toplek (2009) aplican cópulas para determinar los requisitos de capital de una compañía aseguradora que opere en varios ramos de negocio. De sus trabajos se deduce que el empleo del coeficiente de correlación lineal para medir dependencias en riesgos no lineales o el empleo de cópulas erróneas puede conducir a una medición incorrecta del riesgo. En el ámbito financiero<sup>28</sup> a partir del

---

<sup>27</sup> Aunque estos autores empleen las cópulas para la modelización de siniestros los enfoques difieren en mayor o menor grado. Así, por ejemplo, Frees y Valdez asumen distribuciones marginales de Pareto y comparan el ajuste para múltiples cópulas, mientras que Klugman y Parsa comparan el ajuste entre distintas distribuciones marginales para la severidad de los siniestros y emplean de forma arbitraria la cópula de Frank. Por otro lado, Belguise y Levi estudian las cópulas aplicadas a siniestros catastróficos entre líneas de negocio.

<sup>28</sup> Tradicionalmente los rendimientos de una cartera de acciones se modelizaban a través del modelo normal. A través de este método se calculan los logaritmos de los precios de cada acción y se correlacionan a través de la matriz de correlaciones empíricas. No obstante, la evidencia empírica nos dice que las distribuciones en la práctica son más asimétricas y poseen colas más gruesas, por lo que

trabajo de Embrechts *et al.* (2002) las cópulas se han convertido en un campo de investigación fructífero. Entre los principales autores en este ámbito destacamos los trabajos de Bouyé *et al.* (2000), Breymann *et al.* (2003), Dias y Embrechts (2003) y Barnett *et al.* (2007), entre otros. A continuación procederemos a establecer la clasificación o tipología de las cópulas.

#### 4.2.1. Tipología de cópulas

Las cópulas más empleadas en la industria aseguradora y financiera son las arquimedianas (Gumbel, Frank y Clayton principalmente) y las elípticas (Gaussiana o normal, y la cópula *t* de Student) por lo que les prestaremos una especial importancia. Otras cópulas relevantes como las cópulas empíricas, las mixturas de cópulas o las cópulas de valor extremo también serán tratadas pero con un menor detalle.

##### A. Cópulas arquimedianas (Archimedean Copulas)

Este tipo de cópulas son ampliamente empleadas en el ámbito actuarial y financiero por su facilidad de construcción. Sin embargo, su simulación en el campo multivariante es dificultosa. Pueden ser construidas usando un generador,  $\phi(t)$ , que es una función continua, decreciente y convexa. Si asumimos que  $\phi$  es una función generadora  $\phi : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $\phi(0) = \infty$  y  $\phi(1) = 0$  y denotamos a  $\phi^{-1}$  como la inversa o pseudoinversa de dicha función,  $\phi^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0,1]$  con las mismas propiedades excepto que  $\phi^{-1}(0) = 1$  y  $\phi^{-1}(\infty) = 0$ .

La cópula  $n$ -dimensional  $C_\phi(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))$  para todo  $0 \leq u_1, \dots, u_n \leq 1$ , se dice que es una cópula arquimediana. A la función  $\phi$  se le denomina el generador de la cópula  $C_\phi$ . Sin embargo, la propiedad de la inversa de la función generadora de la cópula no existe siempre, en cuyo caso debe ser definida una pseudoinversa<sup>29</sup>. Si suponemos una cópula bidimensional ( $n = 2$ ):

$$C_\phi(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) \quad \text{para } u, v \in (0,1]$$

Una función generadora únicamente determina una cópula arquimediana<sup>30</sup>. Las funciones generadores pueden crearse a partir de las inversas de las transforma-

---

posteriormente se ha sugerido el empleo de la distribución *t de Student*. En ambos casos el coeficiente de correlación es una medida de dependencia válida. Sin embargo, si se emplean distribuciones no elípticas el empleo del coeficiente de correlación lineal puede llevar a infravaloraciones del riesgo. La estructura de dependencia empírica generalmente es distinta a la gaussiana, ya que ésta no considera la posibilidad de movimientos extremos conjuntos.

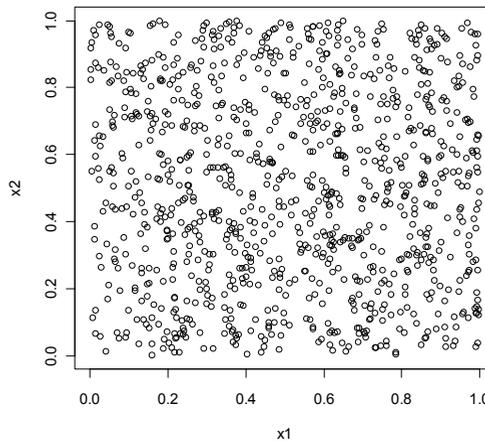
<sup>29</sup> Cuando  $\phi(0)$  es finito sólo tenemos que generar una pseudo-inversa de  $\phi$ ,  $\phi^{[-1]}$  definida por  $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$  para  $0 \leq t \leq \phi(0)$  y por  $\phi^{[-1]} = 0$  para  $\phi(0) \leq t \leq \infty$ .

<sup>30</sup> Excepto la operación de multiplicación por un escalar, es decir, para cualquier constante  $c > 0$ ,  $c\phi$  es también un generador de la cópula  $C$ .

ciones de Laplace  $\psi(t)$ <sup>31</sup> de funciones de distribución o de sus correspondientes funciones generadoras de momentos. Nelsen (1999) prueba que la inversa de  $\psi(t)$  satisface las propiedades de un generador de cópulas, de forma que  $\phi(t) = \psi^{-1}(t)$  genera una cópula arquimediana.

### A.1. Cópula producto o independiente

La cópula producto tiene como generador  $\phi(t) = -\ln t$  por lo que la cópula  $n$  dimensional tiene la siguiente expresión  $C(U) = \Pi = u_1 \cdot \dots \cdot u_n$ , tomando por lo tanto en el caso bidimensional la expresión  $C(u, v) = \Pi = u \cdot v$ . La expresión para el caso  $n$ -dimensional es  $C(U) = \Pi = \prod_{i=1}^n u_i$ . En el siguiente gráfico se muestra la representación gráfica de esta cópula.



### A.2. Cópulas de Gumbel, Frank y Clayton

La familia de cópulas de Gumbel, Gumbel-Hougaard o logística (Gumbel, 1960 y Hougaard, 1986) permite medir la dependencia en las colas, debido a su extrema dependencia en la cola derecha. Esto ha llevado a Issacs (2003) y Eling y Toplek (2009) a emplear esta cópula en un contexto DFA. La cópula de Gumbel es una cópula asimétrica donde su parámetro  $\alpha$  mide la dependencia, de forma que si  $\alpha = 1$  implica independencia y si  $\alpha \rightarrow \infty$  implica perfecta dependencia. La cópula de Gumbel tiene como generador  $\phi(t) = (-\ln t)^\alpha$  y la inversa de su generador es  $\phi^{-1}(s) = \exp(-s^{1/\alpha})$ .

---

<sup>31</sup> Si una variable aleatoria  $X \geq 0$  tiene una función de distribución  $F(x)$ , entonces su transformación de Laplace está dada por  $\psi(t) = E[e^{-xt}] = \int_0^\infty e^{-xt} dF(x)$ .

La cópula de dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  con función de distribución  $H_\alpha(x, y) = \exp [-(e^{-\alpha x} + e^{-\alpha y})^{-\frac{1}{\alpha}}]$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^2$  donde  $\alpha \geq 1$  está dada por:

$$C_\alpha(u, v) = \exp \{ - [(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{-\frac{1}{\alpha}} \}$$

Para el caso  $n$ -dimensional la cópula tiene la expresión:

$$C_\alpha(U) = \exp \{ - [(-\ln u_1)^\alpha + \dots + (-\ln u_n)^\alpha]^{-\frac{1}{\alpha}} \}$$

La cópula de Gumbel puede ser parametrizada en términos de su parámetro  $\alpha \geq 1$  que indica la fortaleza de la relación en la cola derecha. Obsérvese que para el caso  $\alpha = 1$  la cópula de Gumbel se convierte en la cópula independiente o producto. Para  $\alpha > 1$  la cópula muestra dependencia en la cola derecha. Además, cuanto mayor sea el valor del parámetro mayor será la forma de cometa característica de esta cópula.

La familia de cópulas de Frank (1979) es radialmente simétrica, lo que supone que la distribución de los eventos aleatorios del lado superior es equivalente a la distribución de los eventos del lado inferior. Formalmente, si  $X$  e  $Y$  son dos variables aleatorias y  $(a, b)$  es un punto en el espacio  $\mathbb{R}^2$ , se dice que  $(X, Y)$  es radialmente simétrico sobre  $(a, b)$  si la función de distribución conjunta  $X - a$  e  $Y - b$  es la misma que la función de distribución conjunta de  $a - X$  y  $b - Y$ .

La cópula de dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  está dada por:

$$C_\alpha(u, v) = \frac{-1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right)$$

Para el caso  $n$ -dimensional la cópula tiene la expresión:

$$C_\alpha(U) = \frac{-1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \dots (e^{-\alpha v_n} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right)$$

El parámetro característico de la cópula  $\alpha$  puede tomar cualquier valor menos 0, en cuyo caso tenemos la cópula independiente.

La cópula de Clayton es una cópula asimétrica que exhibe dependencia en la cola izquierda. La cópula de Clayton tiene como generador  $\phi(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$  y la inversa de su generador es  $\phi^{-1}(t) = -t^{(1-\alpha)}$  con  $\alpha > 0$ . El parámetro  $\alpha$  controla la dependencia de la cópula, de forma que si  $\alpha = 0$  implica independencia y si  $\alpha \rightarrow \infty$  implica perfecta dependencia.

La cópula de 2 dimensiones viene dada por la siguiente expresión:

$$C_\alpha(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

Para el caso  $n$ -dimensional la cópula viene dada por:

$$C(U) = \left( \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - 1 \right)^{-1/\alpha}$$

En las siguientes tablas se resumen los generadores y su inversa, las formas funcionales y la dependencia de las cópulas anteriormente expuestas.

Familia de cópulas	Cópula de 2 dimensiones $C_\phi(u, v)$	Parámetro $\alpha$
Independencia	$uv$	—
Clayton	$(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$	$\alpha > 0$
Gumbel	$\exp\{-[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha}\}$	$\alpha \geq 1$
Frank	$\frac{-1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)}\right)$	$\alpha \in \mathbb{R}$

Familia de cópulas	Generador $\Pi(t)$	Inversa del Generador $\phi^{-1}(t)$	Dependencia en cola
Independencia	$-\ln t$	$\exp(-t)$	—
Clayton	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$-t^{(1-\alpha)}$	Inferior
Gumbel	$(-\ln t)^\alpha$	$\exp(-t^{1/\alpha})$	Superior
Frank	$-\ln\left(\frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$-\alpha^{-1} \ln[1 + e^{-\alpha t}(e^{-\alpha} - 1)]$	Ninguna

Familia	Tau de Kendall	Rho de Spearman
Independencia	0	0
Clayton	$\frac{\alpha}{(\alpha + 2)}$	No forma analítica
Gumbel	$1 - \alpha^{-1}$	No forma analítica
Frank	$1 - \frac{4}{\alpha}(D_1(-\alpha) - 1)^{32}$	$1 - \frac{12}{\alpha}(D_2(-\alpha) - D_1(-\alpha))$

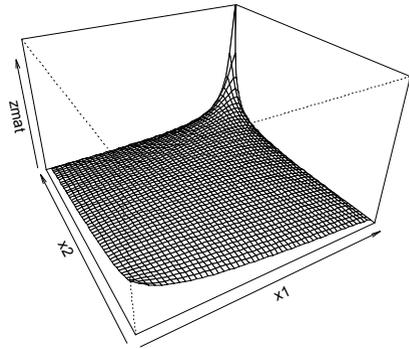
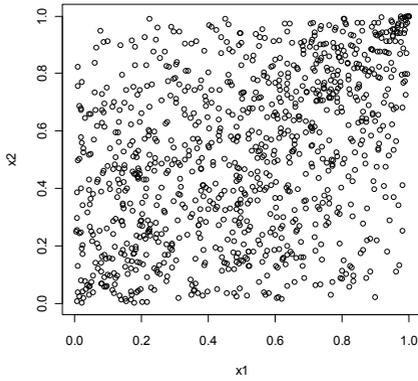
Como se puede apreciar en los siguientes gráficos, la cópula de Gumbel es una cópula asimétrica con probabilidad concentrada en la cola derecha, es decir en los puntos cercanos a (1,1), por lo que se emplea para correlacionar valores elevados de variables aleatorias. La cópula de Frank es simétrica entre (0,0) y (1,1), y por tanto considera la misma dependencia entre los grandes valores que entre los pequeños. Finalmente, la cópula de Clayton tiene una fuerte concentración de probabi-

<sup>32</sup> Expresado en base a la función de Debye. De forma alternativa

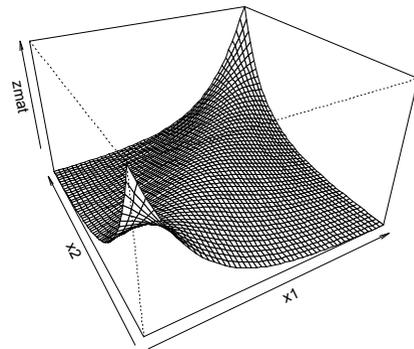
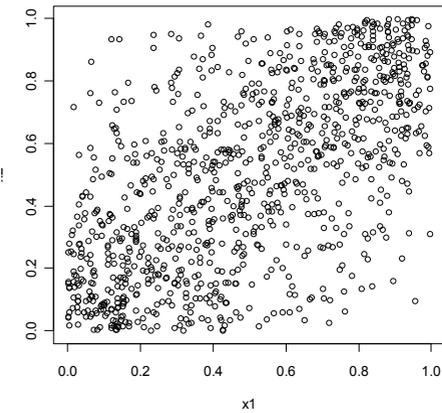
$$1 - 4\alpha^{-1}(1 - \alpha^{-1} \int_0^\alpha t/(\exp(y) - 1)dt).$$

alidad en los puntos cercanos a  $(0,0)$ , es decir genera dependencia en la cola inferior, por lo que es útil para correlacionar valores bajos de variables aleatorias.

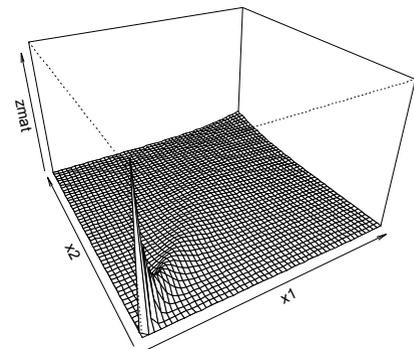
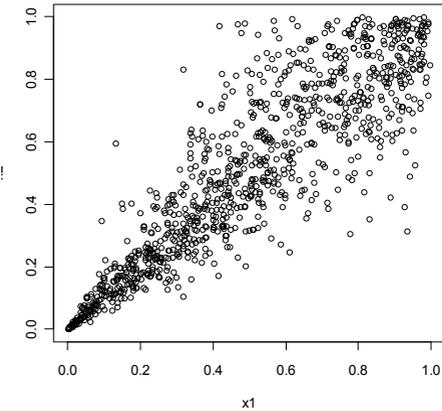
### Cópula de Gumbel



### Cópula de Frank



### Cópula de Clayton



## B. Cópulas elípticas

La familia de cópulas elípticas está basada en las distribuciones multivariantes elípticas<sup>33</sup>. Las cópulas Gaussiana o Normal y la cópula  $t$  de Student pertenecen a esta clase. Las cópulas elípticas son simétricas y sólo pueden existir cuando el coeficiente de correlación lineal no es igual a la unidad<sup>34</sup>. Las cópulas elípticas tienen como ventajas, su relativa sencillez de implantación, fácil parametrización a través del coeficiente de correlación lineal y su rapidez de simulación. Además, proporcionan una cierta flexibilidad para la modelización de dependencias en las colas<sup>35</sup>.

### Cópula Normal y $t$ de Student

Dentro de la familia de cópulas elípticas destacan principalmente la cópula normal y la cópula  $t$  de Student. La cópula normal es muy empleada en la práctica por su facilidad de empleo y porque su estructura de dependencia está completamente descrita por su matriz de correlación. Debe destacarse sin embargo, que la familia de cópulas normales no presenta dependencia en la cola, lo cual puede conducir a una infravaloración del riesgo realmente asumido.

La cópula Normal  $n$ -dimensional se define formalmente como:

Sea  $X$  un vector  $n$ -dimensional con una distribución normal multivariante con vector de medias cero y matriz de correlación lineal  $\Sigma$ ,  $C_{\Sigma}(U) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$  es la cópula normal donde  $\Phi_{\Sigma}$  es la función de distribución conjunta de  $n$  variables normales estandarizadas con matriz de correlaciones  $\Sigma$  y  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución normal estándar univariante.

La cópula Normal bidimensional está definida como  $C_{\rho}(U) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$ , donde  $\Phi_{\rho}$  es la función de distribución conjunta de las dos variables con coeficiente de correlación  $\rho$ <sup>36</sup>. La fórmula anterior también puede ser escrita como:

---

<sup>33</sup> Sea  $X$  un vector  $n$ -dimensional aleatorio y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz semi-definida positiva simétrica. El vector aleatorio  $X$  se dice que tiene una distribución elíptica con parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$  si tiene como función generadora o característica  $\phi(t) = \Phi(t^T \Sigma t)$  para la variable aleatoria  $t$ . La cópula  $C$  para el vector aleatorio  $X$  es una cópula elíptica si y sólo si es la cópula de una distribución elíptica. Las cópulas elípticas están únicamente determinadas por su matriz de correlación y el conocimiento de su tipo o clase.

<sup>34</sup> Por tanto, el coeficiente de correlación lineal debe tomar valores en el rango  $(-1, 1)$ , siendo imposible simular una cópula elíptica  $n$ -dimensional cuando todos los coeficientes de correlación lineal de la matriz de correlaciones son iguales a uno.

<sup>35</sup> Como veremos posteriormente la cópula  $t$  de Student permite el ajuste de la dependencia en las colas a través del número de grados de libertad. Así, cuanto mayor sea el número de grados de libertad menor será la dependencia en ambas colas.

<sup>36</sup> Debe recordarse que para la cópula de Gauss (ídem para la cópula  $t$  de Student) la tau de Kendall se determina como:  $\tau(\Phi(X), \Phi(Y)) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$  y la rho de Spearman como  $\text{Spearman}(\Phi(X), \Phi(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsin(\rho/2)$ . De esta forma, se pueden calibrar las cópulas elípticas empleando la relación entre los coeficientes de correlación lineal entre variables aleatorias y su relación con las otras medidas.

$$C_\rho(U) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$$

A semejanza de las cópulas normales, las cópulas  $t$  de Student son cópulas simétricas y elípticas cuya estructura de dependencia está completamente descrita por la matriz de correlaciones entre las variables. Sin embargo, en contraste con la cópula de Gauss, la cópula  $t$  de Student presenta dependencia en ambas colas. Dicha dependencia será más elevada cuanto menor sea el número de grados de libertad. Además, debe resaltarse que la cópula normal es una cópula  $t$  de Student con infinitos grados de libertad. Por eso, se dice que los grados de libertad de una cópula  $t$  de Student se pueden emplear para calibrar la cópula a las medidas de dependencia en la cola.

Sea  $X$  un vector  $n$ -dimensional con una distribución  $t$  de Student multivariante con  $v$  grados de libertad, vector de medias cero y matriz de correlación lineal  $\Sigma$ ,  $C_\Sigma(U) = t_{v,\Sigma}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))$  donde  $t_{v,\Sigma}$  es la función de distribución conjunta de  $n$  variables  $t$  de Student estandarizadas con  $v$  grados de libertad y matriz de correlaciones  $\Sigma$ , y  $t_v^{-1}$  es la inversa de la función de distribución  $t$  de Student estándar univariante con  $v$  grados de libertad. La cópula  $t$  de Student bidimensional está definida como:

$$C_\rho(U) = t_{v,\rho}(t_v^{-1}(u) t_v^{-1}(v))$$

Donde  $t_{v,\rho}$  es la función de distribución conjunta de las dos variables con coeficiente de correlación  $\rho$ . La anterior expresión también puede ser escrita como:

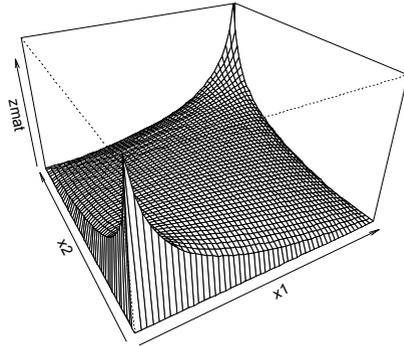
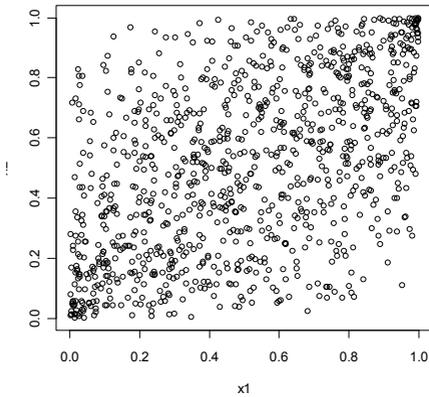
$$C_\rho(U) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(1 + \frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{v(1-\rho^2)}\right)^{\frac{-v+2}{2}} ds dt$$

En la siguiente tabla se resumen las dos cópulas elípticas consideradas.

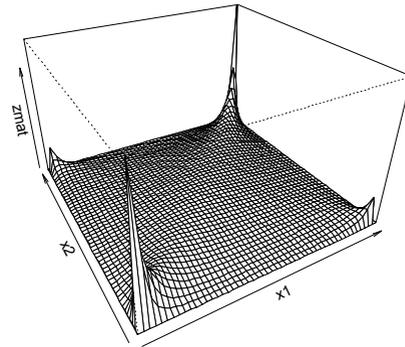
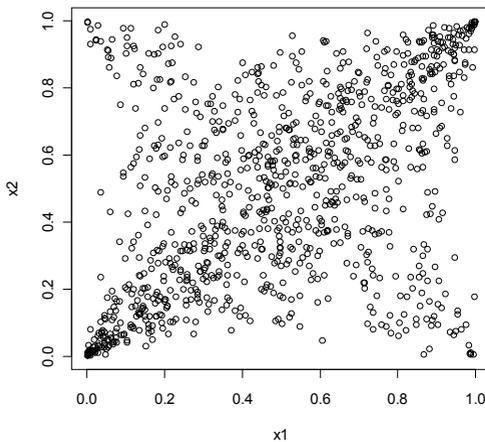
Familia de cópulas	Cópula de 2 dimensiones $C_\phi(u, v)$	Tau de Kendall	Rho de Spearman	Dependencia colas
Normal	$\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u)\Phi^{-1}(v))$	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsen(\rho/2)$	No
t-Student	$t_{v,\rho}(t_v^{-1}(u) t_v^{-1}(v))$	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsen(\rho/2)$	Superior e inferior

En el siguiente gráfico se muestra la representación de la cópula normal y  $t$  de Student.

## Cóputa Normal



## Cóputa $t$ de Student



### C. Cópulas empíricas, cópulas de valor extremo y mixturas de cópulas

Las cópulas arquimedianas y las cópulas elípticas son cópulas paramétricas, pero también existen las cópulas empíricas o cópulas de Deheuvels (1979). Una cópula empírica es una función que representa la dependencia entre variables basándose en las observaciones reales. Por lo tanto, puede ser interpretada como la función de dependencia equivalente a la función de distribución empírica.

Una cópula empírica para una muestra de datos bivariantes  $(x_i, y_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  viene definida por la siguiente expresión:

$$C_E(u) = C_E(x, y) = C\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) = \frac{\#\{(x, y): x \leq x_{(j)}, y \leq y_{(k)}\}}{n}$$

donde  $\#$  representa la cardinalidad de un conjunto, e  $x_{(j)}, y_{(k)}$  denotan las estadísticas de orden de la muestra. De esta forma  $\#\{(x, y): x \leq x_{(j)}, y \leq y_{(k)}\}$  representa el número de observaciones muestrales que descansan a la izquierda o abajo del punto  $(x_{(j)}, y_{(k)})$ , siendo  $x_{(j)}$  el  $j$ -ésimo menor valor de la muestra  $x$  e  $y_{(k)}$  el  $k$ -ésimo menor valor de la muestra  $y$ .

La fórmula anterior permite calcular la cópula empírica para una muestra dada. De esta forma podemos emplear una cópula empírica para simular las estructuras de dependencia entre las variables aleatorias de nuestro modelo en vez de emplear cópulas paramétricas. Sin embargo, el empleo de cópulas empíricas no está exento de problemas (véanse dichos problemas en Piwcewicz, 2005) por lo que en general se recurre a las cópulas paramétricas<sup>37</sup>.

Las cópulas de valor extremo se emplean para establecer una fuerte estructura de dependencia en la cola de la función de distribución conjunta. Son el equivalente a las distribuciones marginales univariantes de valor extremo, y su principal utilidad reside en que permiten una libertad para modelizar las concentraciones de riesgo en la cola. La cópula de Gumbel es una cópula arquimediana y también es una cópula de valor extremo. Otra cópula de valor extremo frecuentemente empleada es la cópula Galambos<sup>38</sup>.

Al igual que para modelizar una determinada variable se puede emplear una mezcla o mixtura de distribuciones, en el caso de las cópulas si denotamos por  $C^A(U, \theta_1)$  a la cópula A, y por  $C^B(U, \theta_2)$  a la cópula B, la mixtura de cópulas será:

$$C(U, \theta) = \lambda C^A(U, \theta_1) + (1 - \lambda) C^B(U, \theta_2)$$

#### 4.2.2. Dependencia en la cola superior de una cópula

La dependencia en las colas es una medida de la probabilidad de eventos extremos. La dependencia asintótica en la cola se puede emplear para caracterizar las cópulas bivariantes. En el contexto de las cópulas las definiciones de dependencia en las colas se establecen de la manera siguiente (Embrechts *et al.*, 2001):

Sea  $C$  una cópula de dos dimensiones y  $\lambda_S$  su dependencia en la cola superior para la cópula

---

<sup>37</sup> En teoría, en caso de optar por una cópula paramétrica debiéramos emplear aquella que refleje lo más fielmente posible la estructura de dependencias de la cópula empírica.

<sup>38</sup> A semejanza de la cópula de Gumbel presenta dependencia en la cola superior, por lo que las distribuciones bivariantes conjuntas presentan también forma de cometa.

$$\begin{aligned}
\lambda_S &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P[X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{P[X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u)]}{Y > F_Y^{-1}(u)} \\
&= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - F_Y(F_Y^{-1}(u)) - F_X(F_X^{-1}(u)) + C(F_X(F_X^{-1}(u)), F_Y(F_Y^{-1}(u)))}{1 - F_Y(F_Y^{-1}(u))} \\
&= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}
\end{aligned}$$

Normalmente se expresa como  $\lambda_S = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u}$  donde  $\bar{C}(u, u)$  es la función de supervivencia (*survivor function*) de la cópula y cuya expresión viene dada por  $1 - 2u + C(u, u)$ . De esta forma, se dice que la cópula  $C$  tiene dependencia en la cola superior si  $\lambda_S \in (0, 1]$  y no tiene dependencia en la cola superior si  $\lambda_S = 0$ .

Por otro lado, sea  $C$  una cópula de dos dimensiones y  $\lambda_I$  su dependencia en la cola inferior para la cópula tal que exista:

$$\lambda_I = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u}$$

Se dice que la cópula  $C$  tiene dependencia en la cola superior si  $\lambda_I \in (0, 1]$  y no tiene dependencia en la cola superior si  $\lambda_I = 0$ .

### **Dependencia en las colas para cópulas bivariantes**

El creciente uso de modelos estocásticos de DFA para calcular los riesgos a los que se enfrenta una aseguradora con el fin de una adecuada gestión del capital, han impulsado el empleo de cópulas para modelizar la dependencia entre riesgos. La dependencia en las colas captura las observaciones de eventos aleatorios extremos, por lo que juega un papel muy importante en la determinación del capital necesario por una compañía. El empleo de otras técnicas para la modelización de las dependencias entre riesgos que no consideren la dependencia de eventos extremos estaría infravalorando el riesgo realmente asumido por la compañía. Fruto de esta infravaloración la empresa podría entonces llevar a cabo decisiones erróneas que podrían poner en peligro su solvencia.

Como anteriormente ya hemos introducido la dependencia en las colas al explicar cada función, en este apartado simplemente deseamos establecer un resumen de dichas dependencias para las cópulas paramétricas más frecuentemente empleadas:

- La cópula de Gumbel presenta dependencia en la cola superior para  $\alpha > 1$ , pero no en la inferior.
- La cópula de Frank no tiene dependencia ni en la cola inferior ni en la superior.
- La cópula de Clayton tiene dependencia en la cola inferior pero no en la superior.
- La cópula normal no presenta dependencia en la cola superior ni en la cola inferior.
- La cópula  $t$  de Student presenta dependencia en la cola superior e inferior.

Estas conclusiones y los valores concretos que toman la dependencia en la cola superior e inferior para cada cópula se resumen en la siguiente tabla.

Cópula	Dependencia cola superior $\lambda_S$	Dependencia cola inferior $\lambda_I$
Gumbel	$2 - 2^{1/\alpha}$ para $\alpha > 1$ 0 para $\alpha = 1$	$\lambda_I = 0$
Frank	$\lambda_S = 0$	$\lambda_I = 0$
Clayton	$\lambda_S = 0$	$\lambda_I = 2^{-1/\alpha}$
Normal	$\lambda_S = 0$	$\lambda_I = 0$
t de Student	$2t_{v+1}^{-1} \left( \frac{\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right)$	$\lambda_S = \lambda_I$

La siguiente tabla muestra los valores de dependencia en la cola superior e inferior o índices de cola para las tres cópulas archimedianas analizadas, en función de distintos valores para su parámetro  $\alpha$ .

Cópula	Gumbel		Frank		Clayton	
$\alpha$	$\lambda_S$	$\lambda_I$	$\lambda_S$	$\lambda_I$	$\lambda_S$	$\lambda_I$
1,5	0,413	0	0	0	0	0,630
2	0,586	0	0	0	0	0,707
3	0,740	0	0	0	0	0,794
4	0,811	0	0	0	0	0,841
5	0,851	0	0	0	0	0,871

En la siguiente tabla se muestra la dependencia para las distintas cópulas elípticas en función de distintos valores para el coeficiente de correlación lineal  $\rho$  y los grados de libertad  $v$  de la t de Student. Se muestran los valores del índice de cola para la cópula t de Student (el índice de la cola inferior y superior son iguales) y la columna de la derecha representa la cópula Normal (recuérdese que una t de Student con infinitos grados de libertad es una normal). Obsérvese como el índice de cola para la cópula t de Student aumenta a medida que aumenta el coeficiente de correlación lineal y a medida que decrece el número de grados de libertad.

$\rho / v$	1	2	5	10	30	$\infty$
-0,9	0,0253	0,005	3,981e-05	1,679e-08	9,936e-08	0
-0,5	0,134	0,058	0,005	1,294e-04	7,568e-11	0
0	0,2923	0,182	0,05	0,007	4,217e-08	0
0,5	0,5	0,391	0,207	0,082	0,003	0
0,9	0,776	0,718	0,595	0,463	0,211	0
1	1	1	1	1	1	1

### 4.2.3. Generación de variables correlacionadas mediante cópulas

La utilización de cópulas dentro de un modelo DFA requiere de la aplicación de un algoritmo que permita replicar cualquier estructura de dependencia entre las variables aleatorias del mismo. Así, dicho algoritmo realiza la siguiente secuencia de acciones:

- Estimar las distribuciones marginales para las  $n$  variables a correlacionar  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . El método de las cópulas permite generar variables correlacionadas para cualquier distribución marginal.
- Estimar una matriz de correlaciones por rango y seleccionar una cópula  $C$   $n$ -dimensional consistente con la matriz seleccionada.
- Simular un vector de variables uniformemente distribuidas  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  que tengan por distribución conjunta la cópula  $C$ .<sup>39</sup>
- Calcular la muestra correlacionada usando las distribuciones marginales aplicando el método de la inversa de la función de distribución, es decir,  $u_i = F_i^{-1}(u_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Como resultado de este proceso obtenemos un vector  $(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))$  que tienen como distribuciones marginales  $F_1, F_2, \dots, F_n$  y la matriz de correlaciones por rango establecida.

En el caso de emplear una cópula empírica procederíamos de la siguiente forma. Sea  $X$  el vector que engloba a las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con distribuciones marginales  $F_1, F_2, \dots, F_n$  para generar variables correlacionadas mediante la cópula empírica se aplica el siguiente algoritmo:

- Seleccionamos de forma aleatoria un vector de datos históricos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- Mediante las funciones de distribución empíricas transformamos cada componente del vector en una variable uniforme:  $u_i = F_{Empi}^{-1}(x_i)$ .
- El vector de uniformes  $(0, 1)$   $(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))$  tienen como estructura de dependencia la cópula empírica.

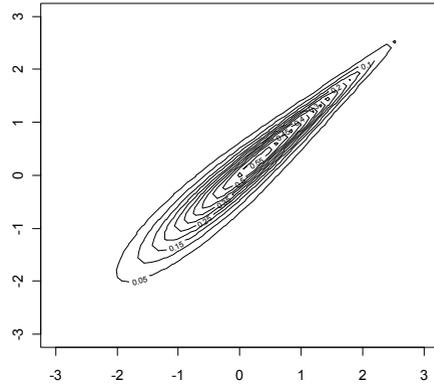
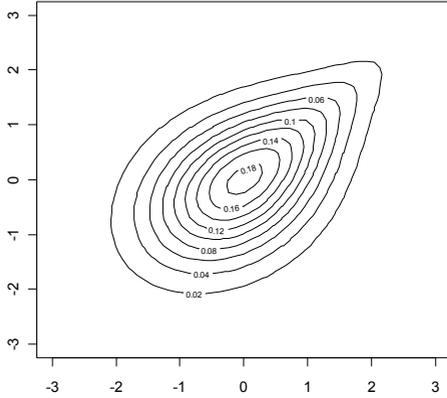
En los siguientes gráficos se muestran los resultados de emplear distintas cópulas bivariantes para generar dependencia en dos variables  $N(0;1)$ . Se muestran dos simulaciones para cada tipo de cópulas, en donde en la ilustración de la derecha se aumenta la dependencia entre ambas distribuciones. Para la cópula de Gumbel se aprecia su forma de cometa, la cópula de Clayton provoca una dependencia en forma de cometa invertida, mientras que la cópula de Frank no genera dependencia entre las colas mostrando una forma que se vuelve más ovalada a medida que aumenta la relación entre las variables. Posteriormente se aplica una estructura de dependencia generada a través de una cópula normal y una  $t$  de Student. Se ob-

---

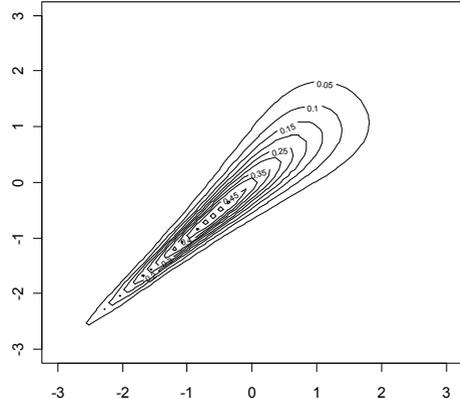
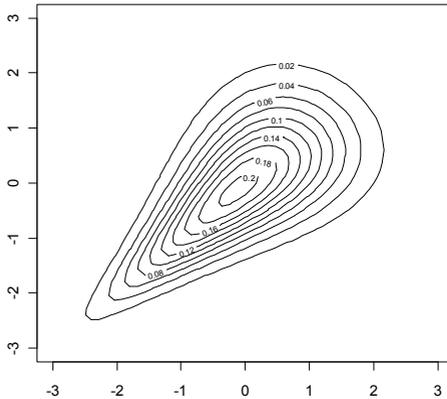
<sup>39</sup> En el caso de las cópulas elípticas en vez de generar uniformes se pueden generar normales estandarizadas  $N(0,1)$ .

serva como la forma del gráfico se va aplanando a medida que se aumenta el coeficiente de correlación lineal. Además, en el caso de la cópula  $t$  de Student también se muestra el efecto del aumento de grados de libertad de la cópula, en cuyo caso el gráfico se asemeja a más a la normal.

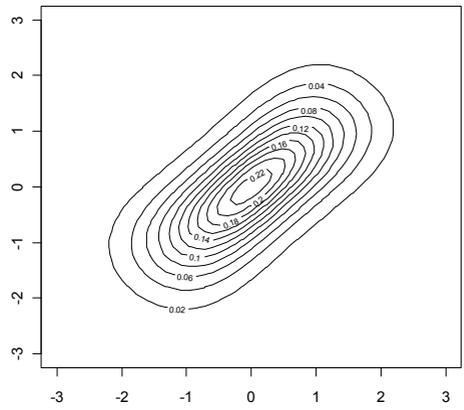
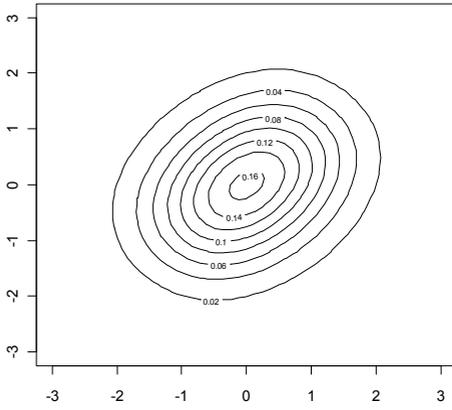
### Cópula de Clayton



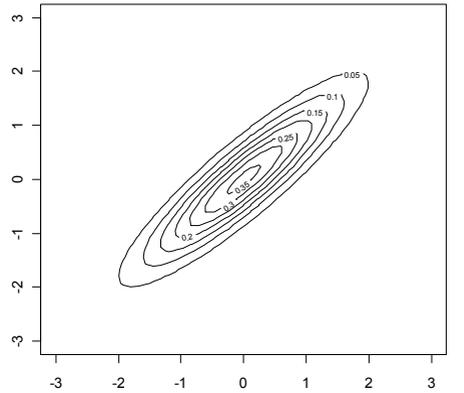
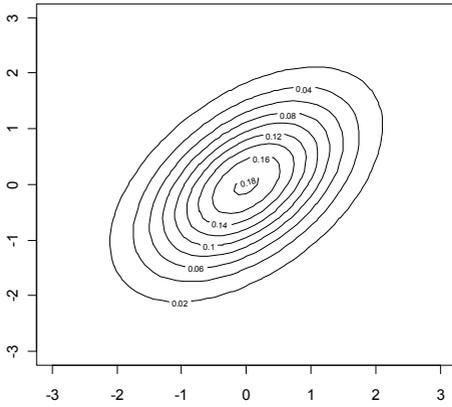
### Cópula de Gumbel



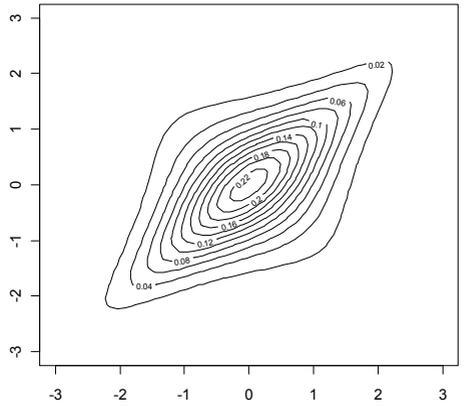
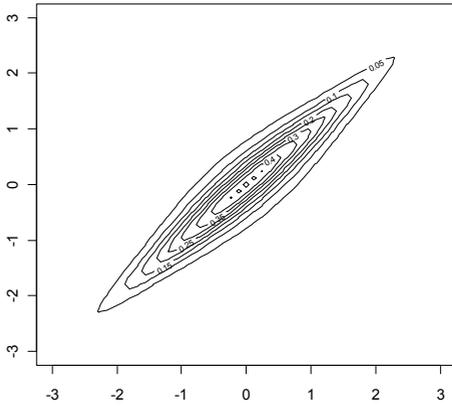
### Cópula Frank



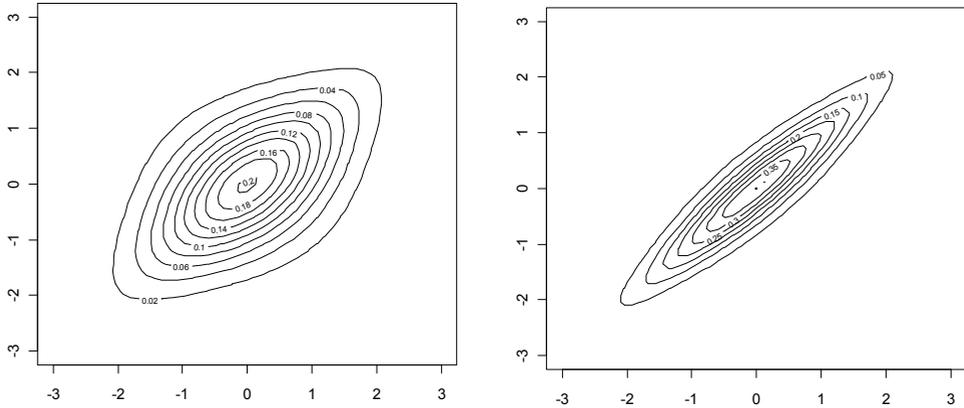
### Cópula Normal



### Cópula t de Student



### Cóputa $t$ de Student (aumento de grados de libertad)



#### 4.2.4. Estimación de cópulas

Antes de generar variables correlacionadas mediante cópulas debemos estimar los parámetros de las distribuciones marginales de mejor ajuste a los datos univariantes, y los parámetros de la cópula que mejor represente la estructura de dependencia empírica entre las variables. Para estimar los parámetros de las cópulas existen principalmente dos métodos: el método de máxima verosimilitud (MLE) y la inferencia de funciones para las marginales (IFM). Además, también se pueden emplear el método de estimación de parámetros basado en las medidas de dependencia o método de Genest y Rivest (1993) y el método CML. En los trabajos de Genest y Rivest (1993), Joe (1997), Frees y Valdez (1998), Klugman y Parsa (1998), Durrleman *et al.* (2000), De Matteis (2001) y Cherubini *et al.* (2004) se aborda la estimación de las cópulas.

Los métodos MLE y IFM maximizan las funciones de máxima verosimilitud. El método MLE estima los parámetros de las cópulas y de las funciones de distribución marginales de forma simultánea. Por la contra el método IFM es un proceso en dos etapas, que en una primera etapa maximiza la función de máximo verosimilitud de las funciones marginales y, en la segunda etapa utiliza estos parámetros estimados para maximizar la función de máximo verosimilitud de la cópula, obteniendo así sus parámetros. A continuación, describiremos los distintos métodos de estimación de las cópulas, para posteriormente analizar brevemente la bondad del ajuste de la estimación.

##### A. Método de máxima verosimilitud (MLE)

El método MLE maximiza la función de máxima verosimilitud de la muestra basándose en datos multivariantes. En el caso  $n$ -dimensional donde los parámetros de la distribución marginal para la variable  $i$ -ésima se denota por  $\theta_i$  y el vector de parámetros de dependencia para la cópula se denota como  $\theta_d$ . La función de densidad

multivariante es  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d)$ , esta función puede ser escrita en términos de la cópula como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1, \theta_1), \dots, F_n(x_n, \theta_n); \theta_d) \prod_{i=1}^n f_i(x_i, \theta_i)$$

Siendo  $f_i$  la función de densidad de  $F_i$  y  $c$  la función de densidad de la cópula que viene dada por la expresión:

$$\frac{d C(u_1, \dots, u_n; \theta_d)}{d u_1, \dots, u_n}$$

En el caso de  $K$  observaciones independientes de  $n$  variables aleatorias  $(x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$  para  $t = 1, 2, \dots, K$  la función de máxima verosimilitud viene dada por la expresión:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d; x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t) = \sum_{t=1}^T f(x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$$

Por lo que el logaritmo de la función de máxima verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d; x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t) \\ = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i)) + \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); \theta_d) \end{aligned}$$

Donde el conjunto de parámetros de las distribuciones marginales univariantes y de la cópula es  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d\}$ . Para obtener los parámetros estimados de  $\theta$  por el método de MLE, debemos maximizar la función de log-maximoverosimilitud dados los datos de la muestra, es decir,  $\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta} \log L(\theta)$ .

### B. Método de inferencia de funciones para las marginales (IFM)<sup>40</sup>

El método IFM (*Inference Functions for Margins*) es un método en dos etapas en el que la estimación de los parámetros de las distribuciones marginales se realiza en la etapa primera, mientras que la estimación de los parámetros de dependencia de la cópula se realiza en la segunda. La ventaja de este método sobre el método MLE, es que al dividir el proceso en dos etapas se consigue generalmente estimar los parámetros en un menor tiempo. El logaritmo de la función de máxima verosimilitud de una muestra viene dado como mencionamos con anterioridad por la expresión:

$$\begin{aligned} \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_d; x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t) \\ = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i)) + \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); \theta_d) \end{aligned}$$

<sup>40</sup> Su nombre proviene de McLeish y Small (1988). Véase también Joe y Xu (1996).

Dicha función está formada por la suma dos componentes. El primer término  $\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i))$  se refiere sólo a los parámetros de las distribuciones marginales univariantes ( $\theta_i$ ). El segundo término  $\sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); \theta_d)$  implica tanto los parámetros de dependencia de la cópula  $\theta_d$  como los parámetros de las distribuciones marginales univariantes ( $\theta_i$ ).

Por lo tanto, el método IFM realiza las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros  $\theta_i$ , a lo que denoramos como  $\hat{\theta}_i$ , maximizando el primer término de la función de log-máxima verosimilitud, es decir<sup>41</sup>:

$$\hat{\theta}_{1,2,\dots,n} = \arg \max_{\theta_i} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln(f_i(x_i^t, \theta_i))$$

En la segunda etapa se maximiza el segundo término de la función de log-máxima verosimilitud, obteniendo así el parámetro de dependencia de la cópula. Para realizar esta maximización se toma como datos los  $\hat{\theta}_{1,2,\dots,n}$  estimados en la etapa anterior, es decir:

$$\hat{\theta}_d = \arg \max_{\theta_d} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t, \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^t, \hat{\theta}_n); \theta_d)$$

### C El método CML (Canonical Maximum Likelihood method)

El método CML es un método en dos etapas similar al IFM. La diferencia entre los métodos reside en que el método IFM es paramétrico mientras que el método CML es no paramétrico. De esta forma, mientras en la primera etapa el método IFM realiza la estimación de los parámetros de las distribuciones marginales, en el método CML no se realizan hipótesis acerca de la forma paramétrica de dichas distribuciones empleándose por el contrario las distribuciones empíricas.

### D. Método de Genest y Rivest (1993)

El método de Genest y Rivest es una técnica no paramétrica para estimar el parámetro de una cópula que no considera las distribuciones marginales de las variables aleatorias, sino que estima el parámetro en una etapa empleando la tau de Kendall. Este método de estimación sólo puede ser empleado para cópulas bivariantes y que tengan un sólo parámetro. En este caso, existen para algunas cópulas soluciones analíticas que permiten estimar el parámetro simplemente como función de alguna medida de dependencia.

Una cópula Arquimediana tiene la forma  $C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$  y está únicamente determinada por la función definida en el intervalo  $[0, 1]$   $K_\phi = z - \frac{\phi(z)}{\phi'(z)}$ .

<sup>41</sup> Estos parámetros también son útiles en el caso de una estimación conjunta mediante MLE como valores iniciales en una rutina de optimización.

Además, la *tau de Kendall* se puede calcular para una cópula Arquimediana mediante la expresión  $\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(z)}{\phi'(z)} dt$ . Por lo tanto, el método de Genest y Rivest (1993) consiste en estimar a partir de la muestra de datos la *tau de Kendall*,  $\hat{\tau}$ , y resolver la ecuación  $\hat{\tau} = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(z)}{\phi'(z)} dt$ . Dado que  $\phi(z)$  es una función del parámetro de la cópula obtenemos la estimación de dicho parámetro.

Para el caso de la cópula de Clayton una vez estimado la *tau de Kendall*  $\hat{\tau}$  empleamos la expresión  $\hat{\tau} = \alpha/(\alpha + 2)$  y que  $\alpha = 2\tau/(1 - \tau)$ . Por lo que, por ejemplo, si  $\hat{\tau} = 0,71428$  el parámetro de la cópula tomará el valor  $\hat{\alpha} = 5$ . Para la cópula de Gumbel  $\hat{\tau} = 2 - 2^{1/\alpha}$ , por lo que la estimación del parámetro de la cópula se consigue a través de la expresión  $\alpha = (1 - \tau)^{-1}$ . Isaacs (2003) emplea este método para el ajuste de una cópula Gumbel a los *loss ratios* de varias líneas de negocio para la modelización de la siniestralidad en el contexto de un modelo DFA. De Matteis (2001) proporciona las relaciones para 20 familias de cópulas Arquimedianas, en donde varias de ellas no tienen expresión analítica.

El método de estimación basado en medidas de dependencia puede ser empleado para cópulas que no sean Arquimedianas y que tengan sólo un parámetro, como por ejemplo, la cópula normal. La cópula normal puede ser estimada a través del coeficiente de correlación de Spearman o de la *tau de Kendall*. Dado que  $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$  entonces  $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\tau}\right)$ . De forma análoga como  $r_{ho} = \frac{6}{\pi} \arcsen(\rho/2)$  entonces  $\rho = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} r_{ho}\right)$ .

### E. Bondad del ajuste

Estimados los parámetros de las distribuciones marginales y de la cópula, se deben analizar la bondad del ajuste a los datos de la muestra. Para ello son aplicables los test de bondad de ajuste, el criterio AIC y las herramientas gráficas que se describirán a continuación en este trabajo, pero adaptados al contexto de las cópulas. En este sentido se definen medidas de diferencias entre la cópula empírica y la cópula estimada. El lector interesado en la revisión de los métodos de bondad e ajuste de una cópula puede referirse a Frees y Valdez (1998), Durrleman *et al.* (2000), de Matteis (2001) o Venter (2002).

## 5. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE Y SELECCIÓN DE MODELOS

En los modelos DFA deben realizarse proyecciones sobre distintas variables como la siniestralidad, los rendimientos de las inversiones, etc. Un método frecuentemente empleado es el ajuste de dichas variables a distribuciones paramétricas y su posterior simulación. Para realizar un ajuste de datos a una distribución se parte de un conjunto de observaciones, de forma que podamos estimar las propiedades de la población a la que pertenecen. En esta etapa inicial se puede emplear un filtro para ignorar datos atípicos o extremos siguiendo un criterio especificado, o

por el contrario, puede ser útil tener en consideración toda la muestra. Otra medida que se puede tomar antes de realizar el ajuste es la de especificar ciertos límites superior e inferior a las distribuciones a estimar.

Para realizar la estimación de parámetros de las distribuciones, podemos seleccionar la distribución de mejor ajuste o bien optar por distribuciones que a nivel teórico se ajustan al fenómeno que se pretende explicar y simular. Un claro ejemplo de este proceso lo obtenemos en la tradicional modelización de la siniestralidad. Mediante la obtención de las distribuciones del número de siniestros y de la cuantía de éstos se simula la siniestralidad futura de la compañía. Las distribuciones comúnmente empleadas, por tener generalmente un buen ajuste a los datos históricos son las de Poisson, Binomial o Binomial negativa para el número de siniestros y la distribución Lognormal, Pareto o Gamma para la cuantía de los siniestros.

Para la proyección de una variable estocástica en un modelo DFA mediante el ajuste a una distribución, se debe revisar la bondad del ajuste de las distintas distribuciones y elegir aquella que cumpla mejor determinados criterios de selección. El análisis de la adecuación de un determinado tipo de distribución ha de realizarse a través del nivel de ajuste a los datos observados. Dicho contraste se puede realizar a través de pruebas informales y pruebas formales.

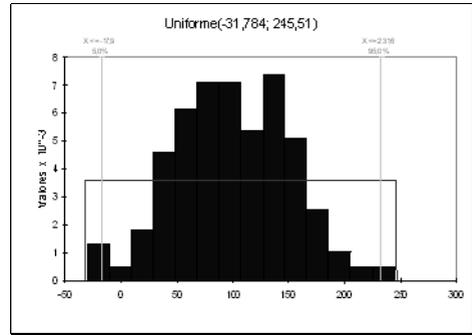
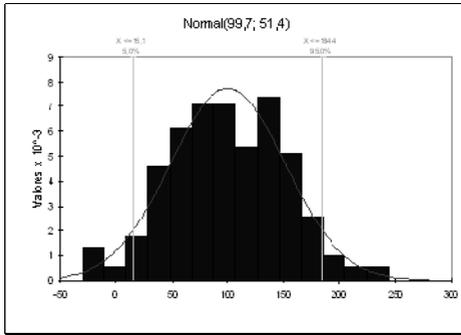
#### *A. Pruebas informales*

Supongamos que tenemos una muestra de valores de la variable  $X$  generados a partir de una distribución desconocida, por lo que ajustamos dichos datos a distintas distribuciones candidatas y deseamos evaluar su ajuste. Existen una serie de pruebas informales o técnicas no paramétricas que comparan la distribución de los datos observados con la del modelo ajustado y que nos permiten una primera aproximación al problema. Entre estas pruebas informales destacan: los gráficos de coincidencia o superposición, el gráfico QQ, el gráfico PP, el gráfico de medias y la tabla de medidas relevantes.

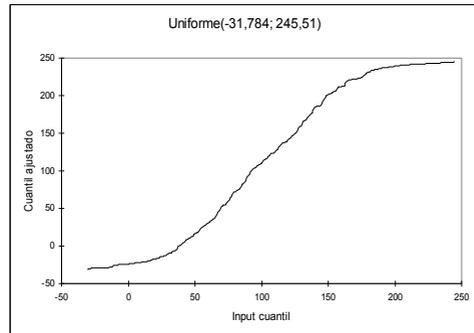
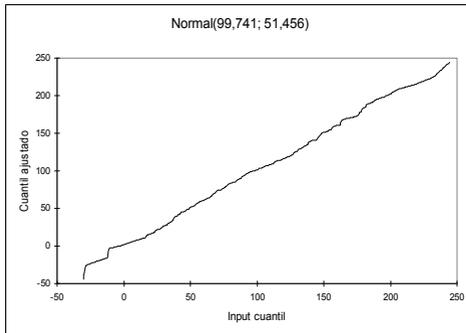
1. Gráfico de coincidencia de la función de densidad teórica de la distribución propuesta sobre el histograma de los datos observados. Esta prueba consiste en representar en el mismo gráfico las frecuencias absolutas empíricas frente a las teóricas permitiendo una comparación visual. Sí los puntos del gráfico caen aproximadamente sobre el histograma entonces el hipotético modelo es apropiado. Este gráfico permite apreciar si la distribución teórica coincide con la proporcionada por los datos, tanto de forma global como por áreas específicas (coincidencia alrededor de la media o de los extremos, etc.). A continuación se muestran dos gráficos de coincidencia o superposición. En el gráfico de la izquierda mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos y en la derecha una distribución con mal ajuste<sup>42</sup>.

---

<sup>42</sup> En los sucesivos ejemplos se muestran de forma comparativa el ajuste a unos 200 datos generados a través de una Normal (100,50), mediante dos distribuciones ajustadas a dichos valores: la Normal



2. Análisis de los gráficos QQ (*Quantile-Quantile* o *QQ plots*). El gráfico QQ es un tipo de gráfico que representa los valores de los cuantiles de la distribución de datos empírica en comparación con los valores de los cuantiles de la función de distribución teórica. Si el ajuste proporcionado por la distribución analizada es bueno, dicho gráfico se aproximará al de una línea recta que parta del origen con un ángulo de 45°. A continuación se muestran dos gráficos QQ. En el gráfico izquierda mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos (línea casi recta) y en el gráfico de la derecha una distribución con mal ajuste.



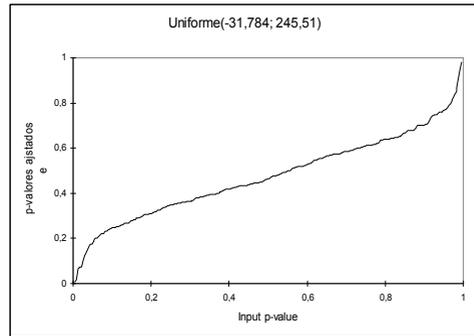
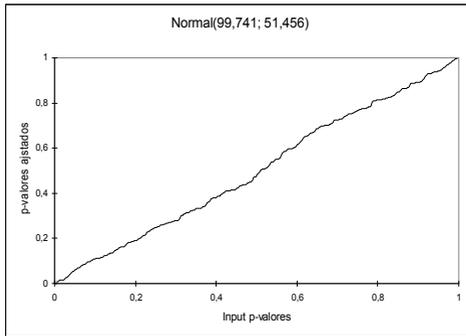
3. Gráficos PP (*Probability-Probability* o *PP Plots*)<sup>43</sup>. El gráfico PP muestra la probabilidad empírica acumulada en comparación con la probabilidad teórica acumu-

---

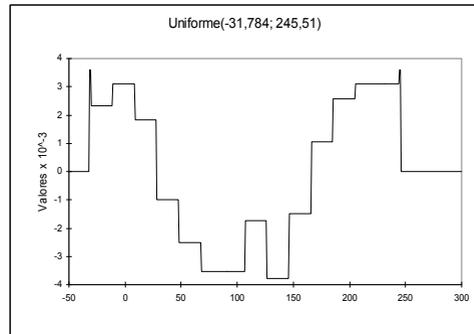
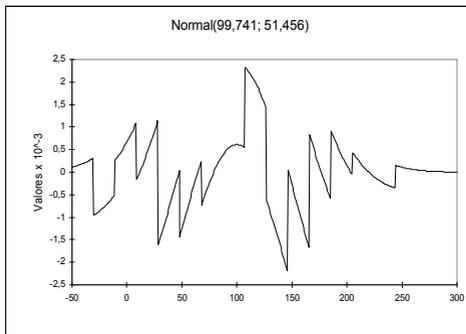
(99,7; 51,4) frente a una Uniforme (-31,78;245,51). El ejemplo sólo tiene interés ilustrativo, ya que las distribuciones empleadas para el ajuste presentan obviamente un buen ajuste y un mal ajuste respectivamente. En la práctica es más difícil esta diferenciación, por lo que se emplean los métodos formales.

<sup>43</sup> El gráfico se crea seleccionando  $n$  valores de nuestra variable  $x$  de forma  $0 < x_1 < \dots < x_n$ . Después cada punto se dibuja para cada valor  $(F_n(x), F(x))$ . Es común establecer intervalos de confianza para un nivel del 95%.

lada esperada bajo la hipótesis de que los datos siguen una distribución específica. Si el ajuste proporcionado por la distribución es bueno el gráfico será, como en el caso del gráfico QQ, casi una línea diagonal. A continuación se muestra dos gráficos PP, en el de la izquierda mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos, y en la derecha una distribución con mal ajuste.



4. Gráfico de diferencias. Es un gráfico donde se muestra el error absoluto  $D(x)$  entre la distribución teórica  $F(x)$  y la función de distribución empírica  $F_n(x)$ . Por lo tanto, representa la función  $D(x) = F_n(x) - F(x)$ . A continuación se muestra dos gráficos de diferencias. En el gráfico de la izquierda<sup>44</sup> mostramos una distribución con buen ajuste a los datos empíricos ya que los errores absolutos se distribuyen aleatoriamente sobre el valor cero, y en la derecha una distribución con mal ajuste ya que los errores absolutos no muestran aleatoriedad<sup>45</sup>.



<sup>44</sup> Una vez calculada la diferencia vertical entre las dos funciones es útil representar intervalos de confianza al 95%, de modo que un modelo será satisfactorio en la medida en que sus diferencias permanezcan dentro de los límites.

<sup>45</sup> Debe observarse un cambio en la escala del eje vertical (Error absoluto) que varía de  $-2,5$  a  $2,5$  en el gráfico de la izquierda y de  $-4$  a  $4$  en el de la derecha.

5. Comparar medidas relevantes. La última prueba informal consiste en comparar las medidas de posición y dispersión empíricas (medias, desviaciones típicas, varianzas, cuantiles, etc.) de la variable  $X$  con las obtenidas de la distribución propuesta. Este método nos permite decir si por término medio las variables se comportan de igual manera (medias muy similares), analizar la variabilidad de los datos empíricos frente a los de la distribución teórica (medidas de dispersión) y la bondad del ajuste a los extremos (comparando valores elevados de  $p$  para los cuantiles).

### B. Pruebas formales

Las pruebas informales permiten una primera aproximación para analizar la bondad de ajuste de una distribución a una muestra. Sin embargo, existen diferentes pruebas estadísticas para verificar el ajuste de los datos a una distribución de probabilidad. Las más utilizadas son el contraste  $\chi^2$  de Pearson, el test de Kolmogorov-Smirnov, el test de Anderson-Darling y el Cramer-Von Mises (CVM)<sup>46</sup>.

1. Test Chi cuadrado de bondad de ajuste. El test Chi cuadrado se utiliza para comprobar formalmente si una muestra de datos proviene de una población con una determinada distribución. Para calcular el estadístico  $\chi^2$ , primero se deben agrupar los datos en intervalos y posteriormente se emplea la siguiente fórmula para cada distribución:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde  $k$  es el número de intervalos,  $N_i$  es el número de observaciones que hay en el intervalo  $i$  y  $E_i$  es el número de observaciones que se esperan que haya en ese intervalo<sup>47</sup>.

Uno de los inconvenientes del estadístico Chi cuadrado es que no existe una regla precisa sobre la selección del número y localización de los intervalos, pudiendo alcanzarse diferentes conclusiones a partir de unos mismos datos dependiendo de cómo se establezcan los intervalos. En la práctica es común el empleo de compartimentos equiprobables (Mann y Wald, 1942 o Cohen y Sackrowitz, 1975). Una modificación sobre este agrupamiento es establecida por Schorr (1974) que fija el número de intervalos en  $2n^{0.4}$  siendo  $n$  el tamaño muestral<sup>48</sup>.

---

<sup>46</sup> Existen otros test específicos comúnmente empleados para probar la normalidad de una serie de datos como el de Jarque-Bera, Shapiro-Wilk, D'Agostino, Kolmogorov-Smirnov-Lilliefors, etc.

<sup>47</sup> Se calcula como producto del número total de datos observados y la probabilidad acumulada existente en cada intervalo.

<sup>48</sup> El software BestFit de Palisade permite que estos intervalos se establezcan de forma equiprobable (*equal probability binning*), intervalos de igual longitud (*equal interval binning*) o establecidos por el usuario (*custom binning*).

Otra desventaja de la prueba de Chi cuadrado es que se requiere un tamaño muestral suficiente para que la aproximación sea válida, en general, que la frecuencia esperada de cada intervalo sea mayor a 5.

El test Chi cuadrado se define entonces de la siguiente forma:

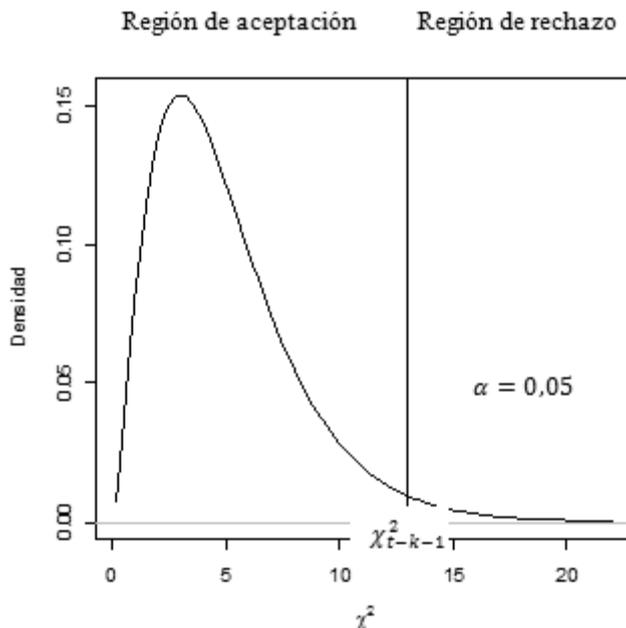
$H_0$ : Los datos siguen la distribución especificada

$H_1$ : Los datos no siguen la distribución especificada

Dicho test sigue aproximadamente, una distribución  $\chi^2$  con  $k-t-1$  grados de libertad, donde  $t$  es el número de parámetros estimados. El test se puede realizar mediante los valores críticos una vez establecido el nivel de significatividad alfa. Entonces calculamos el valor de la distribución Chi cuadrado, de forma que (véase el siguiente gráfico):

Si  $\chi^2 > \chi_{k-t-1}^2 \Rightarrow$  Rechazamos la hipótesis de que los datos provienen de una distribución especificada

Si  $\chi^2 \leq \chi_{k-t-1}^2 \Rightarrow$  Aceptamos la hipótesis de que los datos provienen de una distribución especificada



Otra forma de realizar el test es por medio de los  $p$ -valores. Una vez calculado el estadístico  $\chi^2$ , se debe aplicar a la distribución Chi Cuadrado definida sobre el valor obtenido para obtener el  $p$ -valor. Se acepta el modelo si el  $p$ -valor obtenido

es mayor a un nivel de significatividad alfa empleado, siendo común emplear el 5% o 1%. La regla que se emplea es la siguiente:

Si  $p - \text{valor} \geq \text{alfa} \Rightarrow$  Aceptamos la hipótesis de que los datos provienen de una distribución especificada

Si  $p - \text{valor} < \text{alfa} \Rightarrow$  Rechazamos la hipótesis de que los datos provienen de una distribución especificada

Este test descartará la distribución 1 y/o 2 si el  $p$ -valor obtenido es menor que un nivel de significatividad alfa exigido. De forma análoga, este test recomendará la distribución cuyo  $p$  valor sea superior al nivel de significatividad exigido, ya que cuanto más cerca esté el  $p$ -valor de cero, menor será la confianza en que la distribución ajustada pueda generar el grupo de datos empíricos.

3. Estadístico Kolmogorov- Smirnov (K-S). Es un estadístico para medir la bondad de ajuste de datos que no requiere el establecimiento de intervalos, lo cual hace que sea menos arbitrario que el Chi cuadrado. Otra ventaja es que se trata de una prueba exacta, a diferencia del test Chi cuadrado que depende del adecuado tamaño de la muestra para que la aproximación sea válida. Los principales inconvenientes del test K-S es que sólo es válido para datos de muestra continuos y que tiende a ser más sensible al centro de la distribución, por lo que se dice que no detecta muy bien discrepancias en los extremos.

Antes de seguir explicando el test debemos introducir el denominado Teorema Fundamental de la Estadística o Teorema de Glivenko-Cantelli que se enuncia de la siguiente forma: Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una sucesión de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución  $F(x)$ , y sea  $F_n(x)$  la función de distribución empírica para la muestra de tamaño  $n$ , es decir:

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n 1_{(x_i, +\infty)}(x) = \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x)}(x_i)$$

El teorema muestra una fuerte proximidad cuando  $n$  tiende a  $\infty$  entre  $F(x)$  y  $F_n(x)$ , es decir:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Entonces si tenemos una muestra de  $n$  valores provenientes de una distribución podemos realizar una prueba de bondad de ajuste a través del denominado estadístico K-S. El test Kolmogorov- Smirnov se define entonces de la siguiente forma:

Ho: Los datos siguen la distribución especificada

H1: Los datos no siguen la distribución especificada

Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una muestra de tamaño  $n$  de una variable aleatoria continua  $X$  con función de distribución empírica  $F_n(x)$ . El test K-S es un test no paramétrico basa-

do en la función de distribución empírica (*empirical cumulative distribution function*, ECDF). El estadístico o la distancia K-S se define como la mayor distancia entre la función de distribución empírica  $F_n(x)$  y la función de distribución esperada  $F(x)$  (*expected EDF*) bajo la hipótesis nula  $H_0$ . Formalmente:

$$D_n(F) = \sup_x |F_n(x) - F(x)| = \max[D_n^+(F), D_n^-(F)]$$

Siendo:

$$D_n^+(F) = \sup_x [F_n(x) - F(x)] = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F(x) - \frac{i-1}{n} \right)$$

$$D_n^-(F) = \sup_x [F(x) - F_n(x)] = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{i}{n} - F(x) \right)$$

Por lo que podemos resumir que la distancia de K-S es:

$$D_n(F) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( F(x) - \frac{i-1}{n}; \frac{i}{n} - F(x) \right)$$

Los valores críticos para el test K-S dependen de la distribución específica que se esté testando, sin embargo existen algunas tablas para ciertas distribuciones que se han calculado empleando el método de Monte Carlo. El contraste de hipótesis es de una sola cara, y la hipótesis de que la distribución es de una forma específica es rechazada si  $D_n(F)$  es mayor que el valor crítico.

3. Estadístico Anderson-Darling (A-D). Este estadístico de ajuste sólo se puede usar con datos de muestra continuos y, al igual que en el K-S, no es necesaria la creación de intervalos. El test A-D es una modificación del test K-S, ya que usa una medida distinta de diferencia entre las distribuciones teóricas y empíricas, proporcionando un mayor peso a las colas. En este sentido el test A-D destaca las diferencias entre los extremos de la distribución ajustada y los datos observados. En el test K-S los valores críticos no dependen de la distribución específica que se esté ajustando, por el contrario el test de Anderson-Darling sí que utiliza la distribución concreta en el cálculo de los valores críticos. La principal ventaja es que permite un test más sensible a las colas, sin embargo, tiene el inconveniente de que los valores deben ser calculados para cada distribución. El estadístico viene dado por:

$$A_n^2(F) = n \int_0^{\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)[1 - F(x)]} dF(x)$$

A efectos prácticos el estadístico de de Anderson-Darling se calcula como:

$$A_n^2(F) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_i) + \ln [1 - F(x_{n-i+1})] \}$$

Los valores críticos para el test A-D dependen de la distribución específica que se esté probando, por lo que los valores deben ser simulados para cada hipótesis nula.

El contraste de hipótesis es de una sola cara, y la hipótesis de que la distribución es de una forma específica es rechazada si  $A_n^2$  es mayor que el valor crítico.

4. Test de Cramer-Von Mises (CVM). El test A-D pertenece a la familia de test cuadráticos generales, que vienen definidos para una función de ponderación  $w$  según la siguiente expresión:

$$Q_n(F) = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 w[F(x)] dF(x)$$

En el caso del test A-D la función de ponderación empleada es  $w[F(x)] = \frac{1}{F(x)[1-F(x)]}$ . Otro test derivado de esta familia de test cuadráticos es el test de Cramer-Von Mises (CVM) que se corresponde con la función  $w[F(x)] = 1$ , dando como resultado:

$$W_n^2(F) = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x)$$

A efectos prácticos el estadístico de Cramer-Von Mises se calcula como:

$$W_n^2(F) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F(x) - \frac{2i-1}{n} \right]^2$$

Como resumen de los cuatro test analizados es útil advertir que los test K-S, A-D y CVM no realizan ajuste en función del número de parámetros de la función que se ajusta, pudiendo dar como resultado que modelos más complejos o con mayor número de parámetros realicen un mejor test. Por el contrario, el test Chi-Cuadrado realiza un ajuste a través de los grados de libertad del estadístico. Los cuatro test son sensibles al tamaño muestral de forma que si la muestra aumenta, o el valor crítico se reduce o el estadístico aumenta bajo falsedad de la hipótesis nula del test.

La selección entre las distintas distribuciones suele realizarse utilizando el principio de parsimonia, es decir, será preferible una distribución más sencilla a otra más compleja siempre y cuando el ajuste a los datos históricos sea similar. En el caso de que las distribuciones tengan el mismo número de parámetros, se suele utilizar como criterio de comparación el valor de la función de log-verosimilitud. Si por el contrario, las distribuciones presentan un número diferente de parámetros, será preciso utilizar criterios que tengan en consideración este aspecto. En concreto, en este apartado se tienen en cuenta los criterios AIC (*Akaike information criteria*) propuesto por Akaike (1973); el criterio SBC (*Schwarz criteria*) propuesto por Schwarz (1978) y el test de cociente de verosimilitudes (LRT). Estos tres criterios no son sólo útiles como pruebas de bondad de ajuste de distintas distribuciones, sino que pueden también ser empleados para modelos estadísticos o econométricos empleados en DFA, como por ejemplo los realizados para la modelización de series temporales.

5. Test de cociente de verosimilitudes (*Likelihood Ratio Test* o *LRT*). El test de la ratio o razón de verosimilitud (véase por ejemplo Klugman *et al.*, 2008a) se puede

emplear para comparar distintas distribuciones (o modelos) en el caso de que se consideren versiones reducidas o casos especiales de otras más complejas. El LRT se emplea cuando una distribución con  $k_1$  parámetros es un caso especial de otra con  $k_2$  parámetros, siendo  $k_2 > k_1$ . Este test tiene como estadístico  $T = 2(l_2 - l_1) = 2(l_2/l_1)$  que se distribuye como una  $\chi^2$  con un número de grados de libertad de  $k_2 - k_1$ . La hipótesis nula del test es que no se produce una mejora significativa del empleo de la distribución más compleja.

6. *El criterio de Akaike (AIC)*. El criterio AIC selecciona la distribución (o modelo econométrico) que toma mayor valor de la diferencia entre la función de log-verosimilitud bajo la distribución  $j$ -ésimo y su número de parámetros, es decir  $l_j - k_j$ . Bajo el criterio de Akaike, cada distribución con un parámetro adicional debe aumentar la función de log-verosimilitud en al menos uno. A veces el AIC se calcula como:  $AIC = -\frac{2l}{T} + \frac{2k}{T}$ , siendo  $T$  el número de observaciones después de los ajustes, y en cuyo caso la selección de distribuciones alternativas se basa en la elección del menor valor de AIC.

7. *Criterio de información bayesiano (SBC)*. El criterio de información bayesiano o criterio bayesiano de Schwarz (1978), proporciona un método para distinguir entre distribuciones simples y complejas (o modelo econométricos), de forma que el criterio recomienda la selección de la distribución con mayor puntuación establecida a través de la siguiente fórmula  $l - \left(\frac{k_j}{2}\right) \ln n$ , siendo  $l$  el logaritmo de la función de verosimilitud en su máximo,  $k_j$  el número de parámetros estimados y  $n$  el tamaño muestral. De esta forma a través de  $k_j$  se establece una penalización a las distribuciones con mayor número de parámetros, teniendo además en cuenta el tamaño muestral. De forma similar al AIC, es frecuente que en algunos programas estadísticos el SBC se calcule como  $SBC = -\frac{2l}{T} + \frac{k_j \ln T}{T}$ .

A modo de conclusión debe establecerse que ninguna de las herramientas para el ajuste de modelos puede evaluarse de forma aislada. Se recomienda el empleo de todas ellas aprovechando así las ventajas y reduciendo las debilidades de cada técnica. Por eso, siguiendo a Klugman y Rioux (2006) se recomienda el ajuste de modelos mediante los siguientes pasos. Primero, construir gráficos que permitan una aproximación visual al ajuste entre modelos. Segundo, realizar los test de contraste de hipótesis. Tercero, el empleo de test que tengan en cuenta el número de parámetros del modelo y el tamaño de la muestra.

## 6. TEORÍA DEL VALOR EXTREMO (EVT)

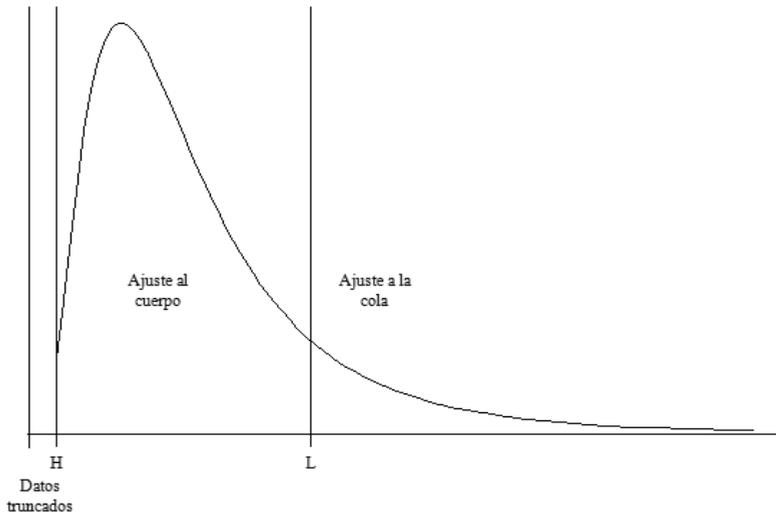
La Teoría del Valor Extremo (*Extreme Value Theory*, EVT) está cobrando más importancia en la gestión del riesgo de las compañías aseguradoras, y en especial en la modelización de la cuantía de los siniestros, aspecto en el que nos centraremos en este capítulo. Sin embargo, su campo de acción se extiende a la modeli-

zación de otras variables estocásticas como los eventos de riesgo operativo o los rendimientos alcanzados por los activos. Tradicionalmente se ha empleado una única distribución para ajustar un conjunto de observaciones empíricas. La principal carencia de este método es la asunción de que todos los valores de la variable que estamos analizando se ajustan a la misma distribución. Por eso, pese al tradicional ajuste a distribuciones de cola gruesa (Lognormal, Pareto, Burr, etc.), este método puede implicar una subestimación del riesgo asumido. Esta es la razón por la que es conveniente distinguir o clasificar los riesgos en función de sus cuantías en: riesgos de masa y riesgos de cola. Los riesgos de masa (*“small claims”*) son riesgos con consecuencias económicas o severidad baja pero alta frecuencia, mientras que los riesgos de cola (*“large claims”*) son riesgos con baja frecuencia pero elevado coste económico. Para obtener la distribución de probabilidad total de los riesgos, se deben agregar los riesgos de masa y de cola<sup>49</sup>.

De forma general, se puede establecer un valor límite (*threshold*) que divida las distribuciones en dos partes: el cuerpo y la cola. De esta forma las pérdidas inferiores (superiores) a ese límite especificado pertenecen al cuerpo (cola) de la distribución. Las pérdidas más relevantes son las que pertenecen a la cola de la distribución, porque son pérdidas extremas y que afectan de forma particular al capital necesario. Cuando se realiza un ajuste paramétrico del conjunto de datos a una única distribución, los datos centrales o no extremos determinan en gran medida la distribución, no proporcionando un buen ajuste a las pérdidas extremas. Además, a veces una compañía está sólo interesada en el comportamiento o distribución de las grandes pérdidas, como por ejemplo en el caso del reaseguro donde el asegurador sólo efectúa el pago en caso de que los siniestros excedan cierto valor límite. Una solución obvia para este problema es centrarse en los extremos y ajustarlos a una distribución, para lo que se utiliza la Teoría del Valor Extremo (EVT). De esta forma, se consigue un mejor ajuste a los datos reales mediante una combinación de distribuciones como se puede ver en el gráfico siguiente. La distribución resultante está truncada a la izquierda dado que no se recogen o registran pérdidas menores a esa cantidad  $T$ , ajusta el cuerpo de la distribución a una distribución de cola media (Lognormal, Gamma, etc.) hasta un límite  $L$ . A partir de esa cantidad de severidad, lo que denominamos la cola, el ajuste se realiza a través de una distribución de valor extremo (Distribución Generalizada de Pareto o GPD).

---

<sup>49</sup> En el test de solvencia suizo se establece que los riesgos de masa tienen una distribución Gamma y los riesgos de cola una distribución de Pareto.



El término EVT hace referencia al conjunto de técnicas que estudia los eventos de la cola de la distribución de probabilidad, y que por tanto se les denomina eventos extremos o raros. Referencias básicas sobre la EVT son Beirlant *et al.* (1996), Reiss y Thomas (1997), Embrechts *et al.* (1997), Coles (2001), Beirlant *et al.* (2004), McNeil *et al.* (2006) y García (2007). Embrechts *et al.* (1997) afirman que la Teoría del Valor Extremo no es una herramienta mágica, pero intenta hacer el mejor uso posible de los datos de los fenómenos extremos.

La EVT engloba dos técnicas para tratar los datos históricos. La primera técnica supone que los datos se dividen en periodos de tiempo de igual duración o bloques (*blocks*), para posteriormente analizar los mayores datos de cada periodo o máximos de bloque (*block maxim*). La segunda técnica no divide los datos en periodos, sino que se centra sólo en los valores que superen cierto límite especificado (*threshold*). A esta técnica se le conoce como técnica POT (Peaks Over Threshold). Klugman *et al.* (2008a) citan que la primera de las técnicas es menos interesante para las aplicaciones actuariales, en la medida en que los contratos aseguradores no están relacionados normalmente con las pérdidas máximas.

#### A. Distribuciones paramétricas de EVT

Al analizar una serie de datos históricos de una variable pueden mostrarse situaciones extremas. Normalmente estos eventos raros o extremos se caracterizan por una baja frecuencia de ocurrencia pero tienen un gran impacto. La escasez de datos empíricos dificulta su tratamiento mediante técnicas estadísticas tradicionales, que han venido tratando estos datos como *outliers* o valores atípicos. Pero desde el punto de vista de la gestión del riesgo de una compañía aseguradora tienen un significado crucial, ya que determinan las máximas pérdidas a las que está expuesta la compañía. La Teoría del Valor extremo permite realizar inferencia

estadística sobre valores extremos centrándose en los mismos, lo que supone una modelización separada de la cola y cuerpo de la distribución de la muestra. Los principales modelos paramétricos en la Teoría del Valor Extremo son la Distribución Generalizada del Valor Extremo y la Distribución Generalizada de Pareto. Asimismo, existen también modelos no paramétricos de EVT, pero no serán tratados en este trabajo.

La Distribución Generalizada del Valor Extremo (*Generalized Extreme Value*, GEV) ajusta los valores máximos extraídos de bloques con el mismo tamaño o misma longitud. Es decir, sean  $X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq \dots \geq X_n$  un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución común. La EVT en base a la distribución GEV pretende conocer el comportamiento o distribución de los máximos, para lo que se deben formar bloques de la misma longitud y extraerse los valores máximos de cada bloque. En la práctica los datos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se agrupan en “ $n$ ” bloques de observaciones independientes de longitud “ $m$ ”, de forma que generamos una serie de máximos de bloque  $M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,m}$ . Normalmente los bloques se eligen de forma que se pueda eliminar la estacionalidad de los datos (Han, 2003). Los máximos de bloque se ajustan a una GEV para lo que tenemos que estimar sus parámetros.

La Distribución Generalizada de Pareto (*Generalized Pareto Distribution* –GPD) estudia el comportamiento de los valores que superan un determinado umbral. De esta forma se ajustan los datos que exceden ese determinado umbral a la Distribución Generalizada de Pareto, empleándose para el resto de los datos una distribución que se ajuste bien al cuerpo. Obviamente el principal problema para su puesta en práctica se encuentra en la elección del umbral y de la estimación de los parámetros. Para el estudio de la distribución de los máximos, es decir para analizar la EVT bajo la Distribución Generalizada del Valor Extremo resulta fundamental el teorema de Fisher y Tippet. Mientras que para el desarrollo de la distribución de los valores que exceden una prioridad o umbral (método POT) lo es el teorema de Pickands, Balkema y de Haan.

### A.1. La Distribución Generalizada del Valor Extremo

Sean  $X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq \dots \geq X_n$  un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución común  $F$  donde  $M_n$  representa el máximo de ellas, es decir,  $M_n = \max(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ . La teoría de valor extremo tiene como objetivo conocer la función de distribución de los máximos. Para alcanzar la función de distribución se deben establecer los máximos normalizados (*normalised máxima*) mediante la siguiente transformación  $\frac{M_n - a_n}{b_n}$ , en donde  $b_n > 0$  es la medida de escala o dispersión y  $a_n$  es la medida de posición, localización o tendencia central. Supóngase que encontramos una secuencia de números reales  $b_n$  y  $a_n$  que hacen que los máximos normalizados converjan a una distribución, es decir:  $P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq 0\right) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} H(x)$  para alguna función de distribución no degenerada  $H(x)$ . En este caso diremos que  $F$  está en el máximo

dominio de atracción (*maximum domain of attraction*) de  $H$ , o de forma abreviada  $F \in MDA(H)$ . La ventaja de la distribución límite  $H(x)$  es que no se necesita un conocimiento detallado de la función de origen  $F$ .

$H(x)$  representa la función de distribución estándar del valor extremo, por lo que se dice que los máximos normalizados convergen hacia la distribución del Valor Extremo Generalizada (*Generalised Extreme Value* o *GEV*). La función GEV tiene la siguiente forma general:

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp(-(\exp)^{-x}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Siendo  $1 + \xi x > 0$  y  $\xi$  el parámetro de forma de la distribución.

El teorema de Fisher y Tippet sobre leyes límites de máximos establece que si  $F \in MDA(H)$  entonces  $H$  es del tipo  $H_{\xi}$  para algún valor de  $\xi$ .  $H_{\xi}(x)$  puede tomar la forma de tres distribuciones límite para los máximos tipificados en función del parámetro  $\xi$ : Distribución de Gumbel o tipo I, Distribución de Frechet o tipo II y Distribución de Weibull o tipo III. De esta forma si  $\xi = 0$  obtenemos la distribución de Gumbel, para  $\xi > 0$  la distribución de Frechet y para  $\xi < 0$  la distribución de Weibull.

El parámetro  $\xi$  se denomina índice de cola (*tail index*), e indica el grosor de la cola de la distribución, de forma que cuanto mayor es el parámetro más suave es la cola de la distribución y viceversa. Por eso, la distribución de Gumbel se emplea para colas medias, la distribución de Frechet para colas gruesas y la distribución de Weibull para colas suaves. Formalmente  $\xi$  mide la velocidad con la que la cola se aproxima a cero, es decir, la velocidad de que se produzcan extremos en la cola. Por consiguiente, cuanto mayor sea la cola de la distribución, menor será la velocidad con la que la cola se aproxima a cero y menor será el índice de cola.

La principal carencia de esta técnica es que pueden perderse observaciones extremas en la elección de los máximos de bloque. Esto sucederá siempre que dichos valores extremos se encuentren en el mismo bloque, ya que valores no máximos en un bloque podrían ser superiores a los máximos de otros bloques. Por lo tanto podemos concluir que el problema para la puesta en práctica de esta la técnica de EVT basada en la distribución GEV surge de la elección del tamaño óptimo de cada bloque y de la estimación de los parámetros (García, 2007).

## A.2. La Distribución Generalizada de Pareto

Sean  $X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq \dots \geq X_n$  un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, si estamos interesados en la cola de la distribución estaremos interesados en la distribución que excede cierto valor denominado umbral. El método POT (*Peaks Over Threshold*) se emplea para estudiar cómo se distribuyen las observaciones una vez que superado una determinada cuantía, denominada límite, prioridad o umbral a la que se le denota por  $u$ . Los valores que

exceden del umbral  $u$  se pueden aproximar por la distribución generalizada de Pareto (GPD). La principal dificultad para aplicar el método POT reside en la elección del umbral  $u$  apropiado. En esta elección debe establecerse un balance entre varianza y sesgo, ya que al disminuir el umbral  $u$  se incrementa el número de observaciones de máximos, por lo que la estimación del índice de cola tendrá menor varianza pero será sesgada, ya que estaremos introduciendo algunas observaciones del cuerpo de la distribución y no de su cola.

La función de distribución de exceso en  $u$ , denotada por  $F_u(y)$ , es la función de distribución condicionada de los excesos por encima del valor  $u$ , proporcionando la probabilidad de que la variable aleatoria de exceso sobre  $u$  ( $X-u$ ) sea menor a un determinado valor ( $x$ ), y cuya expresión es la siguiente:

$$F_u(y) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}; \text{ para } 0 \leq x < x_F - u$$

Donde  $u$  representa el límite o umbral,  $X$  representa la variable aleatoria de la cuantía total y  $x_F \leq \infty$  el punto final derecho de la distribución  $F^{50}$ .

El teorema de Pickands-Balkema-de Haan, establece que cuando la prioridad  $u$  toma un valor suficientemente grande<sup>51</sup>, los datos por encima del umbral o cola de la distribución siguen una distribución límite que es la distribución de Pareto Generalizada, que se denota por  $G_{\xi, \beta}(y)$ . Para ello debemos establecer el umbral  $u$  óptimo y estimar el parámetro característico de la distribución  $\xi$ , también denominado índice de cola.

El teorema de Pickands-Balkema-de Haan (Balkema y de Haan, 1974; Pickands, 1975) establece que se puede encontrar una función  $\beta(u)$  tal que  $\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0$  si y sólo si  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Lo que sugiere que se puede emplear la siguiente aproximación para un valor elevado de  $u$ :  $F_u(x) \approx G_{\xi, \beta}(x)$ . Así, puede establecerse la siguiente aproximación para la cola de la distribución:  $\bar{F}(y) = P(X > y) \approx \frac{N_u}{n} \bar{G}_{\xi, \beta}(x - u)$ , para  $x \geq u$  donde  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  es la función de supervivencia de la función  $F(y)$ ,  $N_u$  es el número de observaciones empíricas que exceden el umbral  $u$  y finalmente  $n$  es el número total de observaciones.

La distribución generalizada de Pareto (*Generalised Pareto Distribution*, GPD) se define como:

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

<sup>50</sup> Si el nivel del umbral  $u$  y el número de observaciones que superan su valor son suficientemente grandes, la función  $F_u(x)$  ajusta tanto los valores de las  $X$  como los excesos sobre  $u$ , es decir, los valores de  $X - u$ .

<sup>51</sup> Sin embargo, este valor puede diferir para distintas distribuciones. Véase McNeil y Saladin (1997).

Donde  $\beta > 0$  y el dominio es  $x \geq 0$  cuando  $\xi \geq 0$  y  $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$  cuando  $\xi < 0$ . Al igual que la distribución generalizada de Valor Extremo unificaba tres distribuciones (Gumbel, Frechet y Weibull), la distribución generalizada de Pareto unifica la distribución Exponencial ( $\xi = 0$ ), la distribución de Pareto ( $\xi > 0$ ) y la distribución Pareto tipo II ( $\xi < 0$ ). Además, el teorema implica que si los máximos se aproximan a la distribución Generalizada del Valor Extremo ( $H_\xi$ ), entonces, los excesos por encima de un umbral se aproximan a la Distribución Generalizada de Pareto ( $G_{\xi,\beta}$ ), existiendo la siguiente relación entre ambas:  $H_\xi(x) = 1 - \log G_{\xi,\beta}(x)$ .

### B. La función de Exceso Medio y el gráfico de Hill

La Distribución de Pareto Generalizada es una función de distribución de los máximos condicionada a que dichos valores excedan del umbral  $u$ , pudiendo ser por tanto una alternativa para modelizar las cuantías de los grandes siniestros, los siniestros catastróficos y los acontecimientos de riesgo operativo en un modelo DFA. Por ello es de vital importancia la selección del umbral óptimo  $u$ . La técnica genérica que se emplea para la elección del umbral es la función de Exceso Medio (*mean excess loss function*). Dicha técnica puede ser completada por otras (véase García, 2007), entre las que destacamos el gráfico de Hill.

Sea  $F_u(y)$  la función de distribución de exceso en  $u$ , o función de distribución condicionada de los excesos por encima del valor del umbral. La media esperada de esa distribución o valor medio en exceso del umbral  $u$ , al que denotamos por  $e_{(u)}$ , es el valor medio esperado una vez se ha superado la prioridad  $u$ <sup>52</sup>. Formalmente:  $e_{(u)} = E(X - u | X > u) = \int_0^\infty x dF_u(y)$ . De esta forma podemos establecer una función que represente los valores medios en excesos esperados en función del umbral elegido, dejando como variable independiente el umbral  $u$  y como variable dependiente el valor de exceso medio  $e_{(Fu)}$ .

Las funciones de exceso medio para la distribución de Pareto Generalizada es una función lineal de  $u$  con pendiente  $\frac{1+\xi}{1-\xi}$ , cuya expresión viene dada por:

$$e_{W_\xi}(u) = \frac{1+\xi u}{1-\xi}, \text{ para } \begin{cases} u > 0 \text{ si } 0 \leq \xi < 1 \\ 0 < u < \frac{-1}{\xi} \text{ si } \xi < 0 \end{cases}$$

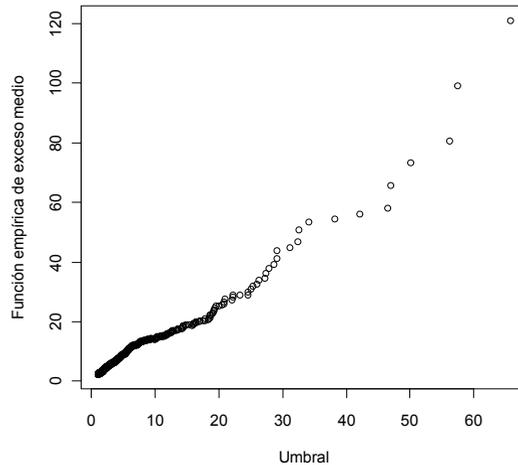
La importancia de la función de exceso medio es que permite diferenciar en función de su forma la distribución que mejor se ajuste a los datos observados. Por eso, dado que el gráfico de exceso medio para la distribución Generalizada de Pareto es lineal y tiende a infinito con pendiente positiva, puede establecerse como prioridad óptima el valor a partir del cual el gráfico de exceso medio toma una forma lineal con pendiente positiva. Para ello, es necesaria la representación de la

<sup>52</sup> Si estamos analizando la siniestralidad de la compañía será la siniestralidad esperada una vez que los siniestros superan la prioridad  $u$ . En caso del riesgo operativo serán las pérdidas esperadas una vez que éstas han superado la prioridad.

función empírica de exceso medio, obtenida a partir de la muestra de datos empleada. Dada una muestra ordenada de forma descendente  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , la función empírica de exceso medio determina la media aritmética de los valores que exceden del umbral<sup>53</sup>, mediante la siguiente expresión:

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{(X_i > u)}}.$$

El gráfico empírico de exceso medio es la representación de la función empírica  $\hat{e}_n(u)$  (variable dependiente) frente a los umbrales  $u$  (variable independiente).



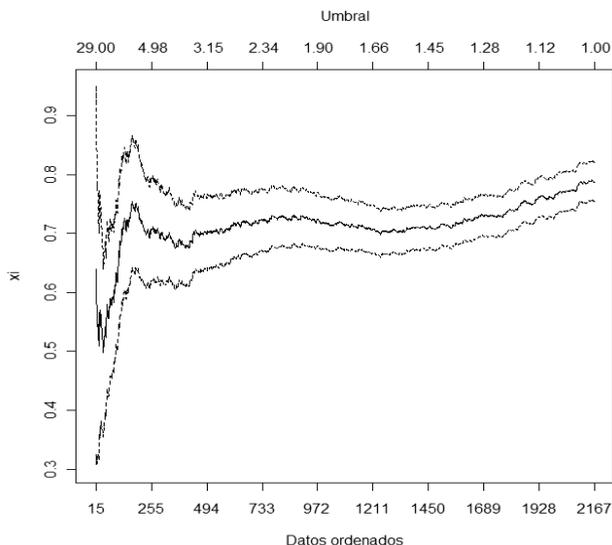
Otra técnica para la elección del umbral  $u$  es el gráfico de Hill. Para realizar un gráfico de Hill debemos calcular el estimador de Hill (1975) para cada elemento de la muestra ordenado en forma descendente, y se toma el valor medio del logaritmo de los  $k$  mayores valores por encima del umbral  $x_{k+1}$ . Formalmente:

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(x_i) - \ln(x_{k+1}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln\left(\frac{x_i}{x_{k+1}}\right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

En el gráfico de Hill se representa los pares  $(k, H_{k,n})$ , siendo un gráfico muy volátil que comenzará a estabilizarse a partir de un rango de valores al cual pertenece el umbral<sup>54</sup>.

<sup>53</sup> También puede hacerse que los propios datos de la muestra actúan como prioridad  $u$ , en donde la función de exceso medio empírica será la media aritmética de los  $k$  mayores valores.

<sup>54</sup> Existen otros métodos para establecer el umbral menos elegantes, como por ejemplo, establecer su valor tal que determinado número de valores o porcentaje de valores lo excedan.



### C. Estimación de los parámetros de EVT

Para realizar la adecuada modelización de los datos extremos mediante las técnicas paramétricas anteriormente descritas, debemos estimar los parámetros característicos de las distribuciones. Estos parámetros ajustan o bien los máximos, caso de la distribución generalizada del Valor Extremo, o bien los excesos sobre un determinado umbral, caso de la distribución generalizada de Pareto. Tanto en el caso de emplear la distribución generalizada del Valor Extremo como la distribución generalizada de Pareto el parámetro crucial es el índice de cola. Su estimación va ligada a la selección óptima del tamaño de los bloques o al nivel óptimo de prioridad, ya que, no se consigue un estimador adecuado para todos los tamaños y umbrales. Se han propuesto diversos métodos y estimadores con la intención de obtener parámetros con características idóneas. Una revisión profunda de los distintos métodos de estimación se proporciona, entre otros, en García (2007). En la siguiente tabla se resumen los principales métodos de estimación y las distribuciones a las que generalmente se aplican.

Método de estimación	Distribución
Momentos	Gumbel
Momentos ponderados	Generalizada del Valor Extremo y Generalizada de Pareto
Máxima verosimilitud	Generalizada del Valor Extremo y Generalizada de Pareto
Pickands	Generalizada de Pareto
Hill	Generalizada de Pareto
Dekkers, Einmahl y De Haan	Generalizada de Pareto

Fuente: García (2007)

### **Ejemplo. Ajuste de modelos de valor extremo y bondad del ajuste en R.**

R tiene varios paquetes para el tratamiento de valores extremos, destacando el paquete POT, el paquete evir y el fEXtremes. A continuación comentaremos muy brevemente algunas de las funciones del paquete POT.

El paquete POT tiene la función `fitgpd()` que permite el ajuste de la distribución Generalizada de Pareto mediante los métodos de máxima verosimilitud (método por defecto), máxima verosimilitud penalizada, momentos ponderados insesgados, momentos ponderados sesgados y Pickands, entre otros. Por ejemplo, si deseamos ajustar unos datos a una distribución GPD simplemente tenemos que detallar los datos a ajustar, el valor límite a partir del cual queremos que nos ajuste los datos y el método de estimación. Es decir `fitgpd(datos, límite, método, ...)`. Vamos a generar unos datos provenientes de la distribución GPD y posteriormente los ajustaremos. El paquete dispone de las funciones de densidad, distribución, cuantil y de generación de muestras aleatorias para la distribución generalizada de Pareto [`pgpd()`, `dgpd()`, `qgpd()` y `rgpd()` respectivamente]. Los parámetros básicos a introducir en estas distribuciones son el parámetro de localización, de escala y de forma (en el caso de que no sean especificados los valores por defecto son "0", "1" y "0"). Por lo tanto en el caso de querer por ejemplo generar 1.000 muestras de una distribución GDP con los parámetros establecidos por defecto simplemente haríamos:

```
x=rgpd(1000)
```

Estos valores los podemos ajustar a la distribución GPD por el método de máximo verosimilitud, es decir:

```
fitgpd(x, umbral)
```

La salida de la función, entre otros datos, nos proporciona información sobre el número de datos que exceden el límite fijado (y la proporción sobre el total de datos) y los valores de los parámetros de escala y forma y de sus errores estándar. El paquete también proporciona distintas herramientas para la selección del límite a partir del cual ajustar a la distribución GPD. Finalmente, comentar que la función `plot.uvpot()` proporciona distintas herramientas gráficas para analizar la bondad del ajuste (gráficos PP, QQ, superposición de la función de densidad empírica y teórica).

En este capítulo hemos descrito las principales herramientas cuantitativas de las que se nutre DFA para proyectar la actividad de una compañía aseguradora de forma integral. En el siguiente capítulo describiremos las distintas alternativas para la modelización del pasivo de una compañía aseguradora, centrándonos en especial en la simulación de la siniestralidad y de la provisión para prestaciones, ya que de ellas emana el riesgo de primas y de reservas en Solvencia II.

## **CAPÍTULO 4**

# **MODELIZACIÓN FINANCIERA DE PASIVO EN SEGUROS NO VIDA**

### **1. INTRODUCCIÓN**

La modelización de las variables que determinan los pagos futuros vinculados al pasivo del asegurador constituyen un elemento principal de un modelo DFA. En este objetivo se abordan distintas alternativas para la modelización de los Pasivos de las compañías de seguros no vida que se refieren principalmente a la siniestralidad de la compañía, las provisiones técnicas y el reaseguro. El objetivo de esta parte del trabajo es sentar las bases del modelo DFA desarrollado en el capítulo final. Para llevar a cabo esta tarea, este capítulo tiene la siguiente estructura. El apartado 2 discute las consideraciones generales de todas las variables relevantes para modelizar el pasivo de una aseguradora. En el apartado 3 se aborda las distintas técnicas para predecir los componentes de siniestralidad de una compañía a lo largo de un periodo, y las distribuciones aplicables a cada una de ellas. En el apartado 4 se establecen los métodos para la estimación de los parámetros de las distribuciones anteriormente descritas. En el apartado 5 se establecen los distintos métodos para la obtención de la distribución de siniestralidad agregada, destacando principalmente el método de simulación de Monte Carlo. El apartado 6 está dedicado a provisión para prestaciones de una aseguradora no vida, abordándose los principales métodos para su cuantificación. En el apartado 7 se establecen los principales aspectos relacionados con el reaseguro. Finalmente, el apartado 8 está dedicado a reflexionar sobre la importancia de los lazos de regeneración de un modelo dinámico.

### **2. MODELIZACIÓN DEL PASIVO EN SEGUROS NO VIDA: CONSIDERACIONES GENERALES**

A la hora de modelizar el pasivo de una compañía aseguradora se han de considerar los diferentes elementos que afectan a los pagos del asegurador en el futuro: nivel de modelización, medida de exposición y distribuciones empleadas, los efectos de la antigüedad de las pólizas, efectos de la inflación sobre los pasivos, el patrón de pagos y de cobros, el reaseguro, la adecuación de las primas (tarificación), la relación de las primas con la solvencia de la compañía, el ciclo asegurador, los gastos y la relación entre las distintas líneas de negocio.

La siniestralidad<sup>1</sup> de una compañía aseguradora se pueden modelizar fundamentalmente a cuatro niveles: nivel individual, frecuencia-cuantía de los siniestros, mediante ratios de siniestralidad y empleando y una única distribución. La opción más adecuada dependerá fundamentalmente de la naturaleza del negocio<sup>2</sup> (Warthen y Sommer, 1996 y Britt y Johnstone, 2001).

El primer nivel consiste en modelizar cada póliza individual por separado (“*seriatim approach*”). Esta forma permite capturar al completo el riesgo asegurador, incluyendo la heterogeneidad dentro de los grupos. La desventaja es que requiere más tiempo de simulación, por ello en la práctica es empleada por compañías que aseguran un número limitado de riesgos de gran volumen. La segunda opción usa una técnica de frecuencia y cuantía de los siniestros, es decir, se agrupan las pólizas y se modeliza el número de demandas y el tamaño de los siniestros. Las principales modalidades consisten en emplear la frecuencia relativa o la frecuencia absoluta para el número de siniestros, y la cuantía o los costes medios para el tamaño. Esta opción tiene la ventaja de un tiempo de simulación menor y de considerar la heterogeneidad dentro de los grupos. Este método es muy empleado en la práctica porque permite ligar fácilmente los pasivos a los factores inductores del modelo. De esta forma, el coste o tamaño de cada siniestro debe estar influenciado por la tasa de inflación proyectada. Además, puede ser también útil ligar la frecuencia siniestral a la inflación y/o otras variables económicas. El tercer nivel consiste en usar una técnica de exposición de grupo a través de los *loss ratios* o ratios de siniestralidad. En este caso, la exposición es modelada por una variable *proxy*, fundamentalmente las primas brutas o netas suscritas, y luego los cocientes de siniestralidad determinan los pagos totales. Tiene la ventaja de poder realizar la simulación de forma rápida a partir de la tendencia probable de la ratio de siniestralidad, pero a cambio de pérdida en la heterogeneidad dentro de los grupos. Finalmente, podría ser empleada una única distribución para la siniestralidad en su conjunto mediante el empleo de distribuciones con colas gruesas (Kaufmann *et al.* 2001).

Póliza individual	Directamente → Siniestros
Coste -frecuencia	Frecuencia absoluta x Severidad → Siniestros Frecuencia relativa x Coste medio → Siniestros
Loss ratio	Primas → Loss ratio → Siniestros
Nivel agregado	Distribución conjunta (Coste- frecuencia)

El nivel de modelización más empleado en DFA es la modelización de la cuantía y frecuencia de los siniestros. La cuantía total de los pagos viene determinada por la frecuencia o número de siniestros y del coste por siniestro. Esta técnica permite variaciones, ya que en vez de modelizar la frecuencia absoluta y la severidad pue-

<sup>1</sup> La siniestralidad hace referencia a la indemnización a la que tienen que hacer frente la compañía en caso de que ocurra cualquiera de los eventos o riesgos asegurados.

<sup>2</sup> Si los riesgos del conjunto de pólizas son homogéneos, la modelización individual de cada poliza aisladamente desperdicia tiempo sin añadir precisión a los resultados. Por otra parte, si la compañía suscribe una pequeña cantidad de riesgos muy diversos debe emplearse la modelización individual.

de ser modelada la frecuencia relativa y el coste medio de los siniestros. En caso de modelizar la frecuencia relativa, se debe seleccionar una *proxy* de exposición, que mida el grado en el cual se expone la compañía a los siniestros. Las más generales son el número de pólizas, las primas, la suma asegurada, y el número de exposiciones al riesgo. Una vez seleccionada la variable de volumen, la cantidad de siniestros se puede simular usando distintas distribuciones para el coste y la frecuencia de los siniestros.

Para simular el comportamiento de la frecuencia y del coste de los siniestros es preciso disponer de una serie histórica suficientemente amplia de datos y analizar la función de distribución a la que mejor se ajustan. En este sentido, Kaufmann *et al.* (2001) utilizan una distribución binomial negativa para modelizar la frecuencia de siniestros y una distribución Gamma para la cuantía de los siniestros. Para ello se toman como variables de referencia las medias y las desviaciones estándar que surgen del análisis de los datos históricos. En el caso del DynaMo 3 se utiliza una distribución normal, tanto para la frecuencia media de siniestros como para el coste medio de los mismos. Ambos modelos permiten que los parámetros de la frecuencia y de la cuantía o coste medio, así como la distribución subyacente de cada uno, se diferencien según la línea del negocio.

En el ajuste de la severidad de los siniestros puede emplearse una técnica multidistribución. En este sentido, puede ser conveniente para modelizar la siniestralidad distinguir entre riesgos de masa y riesgos de cola. Los riesgos de masa son riesgos con consecuencias económicas o severidad baja pero alta frecuencia o probabilidad de ocurrencia, mientras que los riesgos de cola son riesgos con baja frecuencia pero elevado coste. De esta forma, se consigue un mejor ajuste a los datos reales mediante una mezcla de distribuciones, en las que puede ser empleado para el riesgo de cola las distribuciones de valor extremo. Debido a las distintas características de frecuencia y coste, los riesgos catastróficos se modelizan de forma separada a los no catastróficos. A modo de ejemplo, en el DynaMo 3 emplea una distribución de Poisson para el número de siniestros y una distribución lognormal para su cuantía. Sin embargo, puede ser adecuado emplear nuevamente distribuciones de valor extremo que se ajustan mejor a las colas de la distribución.

En la modelización del pasivo de las compañías aseguradoras se debe prestar atención a la antigüedad de las pólizas ("*aging phenomenon*"). Según diversos autores<sup>3</sup> una tendencia de los seguros no vida es que la ratio de siniestralidad, medida como el cociente entre el total de siniestralidad y las primas ganadas, disminuye para aquellas pólizas que tienen una mayor antigüedad. Por este motivo suele ser habitual establecer una frecuencia y/o coste medio mayor para las pólizas nuevas, ajustando así mejor la simulación al comportamiento observado. La causa del *aging phenomenon* es el resultado de la acumulación de información

---

<sup>3</sup> Woll (1987) y D'Arcy y Doherty (1989 y 1990), entre otros, documentaron el fenómeno de la antigüedad de las pólizas en el sector asegurador. D'Arcy y Doherty (1989) muestran como incorporan el *aging phenomenon* a un algoritmo de tarificación. De acuerdo con los datos publicados en D'Arcy y Doherty (1990), la ratio de siniestralidad (*loss ratio*) en las nuevas pólizas era un 8% superior al de la primera renovación y un 42% a las renovaciones siguientes.

privada por el asegurador. Esta información permite que el asegurador clasifique correctamente a los asegurados en función del riesgo o siniestralidad. De esta forma la ratio de siniestralidad disminuye a lo largo del tiempo, ya que los asegurados de riesgo más elevado se clasifican y tarifican apropiadamente con la nueva información, en comparación con la información inicial. Warthen y Sommer (1996) afirman que la mayor ratio de siniestralidad de los nuevos asegurados o coste del nuevo negocio puede resultar crítico para las compañías cuya base de asegurados cambia rápidamente, y por lo tanto se deben incorporar como variable en un modelo DFA. Feldblum (1996) afirma que la antigüedad de las pólizas tiene una influencia fuerte en la frecuencia siniestral, particularmente en el seguro de automóvil, donde los nuevos asegurados tienen ratios de siniestros medias más altas debido a factores como la experiencia conductora, la juventud, los asegurados temporales o transitorios y a la antigüedad de compra del vehículo. D'Arcy y Gorrivett (2004) postulan que como consecuencia de la antigüedad de las pólizas puede haber una tasa de crecimiento óptima para las compañías aseguradoras, empleando para tal fin el modelo DynaMo 3. Este modelo, al igual que Kaufmann *et al.* (2001) entre otros, clasifica el negocio de la compañía en tres segmentos: nuevo negocio, primera renovación, y segunda y subsiguientes renovaciones. Además, el modelo permite que los parámetros de las distribuciones de frecuencia y coste o sus distribuciones subyacentes varíen por segmento.

Otro aspecto a considerar en la modelización de los pasivos es si la inflación afecta tanto a la cuantía como a la frecuencia de los siniestros. En el caso concreto de la cuantía de los siniestros es obvio que el importe de estos debe ser ajustado por inflación. Por otra parte, a nivel empírico se ha constatado que bajo ciertas condiciones económicas, los asegurados declaran más siniestros en entornos de elevada inflación. De ser relevante dicho impacto sobre los resultados sería necesario conocer la influencia de la variable inflación sobre la frecuencia. Kaufmann *et al.* (2001) proponen estimar dicha relación de forma lineal y luego proyectarla a través de la función estimada, a la cual se le sumará un movimiento browniano estándar, donde la volatilidad de los residuos será la observada históricamente.

Los patrones de pago<sup>4</sup> (*Payment Patterns*) de los siniestros recogen el ritmo al cual se producen los pagos de los siniestros, de ahí que si se pretende reproducir fielmente la actividad aseguradora será necesario especificar qué porcentaje se paga cada ejercicio y durante cuánto tiempo se extienden los pagos, los denominados periodos de desarrollo o *development periods*. Según Warthen y Sommer (1996) la variación en la secuencia de los pagos de siniestros es una fuente de riesgo de los aseguradores y por lo tanto se debe reflejar en un modelo de DFA. El patrón de pagos puede definirse como el período de tiempo en el que se consumen las provisiones para prestaciones, y se representa por el conjunto de pagos incrementales correspondientes a un mismo año de accidente. Dicho patrón puede modelizarse de forma determinista, como un porcentaje pagado cada año a partir

---

<sup>4</sup> Un modelo DFA también puede incorporar el patrón de cobros de las primas (*Premium Collection Pattern*) o mismo el patrón según el cual los siniestros son declarados a la compañía (*Loss Reporting Pattern*).

del momento en el que se produce el siniestro o de forma estocástica (Kirschner y Scheel, 1997). La forma determinística será adecuada cuando los patrones de pago no varíen demasiado a lo largo del tiempo. Pero si éstos varían, el modelo DFA debe tener un modelo estocástico que explique el momento de los pagos por siniestros, recogiendo así el riesgo de mala estimación del valor actual de la provisión para prestaciones (Kaufmann *et al.* 2001). Pese a que los patrones de pago no afectan a la cantidad final que debe ser pagada (*ultimate loss*) si afectan al momento en el que se produce el pago. La aleatoriedad de los pagos a lo largo del tiempo incrementa la incertidumbre al introducir el valor del dinero en el tiempo y los efectos de la inflación futura. Warthen y Sommer (1996) comentan la importancia de considerar las posibles interacciones entre los efectos de la inflación en las demandas y la secuencia en las cuales son pagadas. En caso de que, como consecuencia de un análisis estadístico a partir de datos reales de cada compañía, se pueda establecer una relación entre ambas variables, ésta podría formar parte de un modelo de DFA.

Si la compañía modelada acude a los mercados a comprar reaseguro, éste será otro aspecto que se debe introducir en el modelo DFA. El reaseguro permite al asegurador transferir o ceder el riesgo que asumen a otras compañías de seguros, conocidas como reaseguradoras. Estas reaseguradoras pueden a su vez suscribir más reaseguro con las denominadas reaseguradoras secundarias, y así sucesivamente. Las dos funciones principales del reaseguro son: la transferencia y diversificación del riesgo, y el aumento de capacidad de suscripción de la compañía. Como contraprestación a las primas de reaseguro (precio del reaseguro), los reaseguradores reembolsa a los aseguradores los pagos por siniestralidad, según los términos del contrato establecido. Existen una a amplia variedad de contratos del reaseguro<sup>5</sup>, la complejidad de los cuales puede ser una clave en la complejidad del modelo. Warthen y Sommer (1996) afirman que para la modelización exacta de los efectos de diversas protecciones del reaseguro, un modelo de DFA debe incluir un sistema de parámetros relativamente grande que describa los términos de la cobertura<sup>6</sup> aplicables a este producto. Si la compañía decide incorporar el reaseguro en su modelo debe recoger dos aspectos importantes. El primero, reside en que el mercado del reaseguro es cíclico, por lo que el modelo DFA debiera generar escenarios realistas en donde los períodos de primas inadecuadas del reaseguro vinieran seguidas por primas elevadas. El segundo, es modelizar el riesgo de crédito del reaseguro lo que puede suponer, en escenarios de alta siniestralidad y concentración de los contratos, que algunos flujos no se recobren. En este aspecto debe recogerse que la diversificación reduce los riesgos de impago o *default* del reasegurador pero, por el contrario, el precio pagado por el reaseguro será generalmente superior.

---

<sup>5</sup> Una clasificación aceptada es la que distingue entre reaseguro proporcional (cuota parte o excedente) y no proporcional (*stop loss* o exceso de siniestralidad, exceso de pérdida por riesgo y exceso de pérdida por evento).

<sup>6</sup> Retenciones aplicables, los límites, porcentaje de la cuota parte, etc.

Los gastos de las compañías aseguradoras están formados por distintas partidas como sueldos, publicidad, alquileres, comisiones pagadas a los agentes, etc. con distinta importancia en la cuenta de resultados de la compañía. Es normal que un modelo DFA proyecte distintos importes para el nuevo negocio que para el negocio retenido, debido a la evidencia empírica. Estos gastos se pueden clasificar en gastos fijos, variables y semifijos, pudiendo determinarse a partir de la evolución histórica que ha presentado la cuenta de explotación de ese negocio. Una recomendación general es que se pondrá un mayor énfasis en la modelización de aquellas partidas que supongan un flujo importante de fondos. Britt y Johnstone (2001) proporcionan distintos consejos en la proyección de costes<sup>7</sup>. Eling y Toplek (2009) proponen en su modelo que los costes dependan linealmente del volumen suscrito de primas y no linealmente de la variación en el volumen suscrito. De esta forma, se pueden recoger los esfuerzos crecientes en publicidad y en promoción derivados de la expansión de la compañía.

Las primas representan el cobro<sup>8</sup> que realiza la compañía de los asegurados, a cambio de establecer la cobertura determinada en los contratos. Por eso las primas constituyen la fuente de ingresos básica de una compañía aseguradora. Con las primas cobradas y las rentabilidades que de ellas obtienen, tienen que hacer frente a la siniestralidad. Cuando una póliza particular incurre en un siniestro, la compañía tiene tres posibilidades para afrontar los pagos: emplear el componente de siniestralidad junto con la renta de inversión ganada, emplear los componentes no usados de siniestralidad de otras pólizas, o en último caso, la compañía puede emplear el excedente de la compañía. Un aspecto importante a la hora de modelizar el comportamiento de una compañía aseguradora es cómo ésta determina sus primas y la relación entre la prima de la compañía y las de la competencia. Las compañías normalmente establecen sus primas como resultado de un algoritmo de tarificación. Dicho algoritmo considera generalmente lo que se denomina componentes de la prima, es decir, la siniestralidad, los gastos de gestión interna y externa, la renta de inversión prevista y un margen por beneficio. Pero, esta prima derivada del algoritmo de tarificación no es la prima que definitivamente fija la compañía en el mercado, ya que ésta viene influenciada por la competencia<sup>9</sup>. El precio de la competencia actúa como restricción u oportunidad a la estrategia de tarificación de la compañía. Por eso, los modelos DFA más avanzados consideran las interacciones del mercado competitivo. Según Warten y Sommer (1996) los

---

<sup>7</sup> Para una compañía joven puede ser útil proyectar la mayor parte de los costes a partir de la fuerza de ventas. Para las compañías maduras puede ser apropiado relacionar los costes con el volumen de primas o el número de pólizas, proyectados con un nivel de inflación general o específico del sector. También puede tenerse en cuenta posibles reducciones futuras de gastos derivadas de inversiones en I+D+I, etc.

<sup>8</sup> Las primas cobradas se ingresan con anterioridad a la ocurrencia del evento que se asegura (actividad aseguradora). La compañía invierte las primas cobradas hasta que son necesarias para pagar los siniestros para obtener una rentabilidad (actividad financiera).

<sup>9</sup> Las primas excesivas, comparándolas con las establecidas por la competencia, pueden provocar una fuga de asegurados (desventaja competitiva). Sin embargo, unas primas muy competitivas, que no cubran los componentes de la prima, no constituyen una ventaja competitiva, ya que representan una amenaza a la fortaleza financiera de la compañía.

modelos deben establecer dos precios. El precio como resultado del algoritmo de tarificación y el precio de mercado, que dependerá de las condiciones de mercado actuales, el plan y los objetivos estratégicos del asegurador y de su condición financiera. Los modelos DFA así elaborados deben considerar que una estrategia de tarificación que eleve (reduzca) las primas a un nivel superior (inferior) al de la competencia debe ir acompañado de una caída (aumento) en el número de pólizas o asegurados de la compañía. Por el contrario, es posible que la compañía pueda aumentar sus primas sin reducción de los asegurados en aquellos escenarios que manifiesten riesgos que afecten por igual a todos los participantes del mercado, como en el caso de aumentos en la inflación (CAS, 2009). En la práctica los modelos realizan estas distinciones en función del ciclo asegurador.

Al fijar las primas, además del algoritmo de tarificación se debe considerar la situación del mercado, lo que se denomina el ciclo asegurador, ya que en función del nivel de competencia la compañía deberá establecer primas más o menos ajustadas. Según Kaufmann *et al.* (2001) los ciclos aseguradores son uno de los factores más importantes que afectan a los resultados del negocio de las compañías no vida, por lo que es útil incluirlos en un modelo DFA. La industria del seguro no vida en todo el mundo tiene un comportamiento cíclico, caracterizado por mercados blandos en los cuales las primas son estables o se reducen y el seguro está fácilmente disponible, y períodos de mercado duro, donde se elevan las tarifas, la cobertura es más difícil de encontrar y los beneficios de los aseguradores aumentan. La duración de los ciclos suele establecerse en torno a seis años<sup>10</sup> y suele presentar una alta correlación entre los distintos ramos.

Una vez destacada la importancia de los ciclos aseguradores en los resultados de las compañías, y por tanto recomendar su inclusión en los modelos DFA, debiéramos intentar profundizar en las causas de este fenómeno. Warten y Sommer (1996) explican que los ciclos aseguradores son resultado del siguiente proceso. Los flujos de capital entran y salen del sector asegurador, en respuesta a las expectativas de rentabilidad comparadas con otras oportunidades de negocio, lo que cambia la capacidad de las compañías. Cuanto mayor es la capacidad mayor es la competencia, por lo que compañías procuran conservar su negocio fijando unas primas bajas, en línea con el mercado, para evitar los costes derivados de la pérdida y posterior recuperación del negocio (*seasoned business*<sup>11</sup>). Cuando el coste de vender bajo costes exceda al coste de la pérdida y posterior recuperación del negocio, y la rentabilidad del sector asegurador caiga respecto a otras inversiones, la capacidad y las primas se estabilizan. Además, los autores resaltan que

---

<sup>10</sup> Cummins y Outreville (1987) determinaron que la duración de los ciclos era de cinco a ocho años en diferentes países (período analizado fue 1957 a 1979). Harrington y Niehaus (2000) indica que la duración fue entre 7,1 y 9,6 años para los Estados Unidos, dependiendo del periodo de observación (distintos periodos entre 1955 y 1996). Swiss Re (2001) estima la duración media del ciclo entre 5,6 y 7,3 años en los siete países analizados.

<sup>11</sup> Negocio donde el asegurador ha acumulado un conocimiento de los asegurados, el riesgo que presentan, su capacidad de pagar las primas y su integridad como un demandante y cliente.

la información imperfecta<sup>12</sup> en el mercado puede contribuir a la naturaleza cíclica de las rentabilidades del sector asegurador y a la persistencia del comportamiento de tarificación por debajo de costes en un ciclo blando.

La modelización del ciclo asegurador ha sido incorporada a varios modelos DFA de compañías no vida. El modelo DynaMo 3 modeliza el ciclo asegurador mediante una cadena de Markov en tiempo discreto, con cuatro posibles estados de la naturaleza. Esta opción también es propuesta por Kauffman *et al.* (2001) y Eling *et al.* (2008b), quienes diferencian tres posibles estados de competencia (débil, media y fuerte). En el estado de competencia débil, la compañía de seguros exige primas elevadas, ya que aún así puede aumentar su cuota de mercado. En el estado 3 (competencia fuerte) la compañía de seguros tiene que aceptar primas bajas para mantener por lo menos su cuota de mercado actual. Si se asume un ambiente estable de reclamaciones, las primas altas son equivalentes a un margen de beneficio alto, y las primas bajas igual a un margen de beneficio bajo. Los cambios de un estado a otro pueden causar cambios significativos en el volumen primas. Matemáticamente, las variables  $p_{sj}$  denotan las probabilidades de cambiar a partir del estado  $s$  al estado  $j$ <sup>13</sup>, lo cual conduce a la matriz de transición  $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Otra opción para la implantación del ciclo asegurador en un modelo DFA es la propuesta por Eling y Toplek (2009), basada en Cummins y Outreville (1987). Estos autores modelizan el ciclo asegurador usando un proceso autorregresivo de orden dos, donde el nivel de primas actual  $\Pi_t$  depende de los niveles de primas de los dos periodos anteriores y de un término aleatorio de error  $\varepsilon_t$  que sigue un proceso ruido blanco. Dependiendo de los parámetros empleados, el proceso produce longitudes del ciclo asegurador que se pueden calibrar según los datos observados:

$$\Pi_t = \varphi_0 + \varphi_1 \Pi_{t-1} + \varphi_2 \Pi_{t-2} + \varepsilon_t$$

Otro aspecto importante en la modelización de las primas es la relación de las primas y la solvencia de la compañía. Un modelo DFA puede recoger la relación entre el volumen de primas de una compañía y su nivel de solvencia observado por los asegurados. Cuando una compañía aseguradora experimenta un deterioro de su posición financiera o subida del riesgo de impago es de esperar que menos asegurados estén dispuestos a contratar o renovar sus seguros, pasando a con-

<sup>12</sup> La información imperfecta se presenta cuando: las expectativas de asegurados e inversores de las rentabilidades sobre el negocio actual y futuro son inciertas, o cuando los compradores de seguro no tienen información completa sobre la calidad y el precio de todos los productos disponible para ellos en el mercado.

<sup>13</sup> Por ejemplo, estando en el estado 1,  $p_{11}$  denota la probabilidad de permanecer en el estado 1, y  $p_{12}$  ( $p_{13}$ ) la probabilidad de cambiar al estado 2 (3).

tratar sus pólizas en compañías más solventes, lo que se materializaría en una rápida caída del nivel de primas. Eling y Toplek (2009) optan así por conectar el nivel de primas de la compañía con una función de respuesta del consumidor, que representa el acoplamiento entre las primas suscritas y el nivel de solvencia de la compañía. El Instituto Canadiense de Actuarios (CIA, 1999) establece que en el proceso de DCAT, en aquellos escenarios adversos que den lugar a una reducción significativa del capital y del excedente, el actuario debe considerar cuidadosamente la probabilidad de un retroceso de la calificación por parte de la agencia de *rating*. Fruto del empeoramiento del *rating* se debe incorporar las posibles consecuencias en dicho escenario como son el deterioro de la confianza, las reducciones del nuevo negocio, las cancelaciones de pólizas, etc.

El último aspecto relevante en la modelización del pasivo, es las relaciones entre las distintas líneas de negocio. Para Britt y Johnstone (2001) las relaciones entre las distintas líneas de negocio se pueden recoger de tres formas en un modelo DFA. Para los fenómenos que causan daños en varias líneas de negocio, se puede simular el riesgo y después modelizar la exposición de cada línea de negocio al mismo. La segunda forma consiste en establecer la relación entre líneas de negocio a través de la exposición compartida a factores macroeconómicos, tales como la inflación. Finalmente, se pueden ligar distintas líneas de negocio estadísticamente mediante distintas técnicas de correlación, en donde recientemente se ha venido considerando el empleo de las cópulas. De esta forma puede establecerse una cópula que genera dependencia, por ejemplo, entre la ratio de siniestralidad de las distintas líneas de negocio.

### 3. MODELIZACIÓN DE LA SINIESTRALIDAD DE UNA COMPAÑÍA ASEGURADORA

El análisis financiero dinámico realiza la simulación del negocio asegurador y para ello se ayuda de la teoría del riesgo. Dicha teoría se refiere a un conjunto de técnicas para modelizar y medir el riesgo asociado a un conjunto de pólizas de una cartera aseguradora, en concreto trata la modelización de las reclamaciones por siniestros que se le presentan a un negocio asegurador y de las primas que deben ser establecidas para evitar la ruina de la compañía<sup>14</sup>. Por tanto, la teoría del riesgo es el análisis de las características estocásticas del negocio asegurador<sup>15</sup>. Las tres hipótesis básicas del modelo de Lundberg, que permite describir las dinámicas básicas de una cartera de seguros homogénea, son:

---

<sup>14</sup> Gerber (1979) establece que la Teoría del Riesgo se puede definir como el conjunto de ideas para diseñar, dirigir y regular una empresa de riesgos.

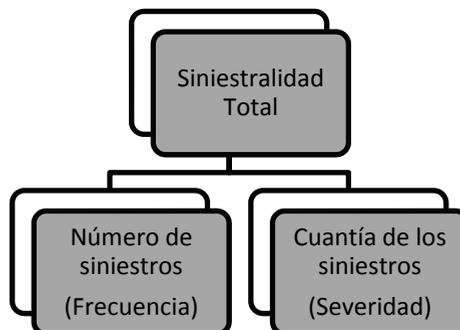
<sup>15</sup> Por tanto la teoría de riesgo tratará cuatro aspectos fundamentalmente. El primero será encontrar modelos para describir el proceso del número de siniestros  $N(t)$ , la cuantía de los mismos  $X_i$ , y mediante convolución la siniestralidad de la compañía  $S(t)$ . Segundo encontrar propiedades teóricas de los procesos estocásticos anteriormente descritos: momentos, varianzas, etc. Tercero proporcionar procesos para la simulación de la siniestralidad agregada de la compañía. Y cuarto y último, establecer recomendaciones basadas en el juicio actuarial para las primas cobradas, las provisiones establecidas, etc.

- Las reclamaciones se suceden en los tiempos  $T_i$ , que representan los tiempos que transcurren entre la ocurrencia de una reclamación y la siguiente. Este tiempo se denomina tiempo entre reclamaciones (*claim arrivals*, *claim times*, *claim arrival times* o simplemente *arrivals*).
- La reclamación  $i$ -ésima del período  $T_i$  causa la cuantía o severidad (*claim size*, *claim severity* o simplemente *claim*)  $X_i$ . La secuencia  $\{X_i\}_{i=1}^n$  constituye una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (*iid*) no negativas. Esta hipótesis refleja el hecho de que la cartera tiene una estructura probabilística homogénea.
- Los procesos de la cuantía de las reclamaciones ( $X_i$ ) y el momento de las reclamaciones ( $T_i$ ) son mutuamente independientes.

El análisis financiero dinámico se sirve de las teorías clásicas del riesgo para modelizar el pasivo de la compañía y así obtener su desempeño ante un conjunto de escenarios futuros simulados. A continuación se detallan los fundamentos y principales alternativas para la modelización de la siniestralidad de una compañía aseguradora.

### 3.1. La siniestralidad agregada de un asegurador

La siniestralidad que experimenta una compañía asegurada durante un período de tiempo es un proceso estocástico con un doble fundamento aleatorio, la aleatoriedad en el número o frecuencia de siniestros y la cuantía aleatoria de estos.



Sin embargo, desde un punto de vista práctico en los modelos DFA de las aseguradoras no vida pueden ser abordadas distintas alternativas para la modelización de la siniestralidad que, como ya hemos mencionado, consisten básicamente en la modelización de la siniestralidad agregada o total mediante una única distribución,

la modelización de la cuantía de los siniestros y de su número, la modelización de la frecuencia relativa o número medio de siniestros por unidad de exposición y el coste medio de los mismos, o finalmente por la proyección de la siniestralidad a través de *loss ratios* o ratios de siniestralidad una vez establecidas las primas. En la siguiente tabla se muestran las principales alternativas para la modelización de la siniestralidad. Además, también recoge los principales métodos de ajuste, los tipos de distribuciones empleadas en cada alternativa, y los principales criterios de bondad de ajuste y selección de modelos.

Alternativas	Ajuste y métodos	Tipo distribución	Bondad de ajuste y selección de modelos	Proyección de pagos futuros
Distribución siniestralidad agregada	<p>Ajuste a partir de datos históricos, datos de mercado y expectativas futuras.</p> <p>Consideración de ajuste por inflación, situación económica, etc.</p> <p>Los métodos para estimar los parámetros son: Máxima verosimilitud, método de los momentos y estimación basada en cuantiles.</p>	Distribución de mejor ajuste (Gamma, Log-normal, etc.)	<p>Estadísticas</p> <p>Variables discretas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Test Chi-cuadrado</li> </ul> <p>Variables continuas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Test Chi-cuadrado</li> <li>-Test K-S</li> <li>-Test A-D</li> <li>-Test CvM, etc.</li> </ul>	<p>Solución analítica o Simulación estocástica mediante técnicas de Monte Carlo (Monte Carlo aleatorio o LH)</p>
Frecuencia (absoluta o relativa) y Coste (coste medio o cuantía de cada siniestro)		<p>Distribuciones teóricas o distribución de mejor ajuste</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Frecuencia absoluta (Poisson, Binomial negativa, Binomial, etc.)</li> <li>-Frecuencia relativa (Normal, Gamma, etc.)</li> <li>-Coste Medio (Normal, Log-normal, Gamma, etc.)</li> <li>-Cuantía individual (Lognormal, Gamma, -Distribuciones de valor extremo, etc.)</li> </ul>	<p>Gráficos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Gráficos Q-Q</li> <li>-Gráficos P-P</li> <li>-Gráfico de coincidencia o superposición</li> <li>-Gráfico de diferencias, etc.</li> </ul> <p>Otros criterios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Comparar medidas de posición y dispersión</li> <li>-Test de cociente de verosimilitudes (LRT)</li> <li>-Criterio AIC y SBC, etc.</li> </ul>	
<i>Loss Ratio</i>		Distribución de mejor ajuste (Gamma, Log-normal, etc.)	<p>Otros criterios:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Comparar medidas de posición y dispersión</li> <li>-Test de cociente de verosimilitudes (LRT)</li> <li>-Criterio AIC y SBC, etc.</li> </ul>	

Desde el punto de vista teórico, para representar la siniestralidad de una cartera de asegurados existen dos enfoques o teorías de riesgo: el Modelo del Riesgo

Individual (Teoría individual del riesgo) y el Modelo colectivo de riesgo (Teoría del riesgo colectivo), que se basan en la frecuencia absoluta o número de siniestros ocurridos y la cuantía, severidad o coste de los mismos. Esta última alternativa para proyectar la siniestralidad futura se denomina enfoque basado en la distribución de pérdidas agregadas (*loss distribution approach* o LDA). Esta técnica estima la distribución de siniestralidad en base al ajuste de las distribuciones de frecuencia y severidad de los eventos a partir de una base de datos histórica y la posterior simulación de dichas distribuciones.

### A. Modelo Individual de Riesgo

El Modelo Individual representa perfectamente a los seguros de vida y salud, ya que considera cada póliza individual con una probabilidad de siniestro. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_{1n}$  las variables aleatorias de las cantidades o cuantías reclamadas al asegurador en un período por cada una de las  $n$  pólizas de la cartera del asegurador,  $X_i$  vendrá definida como:

$$X_i \begin{cases} C_j & \text{con probabilidad } q_j \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - q_j \end{cases}$$

Siendo  $q_j$  la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación en el período de cobertura,  $p_j$  o  $1 - q_j$ <sup>16</sup> la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado no efectuó ninguna reclamación durante el tiempo de vigencia del seguro, y  $C_j$  la variable aleatoria de la cuantía generada por la póliza  $j$ . La cantidad total reclamada  $S$  de la cartera de pólizas se denota por:

$$S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Si asumimos independencia entre las cantidades reclamadas individuales  $X_j$ , y aplicando que la distribución de probabilidad de la suma de variables aleatorias independientes es la convolución<sup>17</sup> de cada una de sus distribuciones de probabilidad, la distribución de los siniestros agregados  $S$  es:

$$F_S(s) = F_{x_1}(s)F_{x_2}(s) \dots F_{x_n}(s)$$

Si además las cuantías de las reclamaciones por siniestros individuales están idénticamente distribuidas obtenemos:

$$F_S(s) = F_{x_1}^n$$

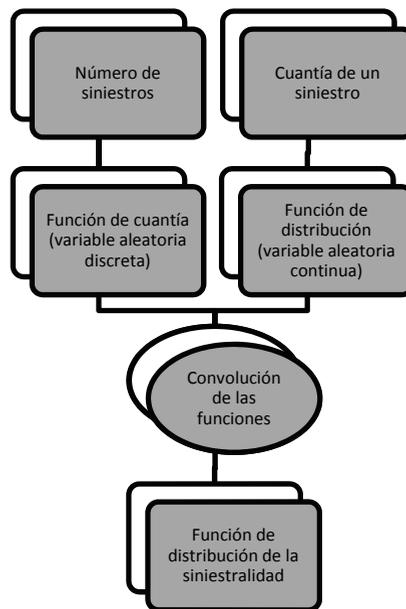
Siendo  $F_{x_1}^n$  la  $n$ -ésima convolución de la distribución de las cuantías individuales.

<sup>16</sup> Lo cual significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado, como en el caso de los seguros de vida.

<sup>17</sup> Una convolución es una suma de variables aleatorias estocásticamente independientes e idénticamente distribuidas (iid) de la distribución de la cuantía de siniestralidad.

## B. Modelo Colectivo de Riesgo o Teoría del Riesgo Colectivo

Para tratar con grandes colectivos de riesgo es conveniente sustituir la teoría individual del riesgo por la teoría colectiva. Bajo este enfoque la cartera se considera de forma conjunta. Por lo tanto, para construir la siniestralidad de una cartera se debe modelizar el número total de siniestros del periodo y la cuantía de las reclamaciones. De esta forma, el modelo colectivo del riesgo consiste en el empleo de distribuciones<sup>18</sup> de probabilidad tanto para el número de siniestros (distribuciones discretas) como para la cuantía de cada uno de ellos (distribuciones continuas), y mediante la convolución entre las dos variables aleatorias obtener un modelo teórico para la siniestralidad total (véase el gráfico siguiente). Mientras que la Teoría de riesgo individual es empleada en los seguros de vida, la Teoría de riesgo colectivo se emplea en los seguros no vida.



Consideraremos que el número de reclamaciones  $N(t)$  y las cuantías  $X_i$  de las reclamaciones son variables aleatorias independientes, y que las propias reclamaciones son independientes entre sí e idénticamente distribuidas, lo que significa que comparten la misma distribución de probabilidad. La siniestralidad total  $S(t)$  es una variable estocástica, y viene dada por la siguiente fórmula:

<sup>18</sup> Tradicionalmente se consideran las técnicas de ajuste paramétrico a distribuciones teóricas, sin embargo también pueden ser empleadas técnicas de ajuste no paramétrico como la estimación tipo kernel.

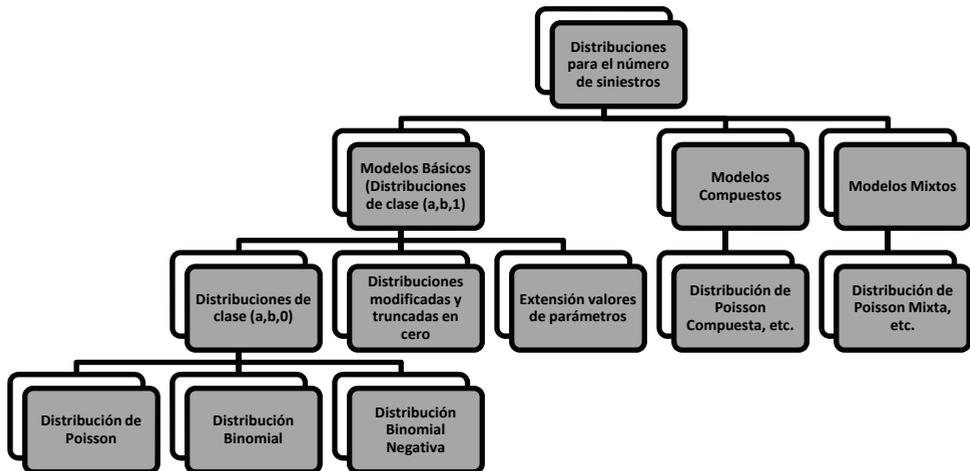
Mediante la ley de probabilidades totales se encuentra la función de distribución de los siniestros agregados  $F_S(s)$  (*aggregate claim amount* o *total amount of claims*):

$$\Pr(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N=n) \Pr(X_1 + X_2 + \dots + X_N \mid N=n)$$

$$F_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) F_X^{*N}(s)$$

A este tipo de distribuciones se les denomina distribuciones compuestas.

Para modelizar el número de siniestros generalmente se emplean las distribuciones discretas teóricas como la Binomial, la Binomial Negativa (BN) y la Poisson. Para modelizar la cuantía de los siniestros existe una amplia gama de distribuciones continuas que pueden ser empleadas. De esta forma podemos hablar dentro del modelo colectivo del riesgo del Modelo Binomial Compuesto, Modelo Binomial Negativo Compuesto y Modelo Poisson Compuesto, en función de la distribución que modele el número de siniestros. Además a estas distribuciones básicas se pueden extender o aplicar modelos compuestos o mixtos.



La distribución de Poisson, Binomial y Binomial negativa, y la geométrica que es una subclase de ésta, son los modelos básicos que pertenecen las distribuciones de la clase  $(a,b,0)$ . En la práctica estas distribuciones pueden proporcionar un ajuste pobre a los datos de reclamaciones cuando el número de individuos que no realice ninguna reclamación sea distinto a los que predicen estos modelos. Por

ello, estas distribuciones pueden ser extendidas a las distribuciones de clase  $(a,b,1)$  que puede solucionar dichos problemas mediante las distribuciones truncadas y modificadas en cero.

Los modelos compuestos se construyen a partir de una distribución primaria y una secundaria. Si la distribución primaria es un modelo Poisson estaremos frente a la familia de distribuciones compuestas de Poisson, si la distribución primaria es una Binomial estaremos frente a la familia de distribuciones compuestas Binomiales, etc. Dentro de la familia de distribuciones compuestas de Poisson, en función de la distribución secundaria nos encontramos con la distribución Poisson-Binomial, la distribución Poisson-Poisson, etc.

Los modelos mixtos se basan en las mezclas de distribuciones, representando una distribución como superposiciones de otras. Un modelo mixto trata a uno o más parámetros de una distribución como aleatorios, y por tanto distribuidos según una función de estructura o distribución de la mezcla  $H$ . La distribución mixta más común es la distribución de Poisson Mixta, que supone que el parámetro  $\lambda$  característico de la distribución de Poisson está distribuido según una función de estructura o distribución de la mezcla  $H$ .

El proceso de Poisson supone que los momentos de tiempo entre los que acontecen siniestros consecutivos están distribuidos exponencialmente. En caso de que esta distribución no sea la adecuada para modelizar el tiempo entre siniestros, pueden emplearse otras distribuciones. El proceso de renovaciones generaliza al proceso de Poisson permitiendo distribuciones alternativas para el período temporal que transcurre entre distintas reclamaciones.

A continuación detallaremos los procesos estocásticos del número de siniestros y de su cuantía, empezando por el primero.

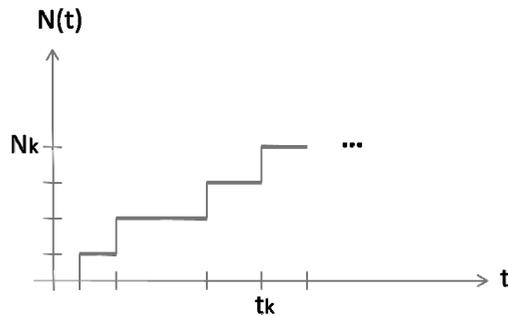
### 3.2. El proceso del número de siniestros

El proceso del número de siniestros (*claim number process*) es un proceso estocástico creciente y discreto, representado por  $N(t)$ <sup>19</sup>. Formalmente  $N(t)$  es el número acumulado de siniestros ocurridos en el intervalo temporal  $(0, t]$ .

$$N(t) = \#\{i \geq 1: T_i \leq t\}, \quad t \geq 0$$

---

<sup>19</sup> Las líneas verticales muestran el incremento unitario en el número de siniestros derivado de la ocurrencia de cada siniestro mientras que las líneas horizontales muestran el tiempo que transcurre hasta la ocurrencia de otro siniestro.



Por tanto  $N(t)$  es una variable aleatoria que toma números enteros y que se puede caracterizar por:

- Las probabilidades simples  $p_n = P(N=n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Sus momentos: la media empírica  $m = E(N)$ , la varianza  $\sigma^2 = Var(N)$ , los momentos de orden  $k$ ,  $m_k = E(N^k)$ , los momentos centrados de orden  $k$   $u_k = E((N-m)^k)$ , la asimetría  $\gamma_1$  y la curtosis  $\gamma_2$ .

En el estudio de la frecuencia de siniestralidad se emplean distribuciones discretas que intentan estimar la probabilidad de que el número de siniestros sea  $n$  en el periodo de tiempo  $(0, t)$ :  $p_n = P(N=n)$ . El principal proceso para describir el número de reclamaciones de una cartera es el proceso de Poisson, que establece que los tiempos entre reclamaciones son independientes entre sí y que cada uno de ellos tiene una distribución exponencial. Sin embargo, en la práctica este proceso no se ajusta bien a las situaciones de tiempo entre reclamaciones que se producen, por lo cual se pueden establecer otros procesos que proporcionan una mayor flexibilidad. El proceso de renovaciones o *renewal process* permite esta mayor flexibilidad al permitir otras distribuciones para el período entre reclamaciones. Otra forma de modelizar la frecuencia siniestral que considera cambios en la intensidad del proceso a lo largo del tiempo consiste en transformar aleatorio el parámetro de la distribución de Poisson ("*mixing parameter*"), de esta forma obtenemos un proceso mixto de Poisson. En el caso de que el parámetro  $\lambda$  característico de la distribución de Poisson se distribuya mediante una Gamma, el proceso resultante es igual a una distribución Binomial Negativa. Esto nos lleva a describir la distribución Binomial Negativa y también la Binomial como alternativas discretas para la modelización del número de siniestros. Finalmente, también estudiaremos los modelos compuestos, donde otra vez se prestará una especial atención a los modelos Poisson compuestos.

### A. La distribución de Poisson

El proceso de Poisson es el proceso más común para el número de reclamaciones siendo empleado por Lundberg (1903) y Cramer (1930), por lo que se dice que la

ley de Poisson es la ley fundamental de los seguros no vida. Al proceso de Poisson se le denomina homogéneo cuando el parámetro  $\lambda$  no cambia con el tiempo. Si el parámetro  $\lambda$  del proceso de Poisson es una función del tiempo se denomina proceso de Poisson con parámetro dependiente o proceso de Poisson no homogéneo. La distribución de Poisson es utilizada cuando el número de reclamaciones satisface las siguientes condiciones:

- El número esperado de siniestros es una función continua de  $t$ .
- Independencia de incrementos (*independence of increments*): El número de siniestros que ocurren en dos intervalos disjuntos de tiempo son variables aleatorias independientes. En la práctica puede haber factores que provoquen que las reclamaciones en distintos períodos estén correlacionadas<sup>20</sup>. Para tratar este problema se puede introducir una variable auxiliar que cambie la propensión al riesgo del proceso, dando lugar a la denominada distribución de Poisson mixta.
- La probabilidad de ocurrencia de un siniestro en un intervalo es proporcional a la longitud o amplitud. Así, mientras mayor es la longitud del intervalo de observación, mayor es el promedio de observaciones realizadas.
- La ocurrencia de un suceso no influye en la ocurrencia de sucesos posteriores. Además, dada la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial<sup>21</sup>, si se toma cualquier momento de tiempo y se empieza a contar desde cero los siniestros a partir de ese momento, se obtiene nuevamente un proceso de Poisson.
- Exclusión de eventos múltiples o multisiniestralidad (*exclusion of multiple claims*). La probabilidad de que en un mismo instante en el tiempo ocurran más de un siniestro y la probabilidad de que en un intervalo finito ocurran un número infinito de eventos es próxima a cero. Daykin *et al.* (1994) establecen que dado que en algunas líneas de negocio es posible que se establezcan más de una reclamación como consecuencia del mismo evento, por lo que para no violar este principio se debe considerar que todas las reclamaciones del mismo evento forman parte de la misma reclamación.
- Se excluyen momentos especiales de ocurrencia, por lo que la probabilidad de que el siniestro ocurra en un momento fijo del tiempo es cero (*exclusion of special time points*). Este hecho es característico de la aleatoriedad de las reclamaciones, lo que no permite predecir el momento temporal en el que van a suceder.

*Ley o función de probabilidad o densidad (mass function)*. La probabilidad de que ocurran exactamente  $k$  siniestros bajo la distribución de Poisson en el periodo considerado viene dada por la siguiente expresión:  $f(k) = p_k = P(N = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  donde  $\lambda > 0$  es el parámetro característico de la distribución de Poisson ya que es su media y varianza, y tiene el significado de “número medio de suce-

<sup>20</sup> Daykin *et al.* (1994) ponen como ejemplos el mayor número de incendios forestales en verano, o en el seguro de vida el efecto contagio y las epidemias.

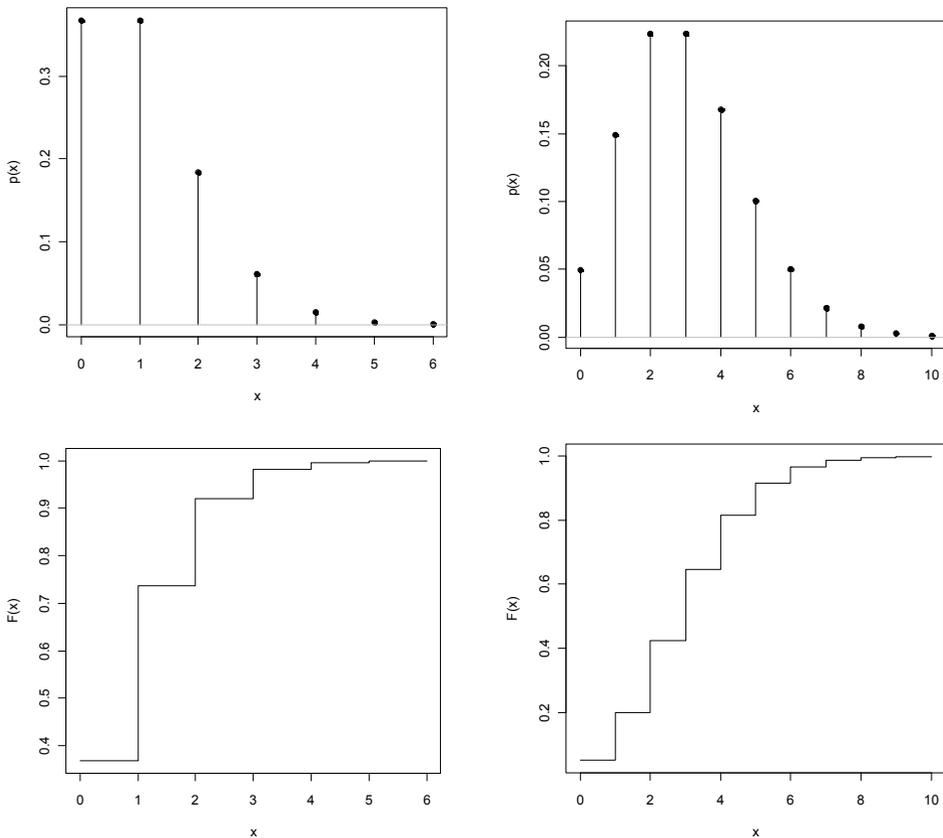
<sup>21</sup> Recuérdese que es la distribución para el tiempo ocurrido entre dos siniestros consecutivos cuando  $N$  sigue una distribución de Poisson.

sos". Por tanto la ley de Poisson depende de un único parámetro, que tiene la ventaja de ser interpretable.

Resulta importante destacar que si el número de siniestros se distribuye mediante una Poisson ( $\lambda$ ) entonces  $N(t) = \#\{i \geq 1: T_i \leq t\}$ ,  $t \geq 0$  donde  $T_n = W_1 + \dots + W_n$ ,  $n \geq 1$ , siendo los períodos temporales entre siniestros  $\{W_i\}_{i=1}^n$  una secuencia de Exponenciales ( $\lambda$ ) iid. Por eso  $W_n = T_n - T_{n-1}$ ,  $n \geq 1$  con  $T_0 = 0$  constituye una secuencia de Exponenciales ( $1/\lambda$ ) iid, y por lo tanto  $W_n$  tiene una distribución Gamma ( $n, 1/\lambda$ ).

*Función de distribución (cumulative function).* La probabilidad acumulada de que ocurran  $k$  siniestros viene dada por la función:  $F(k) = P_k = P(N \leq k) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^k \frac{\lambda^n}{n!}$ .

*Gráfico.* En los siguientes gráficos se muestra la función de densidad de Poisson para  $\lambda = 1$  (arriba izquierda) y  $\lambda = 3$  (arriba derecha). Asimismo, se muestra la gráfica de la función de distribución de Poisson para  $\lambda = 1$  (abajo izquierda) y  $\lambda = 3$  (abajo derecha). Puede observarse que la distribución de Poisson presenta un pico en los valores cercanos a  $\lambda$  y se reduce rápidamente para el resto de valores.



Una de las propiedades más importantes de la distribución Poisson es la aditividad. De esta forma la suma de variables Poisson independientes es también Poisson, con parámetro igual a la suma de los parámetros de cada sumando<sup>22</sup>. Por ejemplo, si en una cartera de pólizas la probabilidad de siniestro para cada individuo es  $q_i$ , entonces el número esperado de siniestros en el año será  $\lambda = \sum_{i=1}^n q_i$ . La aditividad también es heredada por las variables Poisson Compuestas, por lo que se pueden sumar riesgos Poisson Compuestos y formar una cartera Poisson Compuesta, donde el número esperado de siniestros es la suma de los parámetros  $\lambda$  y la distribución de las cuantías o coste de los siniestros será la suma ponderada de las distribuciones individuales, es decir  $G(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} G_i(x)$ .

A modo de ejemplo, considérese que  $S_1, S_2, S_3$  son riesgos independientes con distribución de Poisson compuesta con parámetro  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y funciones distribuciones de distribución de las cuantías  $G_1(x), G_2(x), G_3(x)$  respectivamente. Entonces el riesgo  $S = S_1 + S_2 + S_3$  también sigue una distribución Poisson compuesta de parámetro  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  y la función de distribución de las cuantías es:

$$G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} G_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} G_2(x) + \frac{\lambda_3}{\lambda} G_3(x)$$

### B. Proceso de renovación

El proceso de Poisson homogéneo es un caso particular de un proceso de renovación. Podemos afirmar que un proceso de renovación es una generalización del proceso de Poisson considerando que los tiempos entre reclamaciones no son necesariamente exponenciales. Por lo tanto, es una sucesión infinita de variables aleatorias  $W_1, W_2, \dots$  que son no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.

Formalmente: Sea  $\{W_i\}_{i=1}^n$  una secuencia de variables aleatorias positivas, entonces el camino aleatorio  $T_0 = 0, T_n = W_1 + \dots + W_n, n \geq 1$  se dice que es una secuencia de renovaciones y  $N(t) = \#\{i \geq 1: T_i \leq t\}, t \geq 0$  es el proceso de renovación. De esta forma  $(T_n)$  son los tiempos de ocurrencia (*arrival time*) y  $(W_n)$  es el tiempo entre reclamaciones (*inter-arrival times*) del proceso de renovación respectivamente



La motivación para introducir el proceso de renovación es que un proceso homogéneo de Poisson no describe en la práctica muchas de las situaciones que se presentan, ya que los tiempos  $W_i$  no se distribuyen como Exponenciales  $(1/\lambda)$

<sup>22</sup> Por eso se dice que la distribución de Poisson es reproductiva respecto del parámetro  $\lambda$ .

iid. Un claro ejemplo es en el caso de carteras de negocio donde los tiempos de ocurrencia de los eventos asegurados presenten muchas discontinuidades temporales, como las carteras de riesgos catastróficos. En estos casos otras distribuciones como la lognormal o la Pareto pueden representar mucho mejor la mayor dispersión de los momentos entre reclamaciones consecutivas. Además, en el caso de que modelicemos los siniestros durante períodos largos de tiempo, el proceso homogéneo de Poisson tampoco es del todo adecuado. Por lo que pueden ser empleados otros procesos como el proceso de Poisson con parámetro dependiente o proceso de Poisson no homogéneo donde el parámetro  $\lambda$  es una función del tiempo ( $\lambda(t)$ ), o el proceso de Poisson doblemente estocástico o proceso de Cox (véase Mikosch, 2006).

### C. Distribución Binomial Negativa ( $r, p$ )

Cuando el parámetro de la distribución de Poisson sigue la distribución Gamma, surge la distribución Binomial Negativa ( $r, p$ ). Además si  $r = 1$ , es decir Binomial Negativa ( $1, p$ ), se obtiene la ley geométrica ( $p$ )<sup>23</sup>. La distribución Binomial Negativa se emplea frecuentemente como alternativa a la distribución de Poisson, ya que al tener dos parámetros permite una mayor flexibilidad en la forma de la distribución<sup>24</sup>.

*Ley o función de probabilidad o densidad.* La probabilidad de que ocurran exactamente  $k$  siniestros ( $N = k$ ) bajo la distribución Binomial Negativa en el periodo considerado viene dada por la función

$$f(k) = p_k = P(N = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k = \binom{r}{k} p^r (1-p)^k,$$

siendo " $r$ " un parámetro discreto que representa el número de ensayos o sucesos ( $r > 0$ ), " $p$ " la probabilidad de éxito ( $0 < p < 1$ ), y " $q$ " la probabilidad de fracaso que es igual a  $1-p$ . Una parametrización también utilizada y empleada en Klugman et al., (2008a) es la siguiente

$$f(k) = p_k = P(N = k) = \binom{k+r-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, \text{ en donde } \beta > 0, r > 0 \text{ y } p = \frac{1}{1+\beta}.$$

*Función de distribución.* La probabilidad acumulada viene dada por

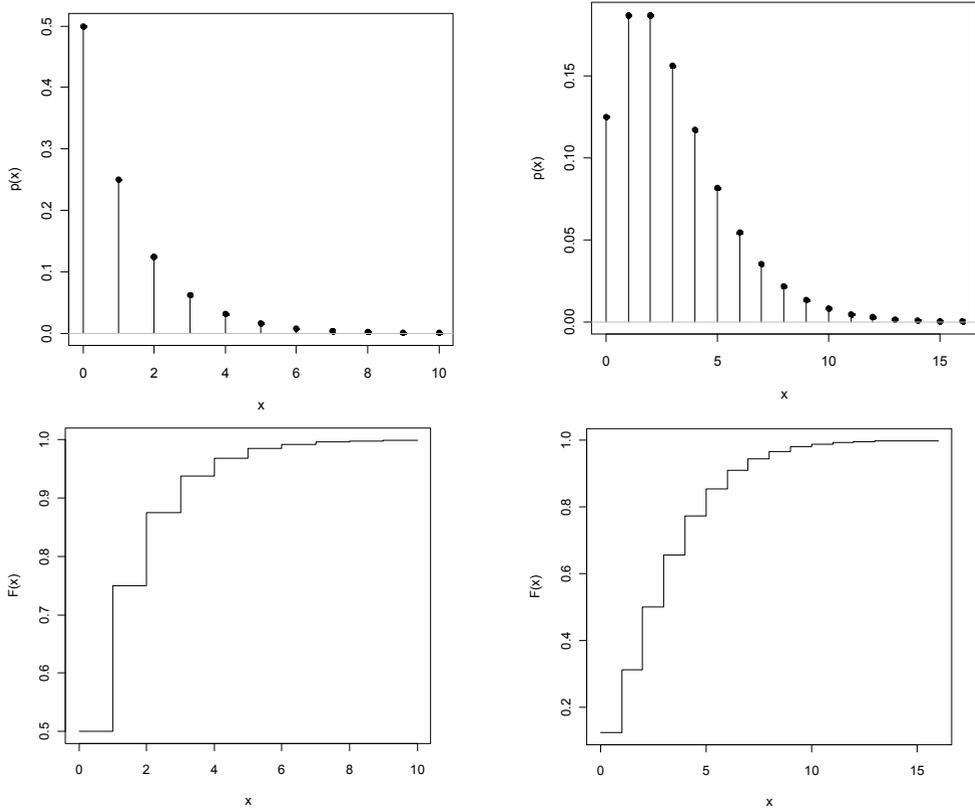
$$F(k) = P_k = P(N \leq k) = p^r \sum_{i=0}^k \binom{r+i-1}{i} q^i = p^r \sum_{i=0}^k \binom{r+i-1}{i} (1-p)^i.$$

<sup>23</sup> La distribución geométrica tiene una función de densidad  $f(k) = p_k = P(N = k) = p(1-p)^k$ . A veces se dice que la distribución geométrica es la distribución análoga en el caso discreto a la Exponencial, debido a que ambas presentan pérdida de memoria.

<sup>24</sup> Se dice que la distribución Binomial Negativa es una generalización de la distribución de Poisson al menos de dos maneras: la primera como una distribución de Poisson mixta en donde la distribución *mixing* es una Gamma, y la segunda como una distribución de Poisson compuesta en donde la distribución secundaria es logarítmica.

En esta distribución dado que  $\beta > 0$  la varianza es superior a la media lo que indica que hay contagio, esto es, que existe heterogeneidad en la cartera. Por esta razón esta distribución se emplea en la modelización de siniestros originados por fenómenos donde existe un “contagio positivo” como en el caso de epidemias, terremotos, huracanes, etc.

**Gráfico.** En el siguiente gráfico se muestra la función de cuantía y de distribución de la Binomial Negativa para  $p = 0,5$  y  $r = 1$  y  $r = 3$  (derecha).



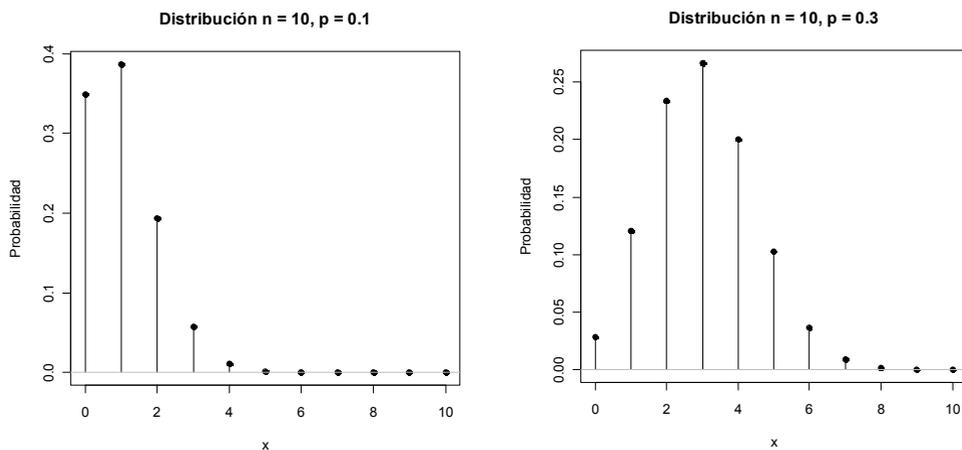
#### D. La distribución Binomial ( $n, p$ )

La distribución Binomial es otra distribución empleada para la modelización del número de siniestros de una cartera, especialmente útil para los casos en los que la media del conjunto de datos exceda a la varianza.

**Ley o función de probabilidad o densidad.** La probabilidad de que ocurran exactamente  $k$  siniestros ( $0 \leq k \leq n$ ) bajo la distribución Binomial en el periodo considerado es

$$f(k) = p_k = P(N = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

**Función de distribución.** Mientras que la probabilidad acumulada viene dada por  $F(k) = P_k = P(N \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ , siendo “n” el número de ensayos ( $n > 0$ ), “p” la probabilidad de éxito ( $0 < p < 1$ ) y “q” la probabilidad de fracaso= $1 - p$ . En el siguiente gráfico se muestra la distribución de Binomial para  $n = 10$  y  $p = 0,1$  (izquierda) y  $p = 0,3$  (derecha).



En la siguiente tabla se muestra un resumen de las tres principales distribuciones empleadas para modelizar el número de siniestros.

Nombre	$\Pr[N = n]$	Parámetros	Media	Varianza	Identificación
Poisson( $\lambda$ )	$\frac{e^{-\lambda} * \lambda^k}{k!}$	$\lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$	$E(N)=Var(N)$
Binomial( $n,p$ )	$\binom{n}{k} q^{n-k} p^k$	$p \in [0,1]$ $q = 1 - p$ $n \in \mathbb{N}$	$np$	$Npq$	$E(N)>Var(N)$
Binomial Negativa( $r,p$ )	$\binom{k+r-1}{k} q^k p^r$	$p \in [0,1]$ $q=1-p$ $r \in \mathbb{N}$	$rq/p$	$rq/p^2$	$E(N)<Var(N)$

### E. La clase de distribuciones (a,b,0)

Se dice que una variable aleatoria X con función de probabilidad  $p_k = P(X = k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  pertenece a la clase de distribuciones (a,b,0) si cumple para las cons-

tantes  $a$  y  $b$  la siguiente condición  $\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  con  $p_0 > 0$ . Lo que equivale a  $p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  con  $p_0 > 0$ .

La clase de distribuciones  $(a, b, 0)$  es una clase de dos parámetros  $a$  y  $b$ , que toman distintos valores en función de la distribución. Las distribuciones Poisson, Binomial, Binomial Negativa y Geométrica son las únicas distribuciones de esta clase.

Distribución	$a$	$b$	$p_0$
Poisson ( $\lambda$ )	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
Binomial( $n, p$ )	$-\frac{p}{(1-p)}$	$\frac{(k+1)p}{(1-p)}$	$(1-p)^n$
Binomial Negativa ( $r, p$ ) <sup>25</sup>	$1-p$	$(r-1)(1-p)$	$p^r$
Geométrica ( $p$ ) <sup>26</sup>	$1-p$	0	$p$

Klugman *et al.* (2008a) proponen reescribir la fórmula recursiva de la siguiente manera  $k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ka + b$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . De forma que la expresión del lado izquierdo es una función lineal en  $k$ . La pendiente  $a$  de la línea será 0 para la distribución de Poisson, positiva para la Binomial Negativa (y por tanto Geométrica) y negativa para la Binomial. De esta forma en base al análisis gráfico de la representación de la ratio  $k \frac{n_k}{n_{k-1}}$  frente a  $k$  podemos inferir la distribución que mejor puede ajustar a los datos<sup>28</sup>. Este análisis puede ser completado comparando la varianza a la media de los datos.

<sup>25</sup> Para la notación BN( $r, \beta$ ), los valores de los parámetros son:  $a = \frac{\beta}{1+\beta}$ ,  $b = (r-1) \frac{\beta}{1+\beta}$  y  $p_0 = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r$ .

<sup>26</sup> A veces se emplea la notación Geométrica ( $\beta$ ), en cuyo caso los valores de los parámetros son:  $a = \frac{\beta}{1+\beta}$ ,  $b = 0$  y  $p_0 = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)$ .

<sup>27</sup> Debe advertirse que  $k \frac{\hat{p}_k}{\hat{p}_{k-1}} = k \frac{n_k}{n_{k-1}}$

<sup>28</sup> Esta técnica no funciona para valores de  $n_k = 0$ .

### Ejemplo. Cálculo de las probabilidades mediante la fórmula recursiva.

Sea una Poisson (0,5) calcularemos las probabilidades para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  mediante la fórmula recursiva.

Para la Poisson  $p_0 = e^{-\lambda}$  y  $p_k = \binom{\lambda}{k} p_{k-1}$   $k = 1, 2, \dots$

$$p_0 = e^{-\lambda} = e^{-0,5} = 0,607$$

$$p_1 = (\lambda/1)p_0 = 0,303$$

$$p_2 = (\lambda/2)p_1 = 0,076$$

$$p_3 = (\lambda/3)p_2 = 0,013$$

$$p_4 = (\lambda/4)p_3 = 0,002$$

### F. La clase de distribuciones $(a, b, 1)$

En la práctica las distribuciones de la clase  $(a, b, 0)$  pueden proporcionar un ajuste pobre a los datos de reclamaciones, que puede ser solucionado con las distribuciones truncadas y modificadas en cero. De esta forma cuando la posibilidad de ocurrencia de una pérdida es baja, la probabilidad asociada al valor cero debe ser alta. De forma contraria, puede haber situaciones en las que la probabilidad de que no ocurra ninguna reclamación sea muy baja o incluso nula. Estas situaciones pueden ser tratadas mediante el empleo de la clase de distribuciones  $(a, b, 1)$ .

La clase de distribuciones  $(a, b, 1)$  o distribución de Sundt y Jewel (1981) extiende la clase  $(a, b, 0)$ . De esta forma, se dice que una variable aleatoria  $X$  con función de probabilidad  $p_k = P(X=k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  pertenece a la clase de distribuciones  $(a, b, 1)$  si cumple para las constantes  $a$  y  $b$  la siguiente condición  $\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$ . Lo que equivale a  $p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$ .

La clase de distribuciones  $(a, b, 1)$  viene determinada por las constantes  $a$ ,  $b$  y la probabilidad en 1,  $p_1$ . Esta es la única diferencia respecto a la clase  $(a, b, 0)$ , ya que ahora la recursión empieza en  $p_1$  y no en  $p_0$ . De esta forma, la clase  $(a, b, 1)$  contiene a la clase  $(a, b, 0)$  y las subclases o versiones truncadas y modificadas en cero, distinguiéndose entre las situaciones en las que  $p_0 = 0$  y  $p_0 > 0$ .

La primera subclase ( $p_0 = 0$ ) se corresponde con las distribuciones truncadas en cero (*zero-truncated distributions, ZT*) y sus miembros son la distribución truncada en cero Binomial, la distribución truncada en cero Poisson, la distribución truncada en cero Binomial Negativa y la distribución truncada en cero Geométrica<sup>29</sup>.

<sup>29</sup> Las distribuciones truncadas en cero pueden verse alternativamente como distribuciones modificadas en cero con la modificación particular de que  $p_0 = 0$ .

La segunda subclase ( $p_0 > 0$ ) se corresponde con las distribuciones modificadas en cero (*zero-modified distributions, ZM*) ya que la probabilidad de  $p_0$  se modifica respecto a las de la clase  $(a,b,0)$  a un valor arbitrario<sup>30</sup>. Sus miembros son la distribución modificada en cero Binomial, la distribución modificada en cero Poisson, la distribución modificada en cero Binomial Negativa y la distribución modificada en cero Geométrica.

Emplearemos siguiendo a Klugman *et al.* (2008a) la siguiente notación:  $p_k$  se emplea para las probabilidades de la clase  $(a,b,0)$ ,  $p_k^T$  para las probabilidades de la distribución truncada y  $p_k^M$  para las probabilidades de la distribución modificada. De esta forma podemos obtener las probabilidades de la distribución truncada en cero y modificada en cero a través de las siguientes fórmulas:

Para obtener las probabilidades  $p_k^T$  a partir de  $p_k$  emplearemos:

$$p_k^T = \frac{p_k}{1 - p_0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Para obtener las probabilidades  $p_k^M$  a partir de  $p_k$  emplearemos:

$$p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

### Ejemplo. Cálculo de las probabilidades de la distribución truncada y modificada en cero.

Sea una distribución binomial negativa de parámetros  $p = 2/3$  y  $r = 5$ , calcularemos las probabilidades de la distribución ZT BN (distribución binomial negativa truncada en cero) y la distribución ZM BN (distribución binomial negativa modificada en cero)

El primer paso consiste en obtener las probabilidades  $p_k$  de la BN con los parámetros especificados. Para ello emplearemos la fórmula recursiva:

$$p_0 = p^r = (2/3)^5 = 0,132$$

Además sabemos que  $a = (1 - p) = 1/3$  y que  $b = (r - 1)(1 - p) = 4/3$   
Por lo tanto

$$p_1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4/3}{1}\right) p_0 = 0,219$$

$$p_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4/3}{2}\right) p_1 = 0,219$$

Y así sucesivamente Para obtener las probabilidades de la distribución ZT BN debemos reescalar las nuevas probabilidades  $p_k^T$  a partir de  $p_k$ , para que siendo

<sup>30</sup> Las distribuciones modificadas en cero pueden verse alternativamente como una mezcla de una distribución de clase  $(a,b,0)$  y una distribución degenerada que asigna toda la probabilidad al cero.

$p_0^T = 0$  el resto sumen uno. Para ello, a partir de la probabilidad original  $p_0=0,132$ , obtenemos que las nuevas probabilidades se derivan de las antiguas multiplicadas por el factor  $1/(1 - 0.132)$ . Es decir, para  $p_0^T = 0$  por definición y para el resto aplicamos la fórmula  $p_k^T = \frac{p_k}{1-p_0}$ . De esta forma:

$$p_0^T = 0$$

$$p_1^T = \frac{p_1}{1-0,132}=0,253$$

$$p_2^T = \frac{p_2}{1-0,132}=0,253$$

Y así sucesivamente Para obtener las probabilidades de la distribución ZM BN debemos re-escalar las nuevas probabilidades  $p_k^M$  a partir de  $p_k$ , para que siendo  $p_0^M = \text{arbitrario}$  el resto sumen uno. Para ello, a partir de la probabilidad original  $p_0 = 0,132$ , obtenemos que las nuevas probabilidades se derivan de las antiguas multiplicadas por el factor  $(1 - p_0^M)/(1 - 0.132)$ . Supongamos que  $p_0^M = 0,5$  (el factor será igual a 0,576) para el resto de probabilidades aplicamos la fórmula  $p_k^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0} p_k$ . De esta forma:

$$p_0^M = 0,5$$

$$p_1^M = 0,576p_1=0,126$$

$$p_2^M = 0,576p_2=0,126$$

Y así sucesivamente. En el siguiente cuadro se resumen los resultados obtenidos.

<b>k</b>	<b><math>p_k</math></b>	<b><math>p_k^T</math></b>	<b><math>p_k^M</math></b>
0	0,132	0	0,500
1	0,219	0,253	0,126
2	0,219	0,253	0,126
3	0,171	0,197	0,098
4	0,114	0,131	0,066
5	0,068	0,079	0,039
6	0,038	0,044	0,022

Además de las distribuciones truncadas y modificadas en cero, la clase de distribuciones  $(a,b,1)$  permite distribuciones adicionales. De esta forma los parámetros de la distribución  $(a,b)$  pueden expandir sus valores. Para el caso de la Binomial Negativa surge la distribución ETNB o distribución binomial negativa truncada extendida (*extended truncated negative binomial*) que tiene por parámetros  $p > 0$  y  $r > -1, r \neq 0$  (recuérdese que la distribución BN requería que  $r > 0$ ). En la siguiente tabla se resumen las principales distribuciones de la clase  $(a,b,1)$ .

Poisson ZT Poisson ZM Poisson	Binomial ZT Binomial ZM Binomial	Binomial Negativa ZT BN ZM BN ETNB ZM ETNB	Geométrica ZT Geométrica ZM Geométrica
-------------------------------------	--	--	--

### G. Distribuciones compuestas para la frecuencia

Las distribuciones compuestas para la frecuencia son una clase de distribuciones muy amplia, que permiten una modelización del número de siniestros a partir de dos distribuciones discretas. De esta forma se dice que una variable aleatoria  $S$  se distribuye como una distribución compuesta cuando su función generatriz de momentos se puede escribir como  $P_S(z) = P_N[P_M(z)]$ , siendo la variable aleatoria  $N$  con función generatriz  $P_N(z)$  la función de distribución primaria, y la variable  $M$  con función generatriz  $P_M(z)$  la función de distribución secundaria.

Un ejemplo clásico de una distribución compuesta para la frecuencia es la distribución Poisson- Poisson o distribución de Neyman Tipo A, en donde tanto  $N$  como  $M$  tienen una distribución de Poisson. Es decir:  $P_N(z) = e^{\lambda_1(z-1)}$  y  $P_M(z) = e^{\lambda_2(z-1)}$ . Por lo que se obtiene que  $P_S(z) = P_N[P_M(z)] = e^{\lambda_1[e^{\lambda_2(z-1)}-1]}$ . Sin embargo, existe una amplia gama de distribuciones compuestas para modelizar el número de siniestros como la: Poisson-ETNB, Poisson-Logarítmica (que equivale a la distribución Binomial Negativa), Poisson-Binomial, Binomial-Geométrica, etc.

### H. Distribuciones mixtas para la frecuencia

Muchas de las distribuciones compuestas para el número de siniestros pueden ser originadas a través de los modelos mixtos para la frecuencia. Un modelo mixto trata a uno o más parámetros de una distribución como aleatorios. La distribución mixta puede ser de tipo discreto o continuo o incluso una combinación de ambas. Un modelo mixto discreto (continuo) es una distribución mixta donde la función estructura o *mixing* es de tipo discreto (continuo). Un ejemplo de distribución mixta discreta es la mixtura de dos distribuciones de Poisson, cada una con parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en donde las probabilidades de obtener  $k$  siniestros vienen dadas por:  $p_k = p \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k}{k!} + (1-p) \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^k}{k!}$ . Las distribuciones mixtas discretas más comunes son la Distribución Mixta de Poisson – Gamma o la Distribución Mixta de Poisson – Inversa Gaussiana. Sin embargo, es posible el empleo de otro tipo de distribuciones mixtas.

#### La distribución de Poisson mixta (Mixed Poisson)

En ocasiones el comportamiento del parámetro  $\lambda$  que caracteriza a la distribución Poisson no puede precisarse como una constante a lo largo del tiempo, lo que puede ocurrir por alguna de las siguientes razones:

- La probabilidad de producir siniestros es heterogénea en el tiempo, debido a la evolución de la cartera.
- Existe contaminación positiva, por lo que el hecho de que se presente una reclamación puede provocar otras.
- Fluctuaciones aleatorias de corto plazo en el valor del parámetro  $\lambda$ .

La distribución de Poisson mixta añade aleatoriedad en el parámetro  $\lambda$  de la distribución de Poisson, que pasa a ser ahora una variable aleatoria  $\Lambda$  denominada “variable de estructura o de mixtura” (*structure variable* o *variable mixing*) distribuida según la función de distribución o “función de estructura o de mixtura”  $H$ . La probabilidad de que ocurran  $k$  siniestros en el periodo de tiempo dado viene dada por

$$p_k(H) = P(N = k) = \int_0^\infty P(N = k/\Lambda = \lambda) dH(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} dH(\lambda).$$

La media o esperanza de la variable aleatoria  $\Lambda$  que se distribuye como una Poisson mixta, coincide con la media del parámetro de Poisson que varía aleatoriamente y que conserva el significado de “tasa media de siniestros”. Una diferencia fundamental entre un proceso de Poisson Mixto y un proceso de Poisson homogéneo que es que pese a que ambos tengan la misma media, la varianza del proceso de Poisson mixto es superior, ya que su varianza es mayor que la esperanza lo que se denomina como propiedad de sobredispersión (*over-dispersion*), es decir,  $\text{var}(N(t)) > E(N(t))$ , fenómeno que ha sido encontrado frecuentemente al analizar datos reales.

#### *Poisson-Gamma*( $r, B$ ).

En el caso particular en que la variable estructura siga una distribución Gamma de parámetros  $r$  y  $B$ , la distribución del número de siniestros es Binomial Negativa o proceso Polya con parámetros  $r = r$  y  $p = \frac{B}{B+1}$ . Por eso se dice que la ley Binomial Negativa es una modelización natural de la heterogeneidad en la frecuencia de una clase de pólizas. Por tanto, si  $\Lambda$  está distribuida según la ley Gamma ( $r, B$ ) de densidad  $h(\lambda) = \frac{B^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-B\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , obtenemos la probabilidad  $p_k = P(N = k) = \int_0^\infty \frac{B^r}{\Gamma(r)k!} \lambda^{k+r-1} e^{-(B+1)\lambda} d\lambda$ , por lo que sigue una ley Binomial Negativa  $\left(r, \frac{B}{B+1}\right)$ .

Otra clase de distribuciones mixta de Poisson empleada en la práctica es la distribución Poisson en donde la variable estructura se distribuye según una Normal Invertida (*Poisson-Inverse Gaussian*).

#### *La Poisson mixta de r clases o tipos*

Si una cartera está compuesta por  $r$  tipos de riesgos, entonces podemos aproximar la función estructura discretizando la función de estructura  $H$ , obteniendo  $\lambda_r$  intensidades cada una con su probabilidad asociada. El caso más sencillo es suponer que existen dos tipos de riesgos: los riesgos buenos con probabilidad  $p$  e intensidad  $\lambda_1$  y los ries-

gos malos con probabilidad  $1-p$  e intensidad  $\lambda_2$ , siendo  $\lambda_2 > \lambda_1$ . Esta distribución recibe el nombre de distribución Mixta Poisson-Poisson o Poisson Mixta de dos clases. Por lo tanto la distribución del número de siniestros, dependerá de los parámetros  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1$  y  $p$ , y tendrá la siguiente forma  $f(k) = p_k = p \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k}{k!} + (1-p) \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . En el caso general de  $r$  tipos de riesgo, cada uno con su intensidad  $\lambda_r$  y probabilidad  $p_r$  tendrá la forma  $f(k) = \sum_{i=1}^r p_r \frac{e^{-\lambda_r} \lambda_r^k}{k!}$ .

La siguiente tabla muestra que varias distribuciones pueden ser obtenidas de forma alternativa como distribuciones compuestas o distribuciones mixtas a partir de la Poisson.

Nombre	Distribución secundaria en la Distribución Compuesta	Función de estructura ( <i>mixing distribution</i> ) en la Distribución Mixta
Binomial Negativa	Logarítmica	Gamma
Poisson-Poisson o Newman-A	Poisson	Poisson
Poisson-Inversa Gaussiana	ETNB con $r = -0,5$	Inversa Gaussiana

### 3.3. Modelización de la frecuencia relativa siniestral

Hasta este momento se han expuesto los principales modelos para el número de reclamaciones que se producen en un período de tiempo. Las distribuciones comúnmente empleadas para el número de siniestros, por tener un buen ajuste a los datos históricos, son la distribución discreta de Poisson, la Binomial o la Binomial negativa. Cuando analizamos datos a lo largo del tiempo del número medio anual puede que su valor varíe. Esto puede ser consecuencia de tendencias, ciclos, oscilaciones a corto plazo o simplemente de fluctuaciones aleatorias (Daykin *et al.*, 1994<sup>31</sup>). Las fluctuaciones aleatorias pueden ser tratadas por la distribución de Poisson simple o la Binomial y para tratar con tendencias, ciclos y oscilaciones empleábamos la Poisson mixta, donde era común el empleo de una distribución Gamma para la función de estructura dando como resultado la distribución Binomial Negativa. Un inconveniente de este tipo de métodos es que sus parámetros debieran ser ajustados en caso de que existan aumentos o reducciones en el número de exposiciones al riesgo de la cartera, es decir deben ajustarse los modelos de probabilidad a los efectos del crecimiento o reducción de la cartera. Es decir, si el volumen de un conjunto de pólizas ha venido siendo constante a lo largo de los últimos años, po-

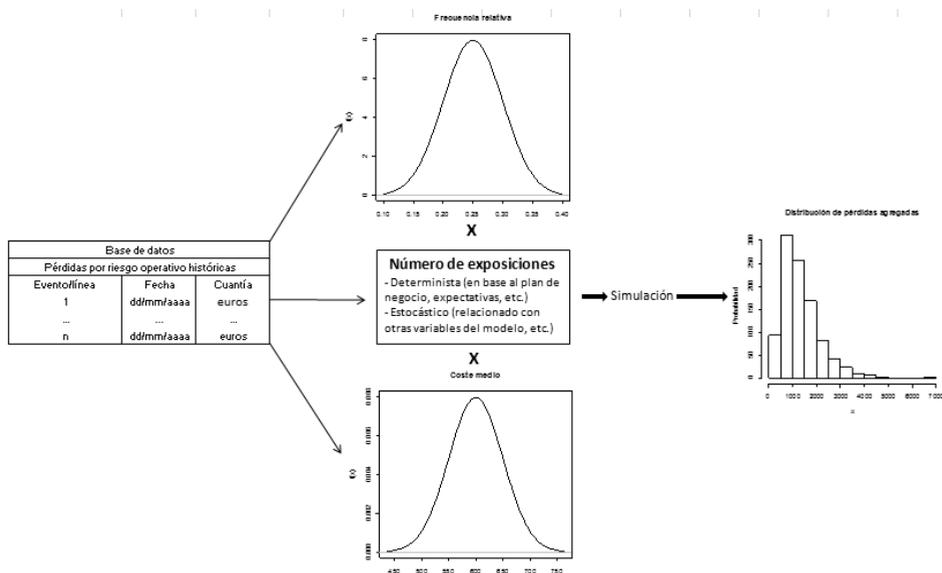
<sup>31</sup> Las tendencias serían lentos movimientos en las probabilidades de las reclamaciones como consecuencias de avances de la medicina que produzcan caídas en las tasas de mortalidad, etc. Los ciclos son variaciones periódicas en la propensión al riesgo como consecuencia de ciclos económicos, etc. Las oscilaciones a corto plazo son efectos de corta duración como las variaciones estacionales, etc. (Daykin *et al.*, 1994)

demos considerar que los métodos anteriores son teóricamente adecuados para modelizar el número de siniestros. Pero existe un problema cuando el volumen de negocio ha venido variando o se prevé que varíe en el futuro.

Otra alternativa consiste, en vez de modelizar la frecuencia absoluta de los siniestros, modelizar la frecuencia relativa. Esta técnica se puede emplear para los riesgos de masa donde tenemos un amplio volumen de datos. La frecuencia relativa se define como la proporción o porcentaje que representa el número de siniestros en relación del número de exposiciones al riesgo. Si empleamos la frecuencia media o relativa en vez del número de siniestros, la siniestralidad última total de la compañía puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$\text{Coste último} = \text{Frecuencia relativa} \cdot \text{Coste medio (CM)} \cdot \text{Exposición}$$

En el gráfico inferior se describe el proceso a partir del ajuste a los datos históricos seguido para simular la siniestralidad agregada a partir de las tres variables anteriores, en las cuales el coste medio y la frecuencia absoluta son variables aleatorias mientras que el número de exposiciones puede ser determinista o estocástico.



La ventaja de optar por la frecuencia relativa y no el número de reclamaciones es la mayor estabilidad de los datos históricos de frecuencia. Es decir, una compañía que realice una expansión de su negocio, aumentará el número de pólizas suscritas, lo que provocará presumiblemente el aumento del número de siniestros. Sin embargo, la frecuencia relativa (o número de siniestros por póliza) se presupone más estable. De esta forma, la cuantía de los pagos viene determinada por la frecuencia relativa de los siniestros, a partir de la cual se determina el número de

siniestros que se producen dentro de un colectivo, y del coste medio por siniestro. Para efectuar esta simulación se debe seleccionar una *proxy* de la exposición, que generalmente es el número de exposiciones al riesgo. Sin embargo, podría establecerse en función de otras variables como: volumen de primas suscritas, número de pólizas, número de asegurados, etc.

En el caso de modelizar la frecuencia absoluta empleábamos distribuciones discretas, mientras que en este caso se utilizan distribuciones continuas. La distribución normal se presenta como un primer candidato a ser empleada, debido a sus propiedades estadísticas. Sin embargo, cualquier otra distribución puede ser empleada en la medida que presente un mejor ajuste a los datos y previa validación de los resultados proyectados. Esta es la alternativa para modelizar el número de siniestros que emplea el modelo Dynamo 3, y facilita mucho el proceso de simulación de la siniestralidad agregada ya que no se necesita realizar la convolución de las distribuciones, sino que simplemente deben ser multiplicados los valores de coste, frecuencia y número de exposiciones en cada simulación.

#### **3.4. Modelización de la cuantía de los siniestros**

La cuantía, severidad o coste de un siniestro es una variable aleatoria continua. En su modelización se puede emplear una gama amplia de distribuciones. Tradicionalmente se le ha prestado importancia al comportamiento de la distribución empleada ante la operación de convolución necesaria para el cálculo de la distribución de siniestros agregados. Ello llevaba a la conveniencia de utilizar distribuciones continuas fáciles de convolucionar como la distribución Normal, Exponencial, Gamma, etc. Sin embargo, debido a que en la actualidad es común el empleo de la simulación de las distribuciones de pérdidas, se permite el empleo de la distribución de mejor ajuste a los datos.

En este apartado realizaremos primero una diferenciación de las distintas distribuciones que pueden ser empleadas para la modelización de la cuantía de los siniestros. Posteriormente analizaremos el proceso de construcción de la distribución de la cuantía de un siniestro. Finalmente, se describen las principales distribuciones empleadas.

##### *A. Distribuciones de cola suave y gruesa*

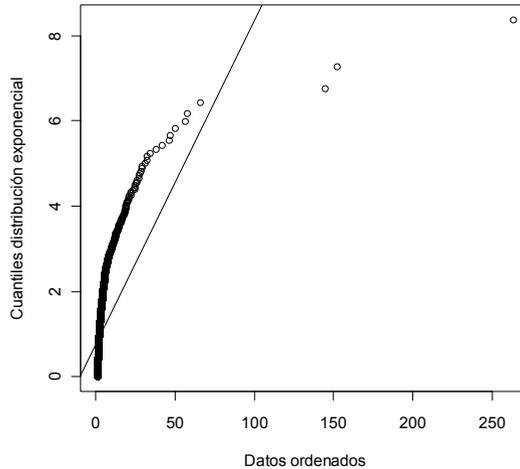
Antes de establecer las distribuciones más empleadas para la modelización de la cuantía de los siniestros es útil aclarar la distinción entre distribuciones de cola gruesa y distribuciones de cola ligera o suave. En un contexto de análisis de siniestralidad, las distribuciones de cola gruesa son aquellas peligrosas para una compañía aseguradora, ya que asignan una mayor probabilidad de reclamaciones elevadas que una distribución de cola ligera. Puede establecerse una clasificación de las distribuciones basada en los momentos, comparando el ratio de las funciones de supervivencia, basándose en la función de azar o estableciendo la comparación con la distribución exponencial.

La clasificación de las distribuciones basada en los momentos establece que si una distribución tiene todos los momentos positivos tendrá una cola suave, mientras que si sólo existen momentos positivos a partir de cierto valor o éstos no existen tendría una cola derecha pesada. La clasificación de la distribución se puede realizar comparando el ratio de las funciones de supervivencia. En este sentido, una distribución tiene una cola más pesada que otra distribución si la ratio de las dos funciones de supervivencia tiende a infinito, estando la distribución de cola gruesa en el numerador. El tercer método para la clasificación de una distribución consiste en emplear la función de riesgo (*hazard function*). Las distribuciones con funciones decrecientes tienen colas gruesas mientras que las distribuciones con funciones de azar crecientes tienen colas ligeras. Sin embargo, la forma más común de discriminar o caracterizar el grosor de las colas de una distribución es estableciendo como referencia la distribución exponencial. De esta forma, si  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty$  para algún  $\lambda > 0$ , donde  $\bar{F}(x)$  es la función de supervivencia, es decir,  $1 - F(x)$ ,  $F$  es una distribución de cola ligera. En cambio será una distribución de cola gorda si  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0$  para todo  $\lambda > 0$ .

Para discriminar entre distribuciones de colas gordas y colas suaves también se pueden emplear herramientas gráficas de análisis como los gráficos QQ y el gráfico de excesos medios (*mean plot* o *me-plot*) (Mikosh, 2006). El gráfico QQ representa los cuantiles o valores de la inversa de la función de distribución teóricos frente a los empíricos<sup>32</sup>. Los datos empíricos estarán bien ajustados por una distribución teórica en la medida en que el gráfico tenga apariencia de línea recta. Si representamos en un gráfico QQ los cuantiles empíricos de nuestros datos frente a los de teóricos proporcionados por la distribución exponencial, y observamos que para valores elevados el gráfico se acuesta, es decir, los cuantiles empíricos son menores que los teóricos, nos estaría indicando que los datos presentan una cola más gorda que la de la distribución exponencial.

---

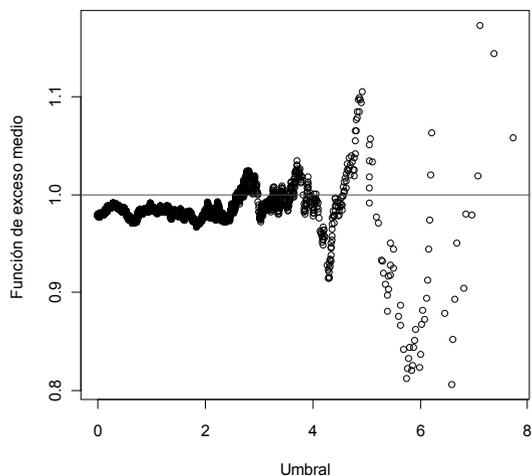
<sup>32</sup> Mikosh (2006) destaca que las cuatro principales utilidades de los gráficos QQ son: la comparación de distribuciones, ya que la distribución de mejor ajuste será aquella cuyo gráfico sea una línea recta; la detección de *outliers* o valores atípicos; detección de variaciones en localización, escala o asimetría; y finalmente el análisis de la suavidad de la cola de la distribución.



La otra herramienta gráfica para apreciar el grosor de la cola de la distribución empírica es el gráfico de excesos medios (*mean plot* o *me-plot*). Este gráfico permite diferenciar en función de su forma el tipo de distribución que mejor se ajuste a los datos observados. Este gráfico ya ha sido tratado en detalle en la Teoría del Valor Extremo, por lo que a continuación se expone en brevedad. El gráfico empírico de exceso medio es la representación de la función empírica de exceso medio  $\hat{e}_n(u)$  (variable dependiente) frente a los valores de los umbrales  $u$  (variable independiente). La función de exceso medio (*mean excess function*) o valor medio en exceso del umbral  $u$ <sup>33</sup>, es el valor medio esperado una vez se ha superado la prioridad  $u$ , es decir,  $e_{(u)} = E(X - u | X > u) = \int_0^\infty x dF_u(y)$ .

La función de exceso medio de una distribución exponencial ( $\lambda$ ) es  $e_{(u)} = \lambda^{-1}$ ,  $u > 0$ . Esto hace única a la distribución exponencial ya que  $e_{(u)}$  es constante para cualquier valor positivo de  $u$ . Por tanto, al representar en un gráfico  $u$  en el eje de horizontal y  $e_{(u)}$  en el eje vertical tendremos una línea horizontal. Por otra parte, si tenemos una distribución  $F$  en la que  $e_{(u)}$  converja a infinito cuando  $u$  tienda a infinito, entonces podemos decir que  $F$  es una distribución de cola gruesa. Por el contrario, si para la distribución  $F$   $e_{(u)}$  converge a un valor constante finito cuando  $u$  tienda a infinito, entonces podemos decir que  $F$  es una distribución de cola suave. El siguiente gráfico muestra un gráfico *meplot* para una realización de 10.000 datos simulados de una distribución exponencial estándar, siendo la línea horizontal la representación de función de excesos teórica.

<sup>33</sup> El valor  $e_{(u)}$  se denomina valor medio o esperado sobre el valor del umbral  $u$  (*mean over the threshold value*). Este valor toma distintos nombres en distintos contextos. A modo de ejemplo en la gestión del riesgo se le conoce como función de pérdida esperada o *expected shortfall*, en el análisis de la siniestralidad representa la función de siniestros esperados en exceso sobre un valor (*mean excess loss function*).



### B. Construcción de la distribución de la cuantía de un siniestro

A partir de la experiencia histórica del coste de los siniestros debemos estimar una distribución que se ajuste a los datos para permitir la modelización del coste futuro. Cuando los datos observados corresponden a distintos períodos de observación, resulta imprescindible homogeneizar las cantidades teniendo en cuenta fundamentalmente el efecto de la inflación. Por tanto, las cantidades pueden ser establecidas sobre un año base, teniendo en cuenta un índice de precios que puede ser general o específico de la línea de negocio considerada en función de sus características. Otro aspecto importante cuando recogemos datos de distintos períodos es evaluar posibles tendencias en dichos valores una vez considerado el ajuste por inflación, ya que indicaría que la estructura de riesgo de nuestra cartera estaría variando en el tiempo. Considerados estos dos principales factores, estaremos en disposición de emplear un modelo para la distribución de coste de los siniestros.

Siguiendo a Daykin *et al.* (1994) el modelo usado para la distribución de los costes de los siniestros se puede clasificar en tres tipos básicos: forma analítica, forma discreta y el modelo basado en los momentos derivados de los datos empíricos. Estos tres métodos pueden ser combinados en la práctica subdividiendo el rango de la distribución del coste de los siniestros. Sin embargo, como citan los autores cada modelo es más apropiado en un contexto. La forma analítica, es decir el empleo de modelos teóricos, es la forma más empleada en la literatura actuarial y permite la simulación de la siniestralidad futura por el método de Monte Carlo. El método basado en los momentos puede ser empleado cuando se emplean aproximaciones (Normal, *Normal Power*, etc.) para la distribución de siniestralidad agregada, ya que sólo necesitamos conocer la media, desviación y asimetría de los datos observados. El método discreto o *tabular*, es decir el empleo de un modelo empírico, puede ser empleado cuando existe una gran cantidad de datos empíricos, por lo que su uso se restringe a los siniestros que no alcancen volúmenes elevados. Sin embargo, puede ser empleado para simular los valores de si-

niestralidad en conjunción al modelo paramétrico de forma que se divida el rango de posibles valores en dos partes: las reclamaciones efectuadas hasta cierto límite pueden ser tratadas por el método empírico, mientras que la cola es reemplazada por una función de distribución analítica. En la siguiente tabla se resumen los principales modelos para el análisis de la cuantía de siniestralidad y las ventajas/desventajas que tiene cada modelo.

Tipo modelo	Ventajas/Desventajas
Empírico	<ul style="list-style-type: none"> <li>- No necesita hipótesis sobre la distribución subyacente que genera los datos.</li> <li>- Necesidad de gran cantidad de datos empíricos, por lo que no se suele aplicar a siniestros de grandes cuantías.</li> </ul>
Analítico	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Facilidad de simulación y de relación con otras variables.</li> <li>- Necesidad de ajuste de la distribución a los datos observados.</li> <li>- Riesgo de modelo y riesgo de parámetro.</li> </ul>
Basado en momentos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Simplicidad cuando se empleen aproximaciones para derivar la distribución de siniestralidad agregada.</li> <li>- No es útil cuando la aproximación empleada no se ajuste bien a la distribución compuesta de frecuencia y severidad.</li> </ul>

La ventaja de emplear el ajuste paramétrico a distribuciones teóricas, o modelo analítico, es que posibilita una expresión analítica para la distribución del coste de los siniestros, lo que facilita la simulación de las cantidades futuras. Además, otras ventajas relacionadas son: las propiedades teóricas de muchas distribuciones y su conveniencia para el trabajo matemático en la Teoría del Riesgo, el hecho de que la distribución se encuentre totalmente definida con un reducido número de parámetros, la posibilidad de realizar inferencias sobre determinados valores, y por último, la facilidad para relacionar el coste con variables exógenas como la inflación (Daykin *et al.*, 1994). Referencias clave en el análisis de las distribuciones del coste de los siniestros son Hogg y Klugman (1984), Kleiber y Kotz (2003) y Klugman *et al.* (2008a).

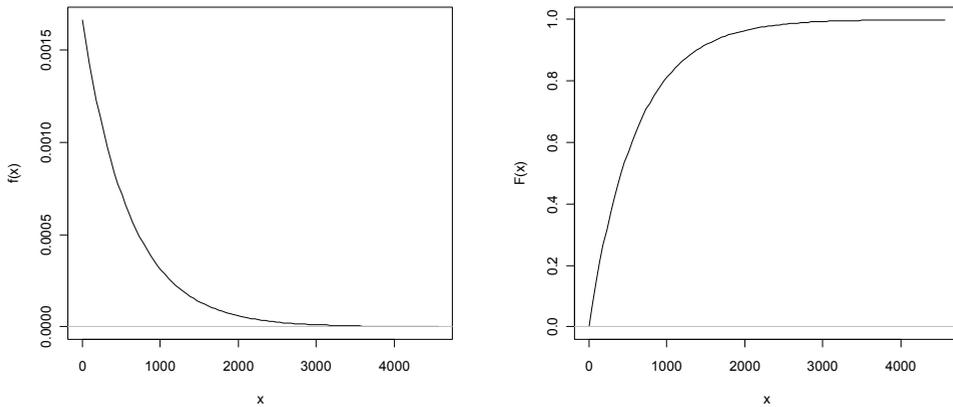
### C. Principales distribuciones empleadas

A continuación describiremos las principales distribuciones empleadas en la modelización del coste de los siniestros.

#### **Distribución Exponencial ( $\theta$ )**

La ley exponencial depende de un único parámetro continuo  $\theta (> 0)$ . La función de densidad es exponencial negativa y viene dada por la expresión  $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ . Su función de distribución por  $F(x) = 1 - e^{-\theta x}$ . La distribución exponencial tiene una tasa de siniestralidad constante.

El gráfico inferior muestra la función de densidad (izquierda) y la función de distribución (derecha) para un coste medio de 600 € ( $\hat{\theta} = 1/600$ ).



Dado que el coeficiente de asimetría de la distribución exponencial es  $\gamma_1 = 2$  y el coeficiente de curtosis es  $\gamma_2 = 6$ , la distribución exponencial es asimétrica y leptocúrtica, y como se aprecia en el gráfico es monótona decreciente con un límite inferior. Tiene el inconveniente de que no se ajusta de forma adecuada a la curva empírica de coste de los siniestros, ya que se reduce rápidamente a medida que aumenta el valor de  $x$ . Sin embargo, la ventaja de esta distribución es su gran simplicidad ya que depende de un solo parámetro. La importancia de la distribución exponencial reside en que la distribución Gamma, Erlang y la Weibull son generalizaciones de ésta.

### Ejemplo. Cálculo de la función de densidad y distribución de la exponencial.

Supongamos una distribución exponencial con parámetro  $\theta = 1$  para calcular los valores de  $f(x)$  y  $F(x)$  empleando Excel podemos emplear la función =DISTR.EXP( $x; \theta; 0$ ) para la función de densidad y =DISTR.EXP( $x; \theta; 1$ ) para la función de distribución.

En R para obtener los valores de la función de densidad y de distribución para  $x$  desde 0 a 10 y  $\theta = 1$  simplemente introduciríamos:

```
i = 0:10
Rate = 1
pexp(i)
dexp(i)
```

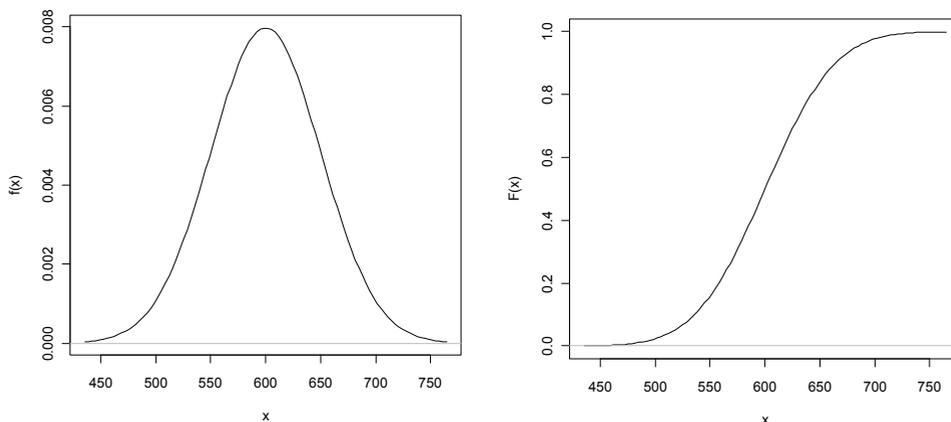
## Distribución Normal ( $\mu, \sigma^2$ )

La distribución Normal o Gaussiana es la distribución más importante en estadística. Como indica el teorema central del límite, la normal nos indica el comportamiento de las sumas de variables independientes e idénticamente distribuidas (iid) no necesariamente normales. En el campo financiero es la distribución frecuentemente empleada para modelizar la rentabilidad de los activos. Sin embargo, en el ámbito actuarial no suele ajustarse bien al comportamiento empírico de las cuantías de los siniestros. Por el contrario, si suele proporcionar un buen ajuste a los costes medios de éstos.

La función de densidad de la ley  $N(\mu, \sigma^2)$  de parámetros  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  viene dada por  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , siendo  $\mu$  y  $\sigma^2$  la media y la varianza y  $-\infty < x < \infty$ . De forma alternativa:  $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  para una distribución normal estándar o normal tipificada, donde  $\varphi$  viene definida como:  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ . La función de distribución viene dada por  $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ , o como  $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  siendo  $\Phi(z)$  la función de distribución de la Ley Normal estándar o tipificada denominada comúnmente como *Error Function*:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt.$$

El gráfico inferior muestra la función de densidad (izquierda) y la función de distribución (derecha) para un coste medio de 600 € ( $\mu = 600$ ) y una desviación típica de 50€ ( $\sigma = 50$ ).



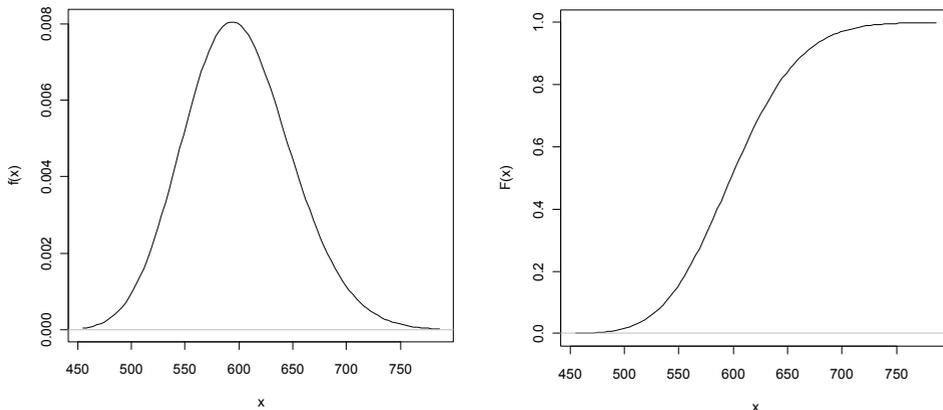
La función de densidad de la distribución normal es simétrica respecto la media. Esto tiene el inconveniente de que no se ajusta de forma adecuada a la curva

empírica de coste de los siniestros, al asignar igual probabilidad a ambos lados del coste medio<sup>34</sup>.

### **Distribución Logarítmico o LogNormal**

La distribución lognormal es la distribución tradicionalmente empleada para modelizar la cuantía de los siniestros en seguros no vida, seguro directo y reaseguro<sup>35</sup>. Por definición, una variable  $X$  se distribuye según una log-normal si y sólo si su logaritmo ( $\ln X$ ) es una variable con distribución normal. La función de densidad de la lognormal viene dada por  $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$  con  $x > 0$ , y su función de distribución por  $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$ .

El gráfico inferior muestra la función de densidad (izquierda) y la función de distribución /derecha) para un coste medio de 600 € ( $\mu = 6,3934$ ) y una desviación típica de 50€ ( $\sigma = 0,0069$ ).



La función de densidad de la distribución lognormal es asimétrica positiva y leptocúrtica y su forma de la depende del parámetro  $\sigma$ . Aumentando el valor de  $\sigma$  se posibilita el ajuste a siniestros que presenten valores elevados (cola derecha gruesa).

<sup>34</sup> La función de densidad de la normal presenta puntos de inflexión en  $x = \mu \pm \sigma$ . El efecto del parámetro media ( $\mu$ ) hace desplazar la función de densidad mientras que el parámetro de la desviación típica ( $\sigma$ ) provoca una mayor o menor dispersión.

<sup>35</sup> Su función de densidad es una función adecuada para modelizar la cuantía de un siniestro por estar definida para valores positivos de la variable, presentar un máximo y ser asimétrica positiva.

### Ejemplo. Derivación de la LogNormal.

Demostraremos empleando la simulación que si  $X \sim Normal(0,1)$  entonces  $Y = e^X$  se distribuye como una LogNormal.

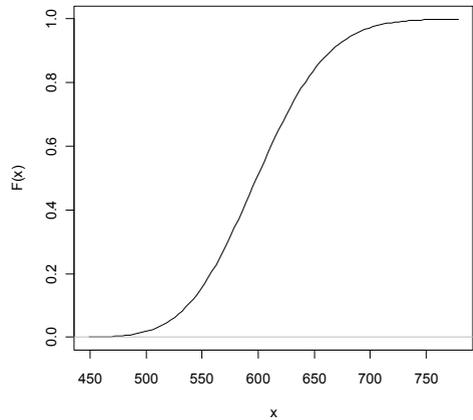
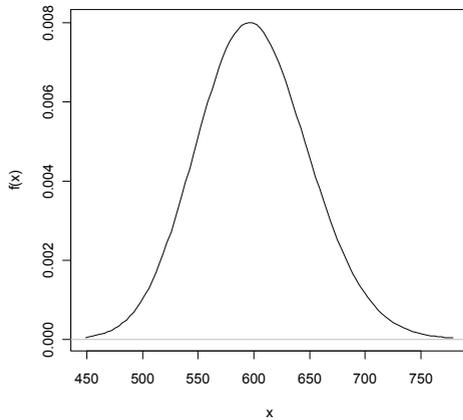
Primero debemos realizar muestras de la distribución uniforme (0,1) y realizar la función inversa de la Normal (0,1) y de la Lognormal empleando los mismos números. (En Excel simplemente introducimos las fórmulas =ALEATORIO() para generar las uniformes, =DISTR.NORM.ESTAND.INV(probabilidad) y =DISTR.LOG.INV(probabilidad;0;1) siendo probabilidad el valor de la uniforme generado). Es fácil comprobar que la exponencial de la Normal es la Lognormal calculada.

Uniforme(0,1)	Normal(0,1)	LogNormal(0,1)	exp(Normal(0,1))
0,7332	0,6224	1,8635	1,8635
0,8552	1,0591	2,8838	2,8838
0,9028	1,2976	3,6603	3,6603
0,5089	0,0224	1,0226	1,0226
0,0569	-1,5818	0,2056	0,2056
0,7100	0,5534	1,7391	1,7391
...	...	...	...

### Distribución Gamma ( $v, \beta$ ).

Esta distribución al igual de la distribución lognormal, es muy empleada para el ajuste de las cuantías de siniestros en seguros no vida. La función de densidad es potencial-exponencial y viene dada por  $f(x) = \frac{\beta^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-\beta x}$ . El parámetro  $v$  es un parámetro de forma y  $\beta$  es un parámetro de escala. La función de distribución viene dada por  $F(x) = \Gamma(v, \beta x)$ , siendo  $\Gamma(v) = \int_0^{\infty} x^{v-1} e^{-x} dx$  la denominada *Gamma Function* y  $\Gamma(v, x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x z^{v-1} e^{-z} dz$  la denominada *Incomplete Gamma Function*.

El gráfico inferior muestra la función de densidad (izquierda) y la función de distribución (derecha) para un coste medio de 600 € ( $\tilde{\beta} = 0,24$ ) y una desviación típica de 50€ ( $\tilde{v} = 144$ ).



La distribución Gamma presenta un máximo, siendo asimétrica positiva y leptocúrtica para cualquier valor de  $v$ . Es muy empleada en seguros no vida para modelizar el coste de un siniestro ya que a partir de sus dos parámetros ( $v, \beta$ ) se ajusta a una amplia gama de casos reales. Presenta un buen ajuste a los ramos de cola gruesa cuando el valor de  $v$  es alto y el de  $\beta$  bajo, y para los ramos de cola ligera cuando el valor de  $v$  es bajo y el de  $\beta$  alto<sup>36</sup>.

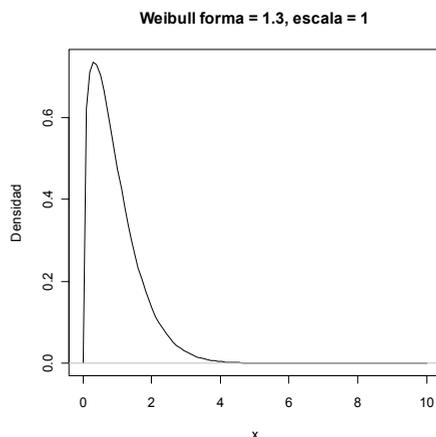
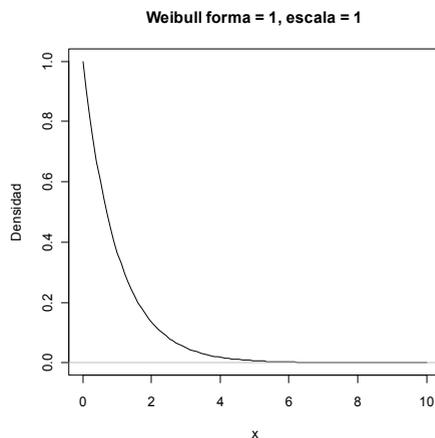
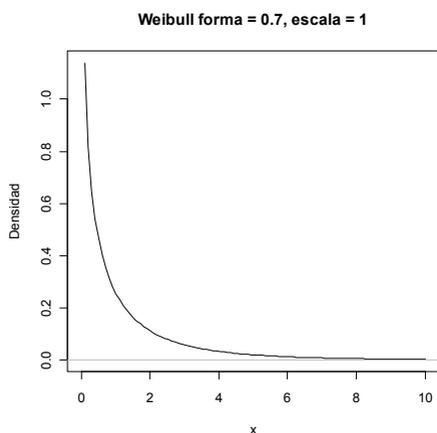
### **Distribución de Weibull ( $\tau, \alpha$ )**<sup>37</sup>

Si  $X$  es una variable distribuida exponencialmente,  $Y = X^{1/\tau}$  es una distribución de Weibull. Los parámetros  $\tau$  y  $\alpha$  son el parámetro de forma y de escala de la distribución y son estrictamente positivos. La función de densidad es  $f(x) = \frac{\tau}{\alpha^\tau} x^{\tau-1} e^{-(x/\alpha)^\tau}$ , y en el caso particular de  $\tau = 1$  se obtiene la ley exponencial  $\varepsilon\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ . La función de distribución viene dada por la expresión  $F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\tau}$ .

La forma del gráfico de la función de densidad de una Weibull depende del valor del parámetro de forma  $\tau$ . Para  $\tau < 1$  la distribución de Weibull tiende a infinito para el mínimo de  $x$  y luego decae rápidamente. Para  $\tau = 1$  la distribución de Weibull se reduce a la Exponencial, por lo que tenemos una función monótonamente decreciente, que empieza en un valor finito para el mínimo de  $x$ . Y en el caso de  $\tau > 1$  la distribución de Weibull es cero para el mínimo valor de  $x$  y presenta un máximo cuyo valor depende de los parámetros de forma y escala. Además la distribución de Weibull es casi simétrica para valores del parámetro de forma  $\tau \approx 3.6$ , tiene asimetría negativa para valores de  $\tau > 3.6$  y positiva para  $\tau < 3.6$ .

<sup>36</sup> Además es muy importante como función de estructura para la variable *mixing* en la Poisson mixta.

<sup>37</sup> Por ser una de las distribuciones límites para los valores extremos, también es conocida como distribución de Weibull-Gnedenko.



### **Distribución LogGamma ( $v, \beta$ )**

De forma análoga a la distribución Log-Normal, una variable aleatoria  $C$  sigue la ley LogGamma ( $v, \beta$ ) si y solo si  $\ln C$  sigue la ley Gamma ( $v, \beta$ ). Los parámetros  $v, \beta$  son el parámetro de forma y de escala de la distribución y son estrictamente positivos. En el caso particular de  $v = 1$  se obtiene la ley de Pareto ( $1, \beta$ ). La función de densidad de la ley LogGamma es  $f(x) = \frac{\beta^v (\ln x)^{v-1}}{\Gamma(v) x^{\beta+1}}$ , y la función de distribución  $F(x) = \Gamma(v, \beta \ln x) = F_{\chi^2_{2v}}(2\beta \ln x)$  con  $x \geq 1$ , siendo  $\Gamma(v) = \int_0^\infty x^{v-1} e^{-x} dx$  (*Gamma Function*) y  $\Gamma(v, x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x z^{v-1} e^{-z} dz$  (*Incomplete Gamma Function*).

### **Distribución de Pareto de primera clase $P(a, \alpha)$ .**

Es una distribución frecuentemente empleada en seguro no vida y reaseguro para el ajuste de la cola de la distribución, especialmente en el reaseguro XS (*excess*

loss). Normalmente, esta distribución no proporciona buenos ajustes para el conjunto de datos de siniestralidad. La distribución de Pareto de parámetros  $a > 0$  y  $\alpha > 0$  presenta la siguiente función de distribución  $F(x) = \left[1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha\right]$ . Su función de densidad viene dada por  $f(x) = \frac{\alpha a^\alpha}{x^{\alpha+1}}$ .

En la distribución de Pareto  $P(a, \alpha)$  se exige que  $\alpha > 0$ . El parámetro  $\alpha$  indica el grosor de la cola de la distribución: cuanto más pequeño es su valor, mayor es la cola de la distribución. Para  $0 < \alpha \leq 1$  el valor medio de la distribución de Pareto  $P(a, \alpha)$  es infinito, mientras que para los valores  $2 < \alpha < 3$  la desviación estándar y la varianza son finitas pero el coeficiente de asimetría y curtosis son infinitas. La distribución de Pareto se emplea para representar siniestros con colas gruesas, su forma cambia lentamente a medida que varía  $\alpha$ , pero la cola de la distribución se incrementa rápidamente cuando  $\alpha$  se reduce.

### **Distribución de Pareto de segunda clase $P_2(a, \alpha)$ .**

La distribución de Pareto de segunda clase presenta la siguiente función de distribución  $F(x) = \left[1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^\alpha\right]$ . Su función de densidad es  $f(x) = \frac{\alpha a^\alpha}{(a+x)^{\alpha+1}}$ .

### **Distribución de Burr**

La distribución de Burr es muy empleada para modelizar los costes de los siniestros en los Estados Unidos, sin embargo es menos empleada en Europa. La distribución de Burr es una distribución de cola gruesa, pero que permite más flexibilidad que la distribución de Pareto de segunda clase ya que introduce un parámetro adicional  $\tau > 0$ . Si  $Y$  tiene una distribución de Pareto entonces la distribución  $X = Y^{1/\tau}$  es la distribución de Burr. La distribución de Burr presenta la siguiente función de distribución  $F(x) = \left[1 - \left(\frac{a}{a+x^\tau}\right)^\alpha\right]$  y la función de densidad viene dada por  $f(x) = \tau \alpha a^\alpha \frac{x^{\tau-1}}{(a+x^\tau)^{\alpha+1}}$ .

### **Distribución Beta 1 o de primera especie $B_1(\alpha, \beta)$**

La distribución Beta es una distribución continua entre 0 y 1 y permite una modelización muy flexible de variables que representan porcentajes gracias a sus dos parámetros. Esta distribución no es útil para modelizar el coste de los siniestros, sin embargo, nos será de utilidad a la hora de elaborar un modelo estocástico para el establecimiento de las provisiones para prestaciones. Así, los pagos porcentuales sobre el coste último de los siniestros pueden ser modelados a través de una distribución Beta 1. La función de distribución es  $F(x) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$  y su función de densidad es  $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$ , siendo  $B_x(\alpha, \beta)$  la función Beta incompleta (*Incomplete Beta Function*) y  $B(\alpha, \beta)$  la función Beta (*Beta Function*). En el caso particular de que  $\alpha = \beta = 1$  se obtiene la ley uniforme continua entre [0, 1].

## Otras distribuciones y mixturas de distribuciones

Mediante transformaciones sobre las distribuciones anteriores se deducen otras distribuciones como la Gamma de tres parámetros o Gamma generalizada, etc. La combinación o mixtura de distribuciones se puede emplear para proporcionar un mejor ajuste a los datos de siniestralidad cuando, como resultado de la aplicación de una sola ley el ajuste sea insuficiente. En la práctica esto se produce con frecuencia cuando estamos en presencia de dos tipos de riesgos como los riesgos de masa y riesgos de cola. Si tenemos dos tipos de siniestros, el montante agregado de siniestros seguirá una función de distribución  $F(x)$  combinada de  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  con las probabilidades  $p$  y  $1 - p$ . Es decir,  $F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x)$  siendo  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  la función de distribución de la cuantía de los siniestros del tipo 1 y 2 respectivamente, y  $p$  y  $1 - p$  las probabilidades de que el siniestro sea del tipo 1 y 2. Las distribuciones  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  pueden ser teóricas (Pareto, Gamma, etc.) o empíricas.

### 3.5. Modelización de la siniestralidad con distribuciones para el coste medio

Desde un punto de vista práctico en DFA se puede emplear para los riesgos de masa la función del coste medio, en vez de la función de cuantía de los siniestros. De esta forma, se puede ajustar a una distribución de tipo continuo los datos de coste medio históricos actualizados por inflación. En principio, la distribución empleada puede ser la normal, sin embargo se pueden emplear otras distribuciones que produzcan un mejor ajuste (Gamma, Lognormal, etc.). En caso de emplear el coste medio, la siniestralidad agregada de la compañía será el producto de dicha distribución por la distribución de frecuencia media y una medida de la exposición al riesgo. Por lo tanto, las cuantías a pagar por siniestros las determinamos a partir de la siguiente expresión:

$$P_t^j = F_t^j \times N_t^j \times X_t^j$$

donde:

- $F_t^j$  = frecuencia media en  $t$  de la línea de producto  $j$ .
- $N_t^j$  = número de exposiciones al riesgo en el momento  $t$  de la línea  $j$ .
- $X_t^j$  = coste medio modelado en el momento  $t$  de la línea  $j$ .

La siguiente tabla muestra la frecuencia por póliza para el sector asegurador español en el ramo de auto para cada uno de los años del período 1997-2004.

<b>Año</b>	<b>Siniestros por póliza</b>
2004	0,471
2003	0,496
2002	0,494
2001	0,502
2000	0,493
1999	0,526
1998	0,514
1997	0,483

Fuente: ICEA

La siguiente tabla muestra los costes medios por siniestros a lo largo del periodo 1994-2004. Hemos homogeneizado los datos usando como año base el último ejercicio y los datos de inflación de cada periodo.

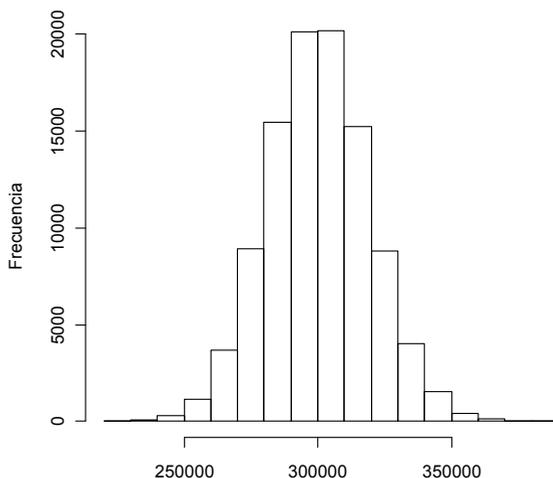
<b>Año</b>	<b>Importe</b>	<b>Inflación anual</b>	<b>Coste medio base 2004</b>
2004	620,05		620,05
2003	610,65	2,6%	626,53
2002	586,05	4,0%	625,34
2001	531,97	2,6%	582,39
2000	526,56	4,0%	599,53
1999	481,66	2,9%	564,31
1998	485,15	1,4%	576,36
1997	456,00	2,0%	552,56
1996	484,81	3,2%	606,27
1995	503,49	4,3%	656,70
1994	463,84	4,3%	631,00

Fuente: Elaboración propia a partir de ICEA

La simulación de la siniestralidad de la compañía se realizaría a través del producto de las realizaciones de la distribución de frecuencia media por póliza, número de pólizas y coste medio de cada siniestro. En el caso de optar por modelizar la frecuencia media con una Normal (0,4974; 0,0171) y el coste medio como una Normal (603,731; 31,944), el proceso de simulación de la distribución de siniestralidad esperada por cada póliza a través del método de la inversa se resume en la siguiente tabla.

Uniforme	Coste medio	Uniforme	Frecuencia	Siniestralidad por póliza
0,2656	583,72	0,1849	0,4821	281,39
0,3721	609,60	0,7024	0,5006	305,14
...	...	...	...	...

Suponiendo que la compañía tiene 1.000 pólizas suscritas homogéneas y para 100.000 simulaciones, podemos representar el histograma de la siniestralidad agregada. Dado que tanto la distribución empleada para la frecuencia relativa como el coste medio son distribuciones normales, la distribución de siniestralidad resultante será simétrica. Esta es la razón por la que esta propuesta sólo es válida para riesgos de masa. En este tipo de riesgos el volumen de negocio es extenso y las cuantías individuales de los siniestros no son muy heterogéneas.

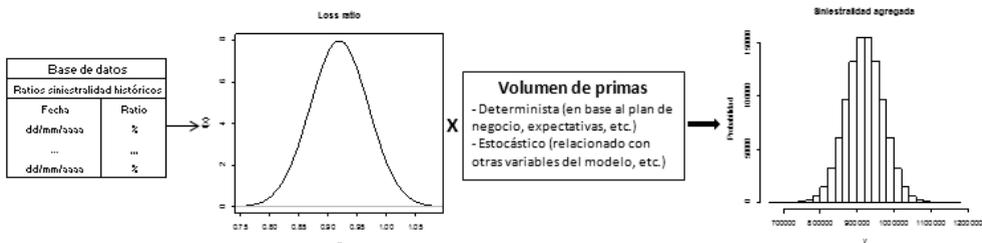


### 3.6. Modelización de la siniestralidad mediante *loss ratios*

El empleo de ratios de siniestralidad puede ser empleado para la modelización de la siniestralidad de una compañía. Esta técnica tiene la ventaja de que es fácil establecer la tendencia o expectativas de las ratios de siniestralidad futuras para efectuar la proyección de la siniestralidad, además de su facilidad de simulación. La ratio de siniestralidad se define como el cociente entre la siniestralidad y las primas. Esta técnica es la que se aplica en QIS4 al calcular el riesgo de primas para los seguros no vida, estimándose una carga de capital para recoger la insuficiencia de las primas para hacer frente a la siniestralidad de ese año. La ratio de siniestralidad que emplea QIS 4 es la ratio de siniestralidad histórica neta y las

primas son las primas ganadas netas históricas. En función de la volatilidad del *loss ratio* histórico ponderado por las primas ganadas respecto a su valor medio se calculaba la volatilidad de primas de la compañía. En función del número de años de experiencia de la compañía en la suscripción de ese ramo se establecía un factor de credibilidad de esta volatilidad. Posteriormente, en base a este factor se ponderaba dicha volatilidad con la volatilidad del mercado para el mismo ramo.

En DFA una compañía puede proyectar su siniestralidad mediante la modelización estocástica de la ratio de siniestralidad histórica. Para ello se ajustaría la ratio de siniestralidad a una distribución y posteriormente se simularían sus valores futuros. Las distribuciones candidatas para presentar un buen ajuste son, en principio, la Lognormal, Gamma y LogGamma. Como producto de dicha ratio y las primas ganadas de cada año obtendríamos la siniestralidad proyectada. El valor de las primas puede ser establecido de forma determinista, es decir un valor fijo, o relacionándolo con otras variables del entorno interno de la compañía (solvencia, etc.) o externo (ciclos aseguradores, situación económica general, etc.).



### 3.7. Modelización de la siniestralidad mediante una única distribución

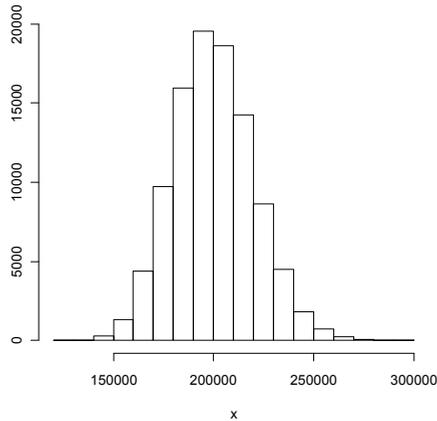
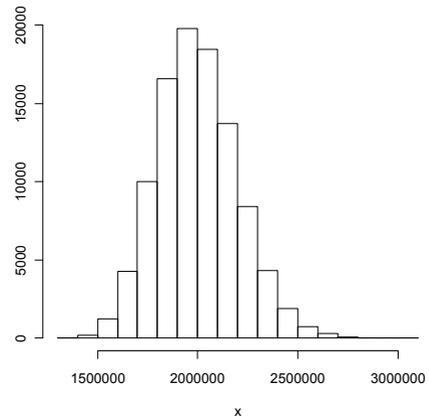
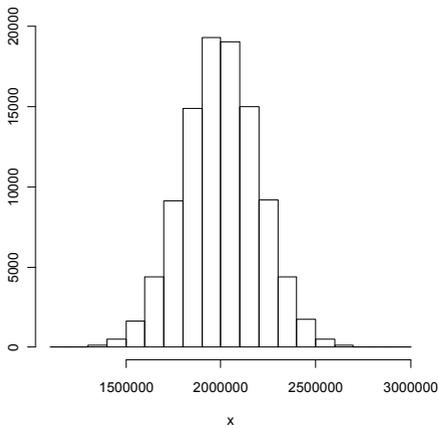
Otra alternativa para modelizar la siniestralidad agregada de una compañía aseguradora es ajustar directamente la distribución de pérdidas agregada. Este método puede ser empleado cuando no tengamos datos suficientes para emplear el resto de métodos, ya que normalmente la muestra de datos de siniestralidad agregada a los que ajustar la distribución no es muy representativa. Esto es debido a que la siniestralidad agregada anual de la compañía va a verse afectada por distintas tendencias difíciles de aislar, como pueden ser la alteración en el volumen de riesgos suscritos, el efecto de la inflación, etc. Las distribuciones que pueden proporcionar un buen ajuste a los datos son la distribución Normal para los riesgos de masa en los que el número esperado de siniestros sea muy elevado o las distribuciones Lognormal o Gamma.

Imagínese una compañía en la que la media de la siniestralidad y de los gastos histórica es de 2.000.000 € y su desviación típica es de 200.000 €. La compañía decide emplear como posibles candidatas para modelizar la siniestralidad la distribución Normal, Lognormal y Gamma. La calibración de las distribuciones será tratada con más detalle posteriormente, por lo que ahora simplemente establece-

remos los valores de los parámetros necesarios para efectuar su simulación. Dichos valores son los mostrados en la siguiente tabla.

Normal		LogNormal		Gamma	
Mu	2.000.000	Mu	14,50368	Forma	100
Sigma	200.000	Sigma	0,09975	Escala	2.000

A continuación se muestra el histograma para la siniestralidad simulada mediante 100.000 escenarios para cada una de las tres distribuciones empleadas. Como puede observarse, las distribuciones lognormal y gamma se ajustarían mejor a datos que presenten asimetría y cola gruesa.



#### 4. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LAS DISTRIBUCIONES ANALÍTICAS

El método analítico implica el ajuste de los parámetros de la función elegida a los datos observados. La estimación de los parámetros de las distribuciones que modelizan la siniestralidad es indispensable para realizar la simulación de la siniestralidad futura. Por lo tanto, tendremos una muestra de datos pertenecientes a una población que viene especificada a través de una función de densidad  $f(x; \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ . La función de probabilidad  $f(x; \theta)$  cuyos parámetros queremos estimar contenidos en el vector  $\theta$  a partir de los datos observados y el espacio paramétrico  $\Theta$  que recoge los posibles valores de los parámetros.

Existen dos modalidades de estimación: la estimación puntual y la estimación por intervalos. La estimación puntual consiste en elegir un valor para los parámetros de la función de probabilidad a partir de los datos de la muestra. La estimación por intervalos consiste en elaborar unos intervalos de valores para los parámetros de la función de probabilidad con un nivel de confianza dado. La estimación puntual es útil en DFA en la medida en que necesitamos parámetros concretos con los que realizar la simulación de la siniestralidad futura, que pueden ser completados con los valores de los extremos del intervalo para realizar un análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos.

Existen fundamentalmente dos métodos de estimación: el método de los momentos y el método de máximo verosimilitud. El método de los momentos o de Karl Pearson estima los parámetros  $\theta$  de la función de densidad igualando las características de la muestra con las de la población, es decir, consiste en igualar los momentos del modelo con los correspondientes de la muestra. El método de la función de máximo verosimilitud elige los parámetros  $\theta$  que maximizan la función de verosimilitud. Formalmente:

- Un estimador de momentos de  $\theta$  (e.m.m o  $\bar{\theta}$ ) es la solución a las ecuaciones:

$$a_j(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

- Un estimador de máximo verosimilitud de  $\theta$  es la solución al máximo de la función de verosimilitud, que es la función de densidad de la muestra como función de los parámetros. Es decir, sea la función de máxima verosimilitud:

$$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

El estimador de máxima verosimilitud (e.m.v o  $\hat{\theta}$ ) es el valor de los parámetro/s que hacen máxima la función  $L(\theta, x_1, \dots, x_n)$ , o de forma alternativa su función logaritmo. En la práctica se suele emplear la función logaritmo de la función de verosimilitud, dicha función viene dada por:

$$\ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

Y el valor máximo de dicha función se obtiene derivando la función respecto a cada  $\theta_i$  e igualándola a cero, obteniendo las siguientes ecuaciones.

$$\frac{d \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{d \theta_i} = 0$$

A continuación estableceremos los valores de los parámetros de las distribuciones de frecuencia y severidad más empleadas en la práctica.

#### 4.1. Estimación de las distribuciones discretas

En este apartado describiremos los principales modelos empleados en la modelización de la frecuencia absoluta del número de siniestros de una cartera de riesgos.

##### **Estimación de la Poisson**

Si  $n_1, n_2, \dots, n_k$  son las realizaciones del número de siniestros. La estimación de  $\lambda$  ( $\hat{\lambda}$ ) por el método de momentos y por máximo verosimilitud coinciden y equivale a la media muestral:  $\hat{\lambda} = \bar{n}$

##### **Estimación de la Binomial Negativa**

Si  $n_1, n_2, \dots, n_k$  son las realizaciones del número de siniestros, y sabiendo que  $\bar{n} = E(N) = \frac{r(1-p)}{p}$  y  $\hat{\sigma}^2 = Var(N) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ , la estimación de  $(r, p)$  por el método de momentos es  $\bar{r} = \frac{\bar{n}^2}{\hat{\sigma}^2 - \bar{n}}$  y  $\bar{p} = (1 - \bar{q}) = \frac{\bar{n}}{\hat{\sigma}^2}$  si  $\hat{\sigma}^2 > \bar{n}$ . Este método no conduce a ninguna solución si  $\hat{\sigma}^2 \leq \bar{n}$ .

El método de máxima verosimilitud considera el máximo de la función  $L = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$ , o bien de su logaritmo  $\ln L = \ln \binom{r+k-1}{k} p^r q^k + r \ln p + k \ln(1-p)$ , donde se sustituye  $q$  por  $1-p$ , para así manejar un solo parámetro. Entonces  $\frac{d \ln L}{d p} = \frac{r}{p} - \frac{k}{1-p}$ , por lo que  $\hat{p} = \frac{\hat{r}}{\hat{r}+k}$ .

##### **Estimación de la Binomial**

Si  $n_1, n_2, \dots, n_k$  son las realizaciones del número de siniestros. La estimación de  $p$  ( $\hat{p}$ ) por el método de momentos y por máximo verosimilitud coinciden y viene dada por la siguiente expresión  $\hat{p} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^k n_i = \frac{\bar{n}}{n}$ .

##### **Estimación de la Poisson-Gamma**

Si el número de siniestros sigue una ley Poisson-Gamma de parámetros  $r$  y  $B$ . Los parámetros estimados por el método de momentos son:

$$\bar{n} = E(N) = \frac{r}{B}$$

$$\hat{\sigma}^2 = V(N) = \frac{r}{B^2} (1 + B)$$

Donde  $\tilde{r} = \frac{\bar{n}^2}{\hat{\sigma}^2 - \bar{n}}$  y  $\tilde{B} = \frac{\bar{n}}{\hat{\sigma}^2 - \bar{n}}$ . Los parámetros estimados por máximo verosimilitud son  $\hat{B} = \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}}$  con  $\hat{p} = \frac{\hat{r}}{\hat{r} + \bar{n}}$ , por lo que en resultado  $\hat{B} = \frac{\hat{r}}{\bar{n}}$ .

### **Estimación de la Poisson mixta de dos clases**

La estimación por el método de los momentos para la Poisson mixta de dos clases o tipos se efectúa mediante las siguientes fórmulas:

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}, \quad \tilde{p} = \frac{\tilde{\lambda}_2 - \bar{n}}{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1}$$

Donde

$$B = \hat{m}_2 - \bar{n}, \quad C = \hat{m}_3 - 3\hat{m}_2 + 2\bar{n}, \quad S = \frac{C - \bar{n}B}{B - \bar{n}}, \quad P = \frac{\bar{n}C - B^2}{B - \bar{n}^2}$$

Siendo  $\bar{n}$  la media empírica y  $\hat{m}_2, \hat{m}_3$  los momentos empíricos simples de orden 2 y orden 3.

## **4.2. Estimación de las distribuciones continuas**

En este apartado se describen la estimación de las principales distribuciones continuas con aplicaciones en el campo actuarial.

### **Estimación de la Exponencial**

El estimador de máximo verosimilitud y el estimador de los momentos asociado a una muestra de la ley exponencial es el recíproco de la media muestral (coste probable de un siniestro):  $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{c}}$ . Dicho valor se deduce de la siguiente forma. Sea  $L$  la función de verosimilitud  $L(c_1, \dots, c_n; \theta)$  que viene dada por  $\ln L = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n c_i$ . Se hace la primera derivada respecto al parámetro  $\theta$ :  $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n c_i$ . Se iguala a cero para buscar el máximo de la función  $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n c_i = 0$ . Despejando se obtiene finalmente:  $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{c}}$ .

### **Estimación de la Normal**

Los estimadores de máximo verosimilitud (e.m.v.) de  $(\mu, \sigma^2)$  son  $\hat{\mu} = \bar{c}$  y  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i - \bar{c})^2$ . Dichos valores se obtienen a partir de la función log-verosimilitud  $\ln L = \text{constante} - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (c_i - \mu)^2$ , de la que se deducen las ecuaciones de verosimilitud:

$$\frac{d \ln L}{d \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (c_i - \mu) = 0$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (c_i - \mu) = 0$$

Que conducen a los resultados descritos anteriormente.

### **Estimación de la Lognormal**

Los estimadores por el método de los momentos se obtienen a partir de la media  $\bar{C}$  y varianza muestrales  $s^2$  mediante las siguientes expresiones  $\bar{\mu} = \ln\left(\bar{C} - \frac{s^2}{2}\right)$  y  $\bar{\sigma}^2 = \ln\left(1 + \frac{s^2}{\bar{C}^2}\right)$ .

Los estimadores de máximo verosimilitud (e.m.v.) de  $(\mu, \sigma)$  son, calculados como en el caso de la normal substituyendo  $\ln c_i$  por  $c_i$ . Es decir se obtienen como media y varianza de la muestra de los logaritmos de coste, es decir,  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln c_i$  y  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln c_i - \hat{\mu})^2$ .

### **Estimación de la Gamma**

Los estimadores del método de los momentos (e.m.m) de la muestra se realiza mediante las siguientes ecuaciones  $\bar{\beta} = \frac{\bar{C}}{s^2}$  y  $\bar{\nu} = \frac{\bar{C}^2}{s^2}$ <sup>38</sup>, siendo  $\bar{C}$  y  $s^2$  la media y la varianza de la muestra respectivamente.

Los estimadores e.m.v. se obtienen a partir de la función de log-verosimilitud  $\ln L = n\nu \ln \beta - n \ln \Gamma(\nu) + (\nu - 1) \ln(\sum_{i=1}^n c_i) - \beta(\sum_{i=1}^n c_i)$ . Se utiliza la función digamma  $\Psi$  definida por  $\Psi(\nu) = \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)}$ . El sistema de ecuaciones de verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{d \nu} &= n \ln \beta - n \Psi(\nu) + \ln\left(\sum_{i=1}^n c_i\right) = 0 \\ \frac{d \ln L}{d \beta} &= \frac{n\nu}{\beta} - \sum_{i=1}^n c_i \end{aligned}$$

El parámetro  $\hat{\nu}$  es la solución de la ecuación  $\ln \nu - \psi(\nu) = \ln \frac{\bar{C}}{g}$  siendo  $g$  la media geométrica de la muestra, es decir,  $g = (\sum_{i=1}^n c_i)^{1/n}$ . El otro estimador de e.m.v es  $\hat{\beta} = \frac{\hat{\nu}}{\bar{C}}$ . La dificultad de obtener el estimador de  $\hat{\nu}$  hace que normalmente a efectos prácticos se utilicen en esta distribución los estimadores por momentos o aproximaciones de los verdaderos e.m.v.

<sup>38</sup> Debe advertirse que en algunos manuales o programas informáticos el parámetro de escala se establece de forma inversa al aquí expuesto.

### Estimación de la Weibull

Los estimadores por el método de los momentos y verosimilitud conducen a unas soluciones de las ecuaciones de los estimadores difíciles de resolver analíticamente. Por ello, a veces se parte de un valor inicial de  $\alpha$  calculado por el método de los cuantiles (e.m.c). Dada la función de cuantiles de la Weibull  $q_p = \alpha[-\ln(1-p)]^{1/\tau}$ , se eligen dos valores arbitrarios de  $p$ <sup>39</sup> tales que  $0 < p_1 < p_2 < 1$  y se igualan los cuantiles teóricos  $q_p$  con los empíricos  $Q_p$ :

$$q_{p_1} = \alpha[-\ln(1-p_1)]^{1/\tau} = Q_{p_1}$$

$$q_{p_2} = \alpha[-\ln(1-p_2)]^{1/\tau} = Q_{p_2}$$

Por lo que obtenemos el estimador del momento de los cuantiles del parámetro de forma  $\tilde{\tau}$  de la siguiente ecuación  $\tilde{\tau} = \frac{\ln\left[\frac{-\ln(1-p_2)}{-\ln(1-p_1)}\right]}{\ln Q_{p_2} - \ln Q_{p_1}}$ . El estimador por el método de los momentos de  $\tau$  es la solución a la ecuación  $\ln \Gamma\left(\frac{2}{\tau} + 1\right) - 2 \ln \Gamma\left(\frac{1}{\tau} + 1\right) = \ln\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{c}^2} + 1\right)$ , y el estimador del parámetro de escala  $\alpha$  se obtiene mediante  $\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{c}}{\Gamma\left(\frac{1}{\tau} + 1\right)}$ .

Para la estimación por máxima verosimilitud se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{d \tau} &= \frac{n}{\tau} - n \ln \alpha + \sum_i \ln c_i - \sum_i \left(\frac{c_i}{\alpha}\right)^\tau \ln \frac{c_i}{\alpha} = 0 \\ \frac{d \ln L}{d \alpha} &= -\frac{n\tau}{\alpha} + \frac{\tau}{\alpha^{\tau+1}} \sum_i c_i^\tau = 0 \end{aligned}$$

Que conduce a las soluciones

$$\frac{1}{\hat{\tau}} = \frac{\sum_i c_i^\tau \ln c_i}{\sum_i c_i^\tau} - \frac{1}{n} \sum_i \ln c_i \quad \text{y} \quad \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n} \sum_i \ln c_i \hat{\tau}\right)^{\frac{1}{\hat{\tau}}}$$

### Estimación de la LogGamma

Los estimadores e.m.v se deducen de los elementos correspondientes para la distribución Gamma substituyendo  $\ln c_i$  por  $c_i$

### Estimación de la Pareto de 1º clase.

El e.m.v de  $\alpha$  es  $\hat{\alpha} = \frac{1}{\ln G/a}$ , siendo  $G = (\sum_{i=1}^n c_i)^{1/n}$  la media geométrica de la muestra.

<sup>39</sup> Es común establecer que  $p_1 = 0.25$  y  $p_2 = 0.75$  por lo que calcularíamos  $Q_{0.25}$  y  $Q_{0.75}$ .

### Estimación de la Pareto de 2ª clase

Los estimadores por el método de los momentos de la distribución de Pareto son:

$$\bar{\alpha} = 2 \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1^2} \quad \text{y} \quad \bar{a} = \frac{\hat{m}_1 \hat{m}_2}{\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1^2},$$

siendo  $\hat{m}_k$  el momento estimado de orden  $k$ . Nótese que dichos estimadores sólo están definidos cuando  $\hat{m}_2 - 2\hat{m}_1^2 > 0$ .

El e.m.v del parámetro  $a$  ( $\hat{a}$ ) es la solución a la ecuación

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + c_i/a} \right) \left[ 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + c_i/a) \right] - 1 = 0,$$

por lo que

$$\hat{a} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + c_i/a) \right]^{-1}.$$

### Estimación de la Burr

Los estimadores de máximo verosimilitud sólo pueden ser obtenidos numéricamente.

### Estimación de la Beta

De las ecuaciones siguientes  $\bar{c} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  y  $\bar{m}_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)}$  se deducen los estimadores del método de los momentos siguientes  $\tilde{\alpha} = \frac{\bar{c}(\bar{c} - \bar{m}_2)}{\bar{\sigma}^2}$  y  $\tilde{\beta} = \frac{(1 - \bar{c})(\bar{c} - \bar{m}_2)}{\bar{\sigma}^2}$ , teniéndose que cumplir que los parámetros son positivos.

### Ejemplo. Estimación paramétrica de la función de densidad en R.

El software R permite el ajuste paramétrico por el método de máximo verosimilitud mediante la función `fitdistr()` del paquete MASS. Para ello deben definirse principalmente los datos ( $x$ ) y la función a la que se desea ajustar. Por ejemplo para el ajuste de una serie de datos a una distribución normal simplemente realizaríamos:

```
fitdistr(x,"normal").
```

Existen otros paquetes también permiten realizar ajustes paramétricos. Un paquete muy útil para tratar con series financieras temporales es el paquete `fBasics`<sup>40</sup> que incluye la función `DistributionFits()`. Para tratar con datos provenientes de siniestros es fundamental el paquete `actuar` que proporciona la función `mde()` permitiendo el ajuste a modelos empleando la técnica de minimización de distancias.

<sup>40</sup> Otra función también muy interesante de este paquete `fBasics` es `StylizedFacts` que recoge una colección de funciones útiles para investigar las particularidades de las series financieras, incluyendo análisis de autocorrelaciones, colas gruesas, etc.

Las distancias empleadas son Cramér-von Mises (tanto para datos individuales como para datos agrupados), el método Chi-Cuadrado modificado para datos agrupados y el método LAS (*layer average severity method*)<sup>41</sup> que también sólo es empleable para datos agrupados.

## 5. DISTRIBUCIÓN DE LA SINIESTRALIDAD AGREGADA

Denominamos  $S$  a la cuantía agregada o acumulada de todas las reclamaciones de los asegurados. Su naturaleza es doblemente estocástica ya que cada sumando es una variable aleatoria (cuantía de los siniestros) y que el número de sumandos (número de siniestros) es también aleatorio. En este apartado describiremos la distribución de  $S$  obtenida a partir de la distribución de  $N$  (número de siniestros) y la distribución de  $C$  (cuantía de los siniestros). El proceso más común para modelizar la distribución de la siniestralidad agregada es que la frecuencia y la severidad sean modelizadas por separado, lo que tiene como ventajas una mayor exactitud y flexibilidad frente a la modelización global de  $S$  (Klugman *et al.* 2008a). Las principales ventajas de realizar una modelización por separado son (Klugman *et al.* 2008a):

- Facilita la modificación del volumen de negocio de la compañía, de forma que se puede ajustar su efecto en el número de reclamaciones futuras.
- Facilita la incorporación de los efectos de la inflación en los costes de los siniestros.
- Posibilita una mejor comprensión de la forma de la distribución resultante de  $S$ , ya que depende de las formas de la función de frecuencia y severidad.

La independencia mutua de las cuantías de siniestralidad y de la frecuencia, significa que la distribución de probabilidad de  $S$  depende por completo de la distribución del número de siniestros ( $N$ ) y de la de la cuantía de siniestros ( $C$ )<sup>42</sup>. De esta forma, la distribución de la cuantía agregada de siniestros se obtiene mediante convolución de distribuciones:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x | N = n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(C_1 + \dots + C_n \leq x | N = n) P(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} F_x^{*n}(S) P(N = n)
 \end{aligned}$$

<sup>41</sup> El método LAS minimiza la distancia al cuadrado entre los valores límite esperados teóricos y empíricos dentro de cada uno de los grupos.

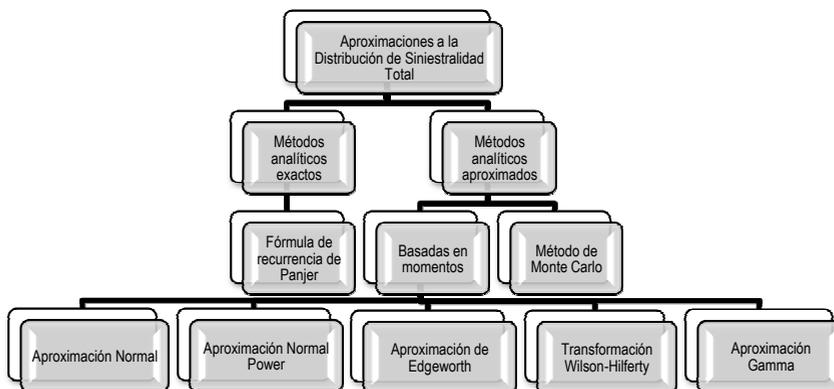
<sup>42</sup> Tal y como afirman Klugman *et al.* (2008) es posible construir múltiples distribuciones  $S$  a partir de  $N$  y  $C$ . Esto es debido a que  $N$  representa el número de reclamaciones efectuadas pero  $X$  puede representar alternativamente las pérdidas aseguradas, los pagos por siniestros a los asegurados o los pagos por siniestros debido al reaseguro.

Donde  $P(N = n)$  es la probabilidad de que el número de siniestros sea igual a  $n$  y  $F_x^{*n}(S)$  es la  $n$ -ésima convolución. La distribución de la siniestralidad agregada ( $S$ ) en el modelo colectivo cumple que  $E(S) = E(N)E(C)$  y  $V(S) = V(N)E^2(C) + V(C)E(N)$ .

En la siguiente tabla se resumen, a partir de las principales distribuciones para modelizar el número de siniestros, la esencia del modelo colectivo de riesgo.

Distribución compuesta	Función de distribución $F(x)$	Media $E(S)$	Varianza $V(S)$
Forma General	$\sum_{n=0}^{\infty} F_x^{*n}(S) P(N=n)$	$E(N)E(C)$	$V(N)E^2(C) + V(C)E(N)$
Poisson	$\sum_{n=0}^{\infty} F_x^{*n}(S) \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$	$\lambda \mu$	$\lambda \mu_2$
Binomial	$\sum_{n=0}^m F_x^{*n}(S) \binom{n}{k} q^n p^{m-n}$	$np\mu$	$np(\mu_2 - p\mu^2)$
Binomial Negativa	$\sum_{n=0}^m F_x^{*n}(S) \binom{\alpha+n-1}{n} q^n p^\alpha$	$\alpha q \mu / p$	$\alpha q \mu_2 / p + \alpha q^2 \mu^2 / p^2$

En la práctica resulta complicado obtener una expresión de la distribución de  $S$ , por lo que es común obtener aproximaciones. La fórmula de Panjer proporciona una expresión exacta de la distribución de siniestros agregados en el modelo colectivo, válida cuando la distribución del número de siniestros y cuantías cumplen ciertas condiciones. Además, en este apartado también se presentan algunos métodos generales de aproximación para estimar la distribución de siniestralidad como son la aproximación Normal, Normal Power, *Gamma*, la transformación de *Wilson-Hilferty* y la transformación de *Haldane*, entre otras.



### A. Métodos analíticos exactos: La fórmula de Panjer

La condición que debe satisfacer el número de siniestros  $N$  para obtener la fórmula de Panjer es que  $N$  sea una variable aleatoria discreta con valores  $\{0, 1, \dots\}$  y  $p_k$  sea la probabilidad  $P(N = k)$  para  $k \geq 1$ , si  $a$  y  $b$  son dos constantes ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) entonces la función de probabilidad del número de siniestros se describe como  $p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$ , que se cumple cuando  $N$  está distribuida como una Binomial, Poisson y Binomial Negativa. En la siguiente tabla se muestra los valores que toman los parámetros  $a$  y  $b$  para cada una de las distribuciones.

Constante	Binomial( $n, p$ )	Poisson ( $\lambda$ )	Binomial Negativa ( $r, p$ )
a	$a = -\frac{p}{(1-p)}$	$a = 0$	$a = 1 - p$
b	$b = \frac{(k+1)p}{(1-p)}$	$b = \lambda$	$b = (r-1)(1-p)$

La condición que tiene que cumplir la cuantía de siniestros<sup>43</sup> es que  $P(C_i \in \mathbb{N}) = 1$ , lo cual se cumple para las reclamaciones reales al considerar que se efectúan en unidades monetarias. Para las distribuciones continuas del coste de los siniestros en el dominio  $[0, \infty)$  se puede aproximar o discretizar para hacer que las variables aleatorias asuman valores en  $\mathbb{N}$ . Si se cumplen las condiciones anteriores sobre el coste de las reclamaciones y el número de reclamaciones, la distribución de  $S$  se puede obtener de forma recursiva mediante:

$$P(S = 0) = p_0$$

$$P(S = x) = \sum_{y=1}^x \left(a + b \frac{y}{x}\right) \pi_y P(S = x - y), \text{ para } x \geq 1$$

La fórmula recursiva se denota en el caso de que  $X$  tenga un límite superior  $\{1, 2, \dots, r\}$ , como  $P(S = x) = \sum_{y=1}^{\min(x, r)} \left(a + b \frac{y}{x}\right) \pi_y P(S = x - y)$ , para  $x \geq 1$ . Por ejemplo, en el caso de que  $X$  tome valores  $\{1, 2\}$ :  $P(S = 0) = p_0$ ,  $P(S = 1) = (a + b)\pi_1 P(S = 0)$ , y  $P(S = 2) = \left(a + \frac{b}{2}\right)\pi_1 P(S = 1) + (a + b)\pi_2 P(S = 0)$ .

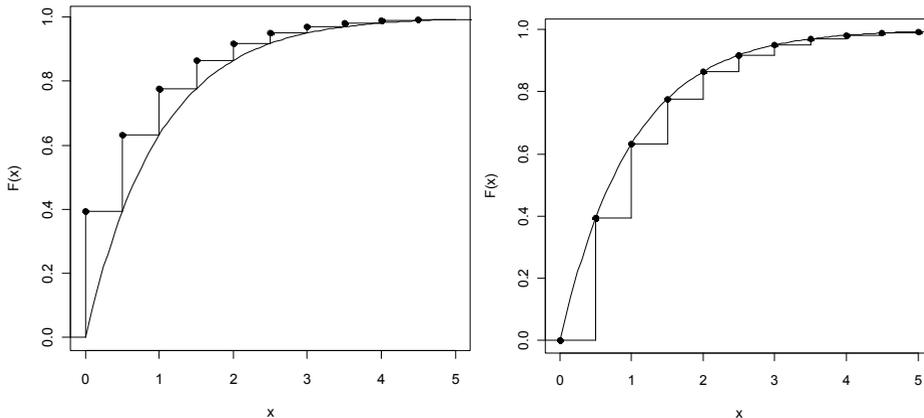
La fórmula de recurrencia es particularmente simple en el caso de la ley Poisson, ya que consiste en  $P(S = 0) = e^{-\lambda}$ , y  $P(S = x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{y=1}^x y \pi_y P(S = x - y)$ , para  $x \geq 1$ .

<sup>43</sup> La distribución utilizada para la cuantía es no negativa, discreta y equidistante.

### A.1. Aproximación discreta al montante de los siniestros

La fórmula recursiva de Panjer para el cálculo de la distribución del coste total de los siniestros, requiere una función aritmética discreta del coste de los siniestros. Es decir, que la distribución se defina para  $0; h; 2h, \dots$  para algún valor de  $h$ . Existen principalmente cuatro métodos para discretizar las funciones: el método superior, el método inferior, el método del punto medio y el método incesgado o de los momentos<sup>44</sup>.

Sea  $F(x)$  la función de distribución que se desea discretizar en algún intervalo  $(a,b)$  y  $f(x)$  la función de probabilidad de  $x$  en la distribución discretizada. El método superior discretiza una distribución continua mediante la siguiente fórmula  $f(x) = F(x+h) - F(x)$  para  $x = a, a+h, \dots, b-h$ . El método inferior discretiza una distribución continua mediante la siguiente fórmula  $f(x) = \begin{cases} F(a) & x = a \\ F(x) - F(x-h), & x = a+h, \dots, b \end{cases}$ . Como se aprecia en el siguiente gráfico, la función de distribución discretizada por el método superior está por encima que la verdadera función (gráfico izquierda), mientras que la función de distribución discretizada por el método inferior está por debajo que la verdadera función (gráfico derecha).



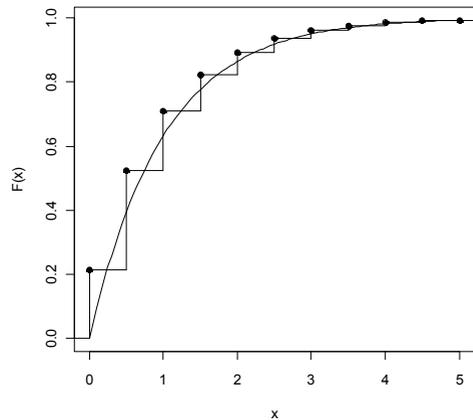
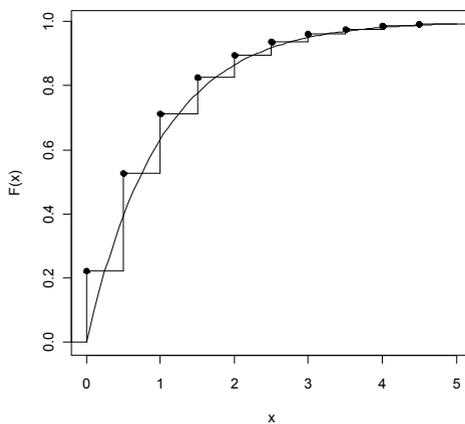
El método del punto medio (*midpoint method* o *rounding*) discretiza una distribución continua mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} F\left(a + \frac{h}{2}\right) & x = a \\ F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) & x = a + h, \dots, b - h. \end{cases}$$

<sup>44</sup> El método del punto medio y el método incesgado son tratados en Daykin *et al.* (1994).

Como se aprecia en los siguientes gráficos la verdadera función de distribución atraviesa por el valor  $h$  de la función de distribución discretizada. El método de discretización insesgado hace que la distribución verdadera y la discretizada tengan el mismo valor esperado en el intervalo de discretización y la misma probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{E[X^a] - E[X^{a+h}]}{h} + 1 - F(a) & x = a \\ \frac{2E[X^a] - E[X^{x-h}] - E[X^{x+h}]}{h} & a < x < b \\ \frac{E[X^b] - E[X^{b-h}]}{h} + 1 + F(b) & x = b \end{cases}$$



Otro método para obtener soluciones exactas son los métodos de inversión, entre los que destacan la Transformación *Fast Fourier* (FFT).

### B. Métodos de aproximación basados en los momentos

Si  $S$  es la variable aleatoria de la siniestralidad para determinada clase de riesgo en el período considerado, se pueden obtener aproximaciones de su función  $F_S$  basadas en sus primeros momentos, obtenidos a partir del número de siniestros y de su cuantía.

#### B.1. Aproximación Normal

En caso de que el número de siniestros sea grande, el teorema central del límite sugiere aproximar la distribución de siniestros  $S$  mediante la distribución normal, es decir  $P(S \leq x) = P\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leq \frac{x-E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x-E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right)$ , por lo que  $F_S(x) \approx \Phi\left(\frac{x-E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right)$ , donde  $\Phi$  es la distribución normal estándar y  $E(S)$  y  $\text{Var}(S)$  son la media y la varian-

za de  $S$ . Por lo tanto, si conocemos las distribuciones del número de siniestros  $N$  y de su cuantía  $X$  podemos obtener  $P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - E(N)E(X)}{\sqrt{\text{Var}(N)}}\right)$ . En la siguiente tabla se analizan los casos concretos en los que la distribución de  $N$  es la Poisson, la Binomial y la Binomial Negativa.

Distribución para $N$	Valor de la función
Poisson Cuando $\lambda \rightarrow \infty$	$F_S(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\sigma^2}}\right)$
Binomial	$F_S(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np\mu}{\sqrt{np(\sigma^2 - \mu^2p)}}\right)$
Binomial Negativa Cuando $r \rightarrow \infty$ :	$F_S(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - \frac{rq\mu}{p}}{\sqrt{\frac{rq\sigma^2}{p} + \frac{rq^2\mu^2}{p^2}}}\right)$

La aproximación de la distribución normal simplifica enormemente los cálculos. Sin embargo, su precisión es reducida debido a que la distribución es generalmente asimétrica, ocasionando que  $F_S$  tenga una cola pesada a la derecha. Por lo tanto, la aproximación normal es adecuada en el caso de que la distribución de siniestros totales tenga un sesgo reducido. Por la contra, no es adecuada en el caso de que la distribución de siniestros tenga una asimetría relevante ya que subestimaré la probabilidad de que los siniestros agregados sean elevados. La aproximación normal es un caso especial de la llamada expansión en series de Edgeworth que veremos a continuación.

### B.2. Aproximación Edgeworth

Si  $\Phi$  es la función de distribución y  $\varphi$  la función de densidad de una Normal (0;1) entonces las derivadas de la función de distribución son:

$$\Phi'(y) = \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$\Phi^{(2)}(y) = \varphi'(y) = -y\varphi(y)$$

$$\Phi^{(3)}(y) = \varphi^{(2)}(y) = (y^2 - 1)\varphi(y)$$

$$\Phi^{(4)}(y) = \varphi^{(3)}(y) = -(y^3 - 3y)\varphi(y)$$

$$\Phi^{(5)}(y) = \varphi^{(4)}(y) = (y^4 - 6y^2 + 3)\varphi(y)$$

$$\Phi^{(6)}(y) = \varphi^{(5)}(y) = -(y^5 - 10y^3 + 15y)\varphi(y)$$

De esta forma, la aproximación de Edgeworth de  $F_S$  (de orden 6) es una extensión de la aproximación normal basada en los cuatro primeros momentos de  $S$ :

$$\begin{aligned} F_S(x) = P(S \leq x) &\approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\gamma_1}{6} \Phi^3\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_2}{24} \Phi^4\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_1^2}{72} \Phi^6\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{\gamma_1}{6} \varphi^{(2)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_2}{24} \varphi^{(3)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\gamma_1^2}{72} \varphi^{(5)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Donde  $\Phi^i$  es la  $i$ -ésima derivada la función normal,  $\mu$  la media,  $\sigma$  la desviación típica,  $\gamma_1$  la asimetría y  $\gamma_2$  la kurtosis de la distribución de  $S$ .

La aproximación de Edgeworth es satisfactoria alrededor de la media de la distribución de siniestralidad total, pero resulta inadecuada para evaluar con precisión la cola.

### B.3. Aproximación Normal Power

Este método consiste en encontrar una transformación de la aproximación normal que recoja mejor la asimetría de la distribución compuesta:

$$F_S(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left[-\frac{3}{\gamma_1} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_1^2} + 1 + \frac{6}{\gamma_1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right]$$

La aproximación Normal Power o NP requiere tres parámetros: la media, la desviación típica y la asimetría de la distribución, obteniéndose un mejor ajuste cuando la asimetría o sesgo de la distribución es pequeño.

### B.4. Aproximación Wilson-Hilferty

La aproximación Wilson-Hilferty es, al igual que la aproximación NP, otra aproximación derivada del caso normal. La eficacia de esta aproximación es adecuada cuando la asimetría de la distribución de cuantías es reducida, en concreto menor a dos, no siendo adecuada para distribuciones asimétricas. La aproximación Wilson-Hilferty consiste en:

$$F_S(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left[\frac{\gamma_1}{6} - \frac{6}{\gamma_1} + 3\left(\frac{2}{\gamma_1}\right)^{2/3} \left(x + \frac{2}{\gamma_1}\right)^{1/3}\right]$$

### B.5. Aproximación Gamma

Las aproximaciones anteriores no dan buenos resultados ante distribuciones asimétricas. Para ello se aproxima la distribución  $S$  mediante una distribución asimétrica, la distribución Gamma desplazada. Esta distribución se obtiene mediante un cambio de variable a partir de la distribución Gamma, y al tener tres parámetros permite mejorar la aproximación de la función de siniestralidad agre-

gada. El parámetro adicional se ajustará de acuerdo con el grado de asimetría de la distribución. De esta forma, una variable aleatoria  $Z$  sigue una ley Gamma desplazada de parámetros  $(\nu, \beta, x_0)$  si  $Z - x_0$  sigue una ley Gamma  $\chi(\nu, \beta)$ .

Para encontrar los parámetros de la distribución Gamma de tres parámetros se procede a igualar la media, varianza y asimetría de la distribución con los de la aproximación. Por lo tanto, los momentos centrales de  $S$  serán  $E(S) = x_0 + \frac{\nu}{\beta}$ ,  $\text{Var}(S) = \frac{\nu}{\beta^2}$  y  $\mu_3(S) = E[(S - E[S])^3] = \frac{2\nu}{\beta^3}$ . Por lo que despejando

se obtienen los siguientes valores:  $\beta = \frac{2\sigma_S^2}{\mu_3(S)}$ ,  $\nu = \frac{4(\sigma_S^2)^3}{[\mu_3(S)]^2}$  y  $x_0 = E(S) - 2 \frac{(\sigma_S^2)^2}{\mu_3(S)}$ .

Por ejemplo, para el caso Poisson compuesto:  $\beta = \frac{2\sigma_X^2}{\mu_3(X)}$ ,  $\nu = \frac{4\lambda(\sigma_X^2)^3}{[\mu_3(X)]^2}$  y

$x_0 = \lambda E(X) - 2 \frac{\lambda(\sigma_X^2)^2}{\mu_3(X)}$ . Y, para el caso Binomial Negativo Compuesto:

$\nu = \left[ \frac{2(p\sigma_X^2 + qE(X)^2)}{p^2\mu_3(X) + 3qpE(X)\sigma_X^2 + 2q^2E(X)^3} \right]^2 (rqp\sigma_X^2 + rq^2E(X)^2)$ ,  $\beta = \frac{2p(p\sigma_X^2 + qE(X)^2)}{p^2\mu_3(X) + 3qpE(X)\sigma_X^2 + 2q^2E(X)^3}$  y

$x_0 = \frac{rqE(X)}{p} - \left[ \frac{2(p\sigma_X^2 + qE(X)^2)}{p^2\mu_3(X) + 3qpE(X)\sigma_X^2 + 2q^2E(X)^3} \right]^2 \left( rqp\sigma_X^2 + \frac{rq^2E(X)^2}{p} \right)$ .

La aproximación Gamma de tres parámetros consiste en  $F_S(x) = P(S \leq x) \approx \Gamma[\nu, \beta(x - x_0)]$  ( $x > x_0$ ), siendo  $\Gamma[\nu, \cdot]$  la función Gamma incompleta.

### C. Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es el método más potente y es el método frecuentemente empleado en los modelos DFA, ya que permite una mayor flexibilidad para aproximar la distribución de la siniestralidad global de la compañía. Por medio de un generador de números aleatorios, producimos realizaciones para el número de siniestros y la cuantía de los mismos. Por lo tanto el proceso de simulación posee las siguientes fases:

- La primera fase consiste en generar de forma aleatoria un número de siniestros.
- La segunda fase consiste en, de forma secuencial, generar para cada uno de los siniestros simulados la cuantía de los mismos.
- La tercera fase supone sumar las cuantías generadas para cada uno de los siniestros simulados, obteniéndose la siniestralidad agregada para esa simulación.

#### Ejemplo. Simulación de la siniestralidad agregada.

Supongamos que la frecuencia de una cartera de pólizas se distribuye como una Poisson (2,5) y su cuantía como una distribución Gamma(6;15.000). Deseamos obtener la siniestralidad agregada mediante el método de simulación.

Primero generamos el número de siniestros<sup>45</sup>

N	Probabilidad acumulada	Simulación	Uniforme	N siniestros
1	0,08208	1	0,56220	3
2	0,28730	2	0,40167	2
3	0,54381	3	0,68585	3
4	0,75758	4	0,23134	1
5	0,89118	5	0,02793	0

Posteriormente generamos las uniformes que se van a emplear en la cuantía de los siniestros

Simulación	N siniestros	Uniforme	Uniforme	Uniforme
1	3	0,8713	0,8121	0,4241
2	2	0,4309	0,8463	
3	3	0,8602	0,9742	0,6916
4	1	0,2721		
5	0			

Por el método de la inversa de la función de distribución de la Gamma<sup>46</sup> obtenemos la cuantía individual de cada siniestro, y por suma la siniestralidad agregada por simulación.

Simulación	N siniestros	Cuantía (1)	Cuantía (2)	Cuantía (3)	Agregada
1	3	1.706	1.867	2.869	6.441
2	2	2.848	1.776	—	4.624
3	3	1.737	1.291	2.161	5.190
4	1	3.446	—	—	3.446
5	0	—	—	—	0

<sup>45</sup> Si empleamos Excel podemos emplear la función BUSCARV().

<sup>46</sup> En Excel simplemente empleamos la distribución DISTR.GAMMA.INV(uniforme;parámetro de forma;parámetro de escala). Debe tenerse cuidado en que el parámetro de escala está establecido de forma inversa al explicado en este trabajo.

Además el método de Monte Carlo permite modelizar la distribución de siniestralidad agregada por cualquiera de los otros métodos: única distribución, coste medio y frecuencia, empleo de la teoría de valor extremo, empleo de una única distribución y modelización vía ratio de siniestralidad.

## 6. MODELIZACIÓN DE LA PROVISIÓN PARA PRESTACIONES EN SEGUROS NO VIDA

Un aspecto crítico para evaluar la condición financiera de una compañía aseguradora es la estimación correcta de las provisiones para prestaciones. Las provisiones son reservas específicas de la actividad aseguradora, y se calculan en lo que se conoce como el proceso del *loss reserving*. Una provisión para prestaciones es un pasivo de la compañía dotado para hacer efectivo el pago de las reclamaciones pendientes. La estimación de la provisión de prestaciones es un proceso actuarial y financiero de cálculo de la cantidad de pasivo necesaria para hacer frente al pago de siniestros y los gastos asociados a los mismos. Una estimación incorrecta de las mismas, ya sea por exceso o por defecto, pone en peligro la solvencia del asegurador<sup>47</sup>.

Para estimar la provisión necesaria es común asumir que la experiencia histórica de la compañía se puede emplear para proyectar el futuro. Sin embargo, esta hipótesis debe ser contrastada a través de un profundo análisis de los datos. Existe una variedad amplia de técnicas disponibles para estimar las cantidades de reservas necesarias. Estas técnicas a menudo proporcionan cantidades distintas, por lo que debe realizarse un análisis detallado para juzgar el método más adecuado a cada caso particular. Además, es recomendable el uso de distintos métodos para evaluar la razonabilidad de la opción seleccionada.

Para el cálculo de la provisión para prestaciones se establecen dos grandes métodos: el método individual y el método estadístico. El método individual se basa en la valoración de cada uno de los siniestros que la compañía está tramitando a cierre de ejercicio, de forma que la provisión técnica será la suma de las cuantías para cada siniestro. Por otro lado, los métodos estadísticos se clasifican en función de su naturaleza en métodos deterministas y métodos estocásticos. Los primeros son técnicas tradicionales que proporcionan una estimación puntual del valor de las reservas necesarias, mientras que los métodos estocásticos construyen la distribución estimada de la reserva necesaria. Los métodos deterministas que abordaremos en este capítulo son el método Chain Ladder determinista y el método *Bornhuetter-Ferguson* o BF. Sin embargo, tal y como afirma Bermúdez (2009) el cálculo de las provisiones técnicas en Solvencia II debe realizarse preferentemente mediante métodos estocásticos. En este trabajo abordaremos dos métodos

---

<sup>47</sup> Una estimación insuficiente, supone declarar un beneficio superior al real, generando una escasez de fondos futuros a la hora de hacer frente a las obligaciones del asegurador. Dotaciones por exceso, aumentan de forma irreal el beneficio conllevando un incremento de la carga fiscal.

estocásticos: un método tipo Chain Ladder basado en la distribución Beta y el método *Bootstrap*. Las compañías aseguradoras deben evaluar los pagos futuros a los que se enfrentan para estimar las reservas necesarias. Estos pagos no sólo están afectados por las cuantías de siniestralidad, sino que también le afectan variables como los gastos o la inflación y, por tanto, incorporamos en nuestro análisis.

El proceso de estimación de las provisiones para prestaciones se realiza en un contexto de incertidumbre. El riesgo de estimación de las provisiones está compuesto de las siguientes subcategorías de riesgo: riesgo estocástico, riesgo paramétrico y riesgo de modelo.

- El riesgo estocástico o incertidumbre del proceso de reservas proviene de la variación del número y coste de las reclamaciones efectuadas por los asegurados de la compañía. Este riesgo puede ser en teoría, por lo menos en gran parte, eliminado a través de la diversificación de la cartera. De esta forma, el análisis de grandes volúmenes de datos provoca que los resultados sean más predecibles y estén sujetos a menos incertidumbre.
- El riesgo paramétrico o incertidumbre asociada a los parámetros. Proviene del uso de parámetros inadecuados en la estimación de las provisiones. Mediante el uso de distintos parámetros y el análisis de su impacto este riesgo puede reducirse parcialmente.
- El riesgo del modelo o incertidumbre asociada al modelo. Proviene del uso de un modelo inadecuado en la estimación de las provisiones. Mediante el uso de distintos modelos y el análisis detallado de los resultados obtenidos este riesgo puede ser parcialmente reducido.

## 6.1. El proceso de estimación de las provisiones: *loss reserving*

### A. Introducción a los triángulos de desarrollo

La liquidación o pago de las reclamaciones por parte de una compañía de seguros puede ser un proceso largo, por lo que es de especial importancia una adecuada estimación de las provisiones necesarias. El proceso de estimación de la provisión para prestaciones se realiza a partir del agrupamiento de datos con el suficiente nivel de detalle y calidad. Una de las formas más comunes de mostrar los datos es mediante los triángulos de liquidación o desarrollo de siniestros (*loss development triangle*). Cada fila del triángulo representa un año dado de ocurrencia, mientras que cada columna representa los años de desarrollo o vencimiento<sup>48</sup>. Así, en un triángulo de siniestros se distingue una fila que recoge los años de origen, una columna que recoge los años de desarrollo, y las celdas que contienen las varia-

---

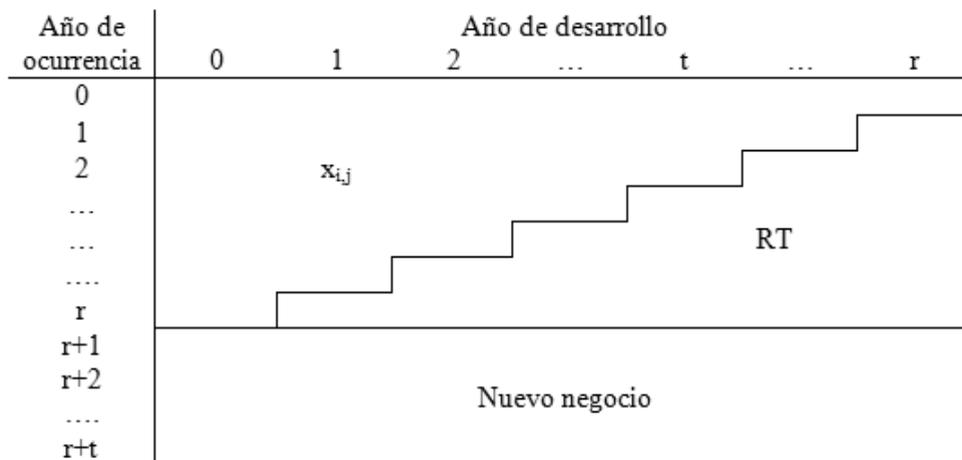
<sup>48</sup> La convención usual es que se muestren los datos relativos a 12 meses por lo que se habla de año de ocurrencia, sin embargo, pueden usarse otros períodos temporales: trimestres, cuatrimestres, etc. También pueden ser empleados otra clasificación distinta a la de año de ocurrencia, como año de declaración a la compañía, año de suscripción, etc.

bles que denotan el importe de las reclamaciones  $x_{ij}$  en un año de desarrollo  $j$  correspondientes al año de origen  $i$ . Si se considera, como es común, que el número de años de desarrollo es el mismo que número de años de origen y a dicho valor le denominamos  $r$ <sup>49</sup>, el triángulo superior estará formado por las cantidades  $x_{ij}$  para  $i = 0, 1, \dots, r$  y  $t = 0, 1, \dots, r$  y el triángulo inferior estará formado por las cantidades de siniestralidad que queremos predecir, es decir, el denominado “run-off triangle” o RT.



Además, en el caso de los modelos DFA con un horizonte temporal superior al año, no sólo deberemos calcular las provisiones a partir de las pólizas suscritas, sino que, fruto de la actividad normal de la compañía en los próximos años se suscribirá nuevo negocio. Por lo tanto, además del cálculo del triángulo RT debe ser calculado para cada uno de los nuevos años de simulación el rectángulo con los pagos estimados, para los años  $r+1, \dots, r+t$  siendo  $t$  el número de años para el cual se efectúa la simulación.

<sup>49</sup> En el caso de que ambos no coincidan al agrupamiento de los datos se le suele denominar trapecio. Esto se produce cuando los siniestros ocurridos en los períodos de ocurrencia más antiguos terminaron de declararse en su totalidad en períodos de desarrollo anteriores al actual. De esta forma, se dispone de varios períodos de ocurrencia con información completa sobre el comportamiento de estos siniestros. Sin embargo, esto no modifica la esencia de los procedimientos para la estimación de las provisiones que posteriormente comentaremos.



Para mostrar cómo se construye un triángulo de desarrollo de siniestralidad se muestra el siguiente ejemplo. Suponga que los pagos por siniestros realizados durante el año 2008 para una línea de negocio suman 2.000.000€. Puede ser útil conocer como esta cantidad se divide por años de ocurrencia de los siniestros. Por ejemplo, suponga que 1.000.000€ correspondan a pagos de siniestros acontecidos realmente en el año 2008, 300.000€ en el año 2007, etc. Es interesante comparar las cantidades que tuvieron lugar en el año 2007 para esta misma línea de negocio. Estas cantidades pueden ser divididas en función de los años o fecha de ocurrencia. Las hipotéticas cantidades para los pagos totales efectuados en los años 2008 y 2007 se muestran en la siguiente tabla.

<b>Pagos totales en el año 2008</b>	<b>2.000.000 €</b>	<b>Pagos totales en el año 2007</b>	<b>1.820.000€</b>
Pago de siniestros 2008:	1.000.000 €	Pago de siniestros 2007:	900.000€
Pago de siniestros 2007:	300.000 €	Pago de siniestros 2006:	250.000€
Pago de siniestros 2006:	200.000 €	Pago de siniestros 2005:	170.000€
Pago de siniestros 2005:	150.000 €	Pago de siniestros 2004:	150.000€
Pago de siniestros 2004:	150.000 €	Pago de siniestros 2003:	130.000€
Pago de siniestros 2003:	100.000 €	Pago de siniestros 2002:	120.000€
Pago de siniestros 2002:	100.000 €	Pago de siniestros 2001:	100.000€

La comparación entre las cantidades para cualquier año de ocurrencia se vuelve complicada a medida que vamos aumentando los años, razón por la cual se construyen los triángulos de desarrollo que permiten realizar las comparaciones entre los componentes de los años de ocurrencia de las cantidades pagadas en los su-

cesivos años de desarrollo o liquidación. Por ejemplo, a continuación se muestra el siguiente triángulo los pagos incrementales para los anteriores datos.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo						
	0	1	2	3	4	5	6
2002					E	120.000	100.000
2003				D	130.000	100.000	
2004			C	150.000	150.000		
2005		B	170.000	150.000			
2006	A	250.000	200.000				
2007	900.000	300.000					
2008	1.000.000						

En el triángulo anterior se aprecia que los pagos efectuados en el año 2008 aparecen en la diagonal inferior del triángulo. De forma similar los pagos efectuados en el año 2007, aparecen en la segunda diagonal inferior. Los datos organizados de esta forma facilitan la comparación histórica del desarrollo de los pagos para los distintos años de ocurrencia. Otra forma también muy útil de mostrar los pagos es acumulándolos para un año de ocurrencia dado. Si  $x_{i,j}$  denotaba los pagos efectuados para un año de ocurrencia  $i$  y un año de desarrollo  $j$ ,  $S_{i,j}$  representa los pagos acumulados. A continuación se muestra el triángulo de pagos acumulados (*cumulative loss payments*) para los datos empleados.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo						
	0	1	2	3	4	5	6
2002						E+120.000	E+220.000
2003					D+130.000	D+230.000	
2004				C+150.000	C+300.000		
2005			B+170.000	B+320.000			
2006		A+250.000	A+450.000				
2007	900.000	1.200.000					
2008	1.000.000						

Los triángulos de desarrollo de los pagos acumulados por siniestros muestran como los siniestros en cada año de ocurrencia se desarrollan a su último valor. El número de años de desarrollo debe ser tan elevado que permita que la cuantía pendiente sea despreciable.

## B. Fases del proceso de estimación de la provisión para prestaciones

El proceso de estimación de la provisión para prestaciones pendientes es un proceso en el que se pueden distinguir tres fases principales (Wiser *et al.*, 2001):

1. Análisis exploratorio de los datos históricos para identificar las características clave y las posibles anomalías.
2. Aplicación de las técnicas de estimación adecuadas. Evaluación de los resultados obtenidos empleando varios métodos.
3. Control de las proyecciones o evaluación de la exactitud del método empleado a lo largo de los siguientes períodos. Se debe emplear como herramienta de diagnóstico las desviaciones entre las cantidades finalmente satisfechas frente a las proyecciones. Además, en este proceso deben identificarse los orígenes y las causas de dichas desviaciones.

### B.1. Fase 1: Análisis de los datos históricos

Los métodos para la estimación de las provisiones para prestaciones pendientes parten normalmente de la hipótesis de que la experiencia pasada o historia de la compañía puede ser empleada para predecir el comportamiento futuro. Por ello, es indispensable una evaluación de los datos históricos obtenidos para verificar la adecuación de la anterior hipótesis. El análisis de los datos de la siniestralidad de la compañía intenta identificar posibles tendencias y cambios<sup>50</sup> que afectan a la base de datos. De esta forma, un análisis exploratorio detallado de los datos es una condición indispensable para una correcta estimación de la provisión para prestaciones. La exploración de datos ayuda en la identificación de anomalías, la selección de los métodos más adecuados para la estimación y a la posterior interpretación de los resultados obtenidos.

Para un correcto tratamiento de los datos, éstos se dividen en grupos internamente homogéneos que tengan características similares<sup>51</sup>. Este agrupamiento es indispensable para una adecuada estimación y, que la extracción de conclusiones sea válida. Frecuentemente se agrupan los datos por línea de negocio, de forma que los distintos grupos tengan similares características de frecuencia y coste.

La credibilidad de los datos es un factor imprescindible para realizar predicciones, y viene influenciada por el volumen de datos y la homogeneidad de los datos. En los casos en los que estas fuerzas operen en sentidos opuestos debe buscarse la homogeneidad de los datos y solucionar su escasez recurriendo a datos de mercado (Wiser *et al.*, 2001).

---

<sup>50</sup> Los cambios a analizar incluyen cambios en el entorno interno y externo de la compañía. Los cambios en el entorno interno se pueden producir por cambios en el negocio suscrito de la compañía como cambios geográficos, en las franquicias de las pólizas, etc. En los cambios del entorno externo de la compañía debe identificarse y evaluarse cambios en el entorno económico (cambios en la tasa de inflación, etc.), en el marco político-legal, entre otros.

<sup>51</sup> Estas características se refieren a la longitud del periodo temporal entre que surge un siniestro y se declara a la compañía, y la longitud entre que se declara un siniestro y éste se liquida por la compañía.

Para la correcta identificación de los patrones de desarrollo de los siniestros, es frecuente recurrir al análisis de distintos triángulos de datos para la identificación de datos anómalos o tendencias en la siniestralidad. Algunos de los triángulos más comúnmente empleados para las cantidades agregadas de siniestralidad, para un mismo año de ocurrencia, son los triángulo de siniestros incurridos o pagados acumulados y los triángulo de siniestros incurridos o pagados incrementales. Además, en el caso de obtenerse datos anómalos o simplemente para una mejor comprensión de los datos históricos es útil recurrir a triángulos basados en el número de siniestros y en los costes de dichos siniestros. En el primer caso podemos apreciar cambios en el volumen o composición de negocio, o cambios en los patrones de declaración de siniestros. En este caso podemos organizar los datos, entre otros, en triángulos de número de siniestros incurridos, número de siniestros cerrados con pago o siniestros cerrados sin pago. En el segundo caso, podemos evaluar los cambios en los costes de los siniestros debidos a variables como, por ejemplo, la inflación.

### *B.2. Fase 2: Métodos de la estimación de las provisiones para prestaciones*

Las provisiones para prestaciones recogen el pasivo de la compañía para hacer frente a las cantidades todavía no pagadas a los asegurados en concepto de prestaciones derivadas de sus pólizas. Por lo tanto, el importe que una compañía aseguradora debe dotar es la diferencia entre la siniestralidad pagada y la cuantía total que espera pagar, el denominado último pago esperado. Por ejemplo, en el caso de que la siniestralidad esperada sea calculada en función de la ratio de siniestralidad (LR) el cálculo de la provisión necesaria se efectuaría como se muestra en a continuación.

<b>Año de ocurrencia</b>	<b>Primas ganadas</b>	<b>Siniestros pagados</b>	<b>Loss ratio</b>	<b>Provisión usando el LR</b>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (2) × (4) – (3)
2.006	20.000	10.000	55%	1.000
2.007	18.000	5.400	52%	3.960
2.008	16.000	1.600	60%	8.000
Total	54.000	17.000		12.960

Para el cálculo de la provisión para prestaciones se establecen dos grandes métodos: el método individual y el método estadístico. El método individual se basa en la valoración de cada uno de los siniestros que la compañía está tramitando a cierre de ejercicio, de forma que la provisión técnica será la suma de las cuantías para cada siniestro<sup>52</sup>. Existen múltiples métodos estadísticos<sup>53</sup> para proyectar el valor de las

<sup>52</sup> Este método sólo es aplicable a los siniestros pendientes de liquidación y pago (*Reported But Not Settled*, RBNS).

provisiones para que recojan el importe último de los siniestros. Una revisión del estado del conocimiento puede realizarse a través del Fórum anual que organiza la CAS americana o el manual publicado por el Instituto de Actuarios del Reino Unido (Faculty and Institute of Actuaries, 1997). Los métodos estadísticos se clasifican en función de su naturaleza en métodos deterministas y métodos estocásticos. Los primeros son técnicas tradicionales de estimación de las provisiones en donde se realiza una estimación puntual del valor de las mismas (véase Berquist y Sherman, 1977 y Wiser *et al.*, 2001). Sin embargo, tal y como afirma Bermúdez (2009) el cálculo de las provisiones técnicas en Solvencia II debe realizarse preferentemente mediante métodos estocásticos, debido a la ventaja que suponen a la hora de obtener medidas de la precisión de la estimación de las provisiones. England y Verrall (2002) realizan una revisión de los principales métodos estocásticos para la estimación de las provisiones para prestaciones. Nosotros queremos destacar como principales métodos estocásticos para su uso en DFA los siguientes<sup>54</sup>:

- El método de Mack o modelo de distribución libre de Mack (1993), que usa los ratios de desarrollo para obtener un valor medio de la provisión. Posteriormente, se deriva el riesgo de proceso y parámetro de la provisión, a partir del cual se obtiene la desviación estándar. A partir de la media y desviación de la provisión para prestaciones se ajusta una distribución (frecuentemente normal o lognormal), a partir de la cual se obtiene el percentil deseado.
- El método de simulación calcula la media y la desviación estándar de las ratios de desarrollo o de los porcentajes de pago para posteriormente proceder al ajuste de una distribución (frecuentemente normal o lognormal en el primer caso y beta en el segundo). Por simulación de la distribución ajustada se obtiene la distribución estimada de la provisión.
- El *bootstrapping* es una técnica que permite extraer información sobre una muestra de datos. Implica el remuestreo con reemplazamiento de los datos observados creando un gran número de conjuntos de pseudo-datos, que son consistentes con la distribución de la muestra originaria (Efron y Tibshirani, 1993). El método bootstrap aplicado a las provisiones consiste en el remuestreo de los errores entre los valores actuales y los estimados del triángulo acumulado. Posteriormente, se calculan nuevos ratios de desarrollo con los que se obtiene el valor de la provisión, y mediante el remuestreo de los residuos su distribución. England y Verrall (1999) aplican el *bootstrap* para calcular la variabilidad de las reservas.<sup>55</sup>

---

<sup>53</sup> Estos métodos son los más adecuados para el cálculo de las provisiones por siniestros pendientes de declaración (*Incurred But Not Reported*, IBNR), pero también pueden ser utilizados para el cálculo de las provisiones por siniestros pendientes de liquidación y pago.

<sup>54</sup> El campo de la estimación de provisiones abarque una multitud más amplia de técnicas. Existen otras familias de métodos entre los que destacan los modelos bayesianos (Verrall, 2007), los modelos basados en la Teoría de la Credibilidad (Verrall, 2006) y los basados en el filtro de Kalman (de Jong y Zehnwirth, 1983).

<sup>55</sup> Este método se basa en el denominado chain-ladder estocástico con distribución Poisson sobredispersa (PSD) que supone que los importes no acumulados de los siniestros se distribuyen como varia-

- El método Munich-Chain Ladder (Quarg y Mack 2004, 2008<sup>56</sup>) que realiza la estimación de la provisión para prestaciones a partir de los triángulos de siniestros pagados e incurridos, reduciendo la diferencia que normalmente se produce entre las proyecciones de las provisiones efectuadas a partir de ambos triángulos.

### B.3. Fase 3: Control y supervisión de las provisiones

Cualquier método de estimación de las provisiones debe proporcionar o emplear un valor para la siniestralidad última estimada. Los valores de distintos métodos serán frecuentemente distintos y, por tanto, también lo será el valor de la provisión resultante. De ahí la importancia de analizar la razonabilidad de la última siniestralidad estimada a través de medidas como la ratio de siniestralidad, el importe medio estimado de la última reclamación, la razonabilidad del número de reclamaciones proyectada, etc. (Wiser *et al.*, 2001). Un Balance de una compañía aseguradora refleja una única estimación de la provisión para prestaciones, por lo tanto, si empleamos un método determinista éste será el valor facilitado, mientras que, si empleamos un método estocástico el valor de las provisiones empleado es su mejor estimación. La ventaja de emplear un método estocástico es que se genera toda la distribución de la provisión, lo cual es empleado por DFA para generar Balances estocásticos a partir de los cuales pueden ser calculados distintas medidas de riesgo.

Es importante realizar un seguimiento de las proyecciones de siniestralidad efectuadas. En el caso de que los resultados difieran de los previstos, debe realizarse un análisis para esclarecer si las diferencias son debidas a un comportamiento puramente aleatorio o, por lo contrario, si se deben revisar el método de estimación y/o las hipótesis efectuadas.

## 6.2. Métodos deterministas

En este apartado revisaremos los dos principales métodos para el cálculo de la prestación para prestaciones: el método Chain Ladder y el método Bornhuetter-Ferguson. Al mismo tiempo que se incluyen distintas consideraciones respecto al cálculo del valor descontado, y los efectos de la inflación y los gastos.

### A. El método Chain Ladder

El método más común para estimar la provisión para prestaciones consiste en proyectar la historia de un grupo de reclamaciones con características similares

---

bles aleatorias independientes Poisson sobredispersas. Dicha distribución se diferencia de la distribución Poisson en que la varianza no es igual a la media, sino que es proporcional a la media. En England y Verrall (2006) se especifican los retoques que deben tenerse en cuenta para aplicar el procedimiento *bootstrapping* a otros modelos chain-ladder estocásticos, con distribución distinta a la PSD.

<sup>56</sup> Es el mismo trabajo, pero ha sido reeditado por la revista *Variance* para aumentar su visibilidad dada la importancia del mismo.

que se agrupan en un triángulo de siniestralidad. Cada año de ocurrencia es proyectado a su valor último esperado, basándose en la creencia de que cada año debe ser completado en una manera similar a la de los años anteriores. Por eso se dice que la hipótesis fundamental que se asume es la proporcionalidad entre las columnas del triángulo. Por lo tanto, debe ser empleado por aquellos aseguradores que tengan los datos de reclamaciones históricas alisados, es decir, que los patrones para un mismo año de ocurrencia sean comparables. Los triángulos que se pueden emplear en este método pueden ser triángulos acumulados de siniestros pagados, incurridos, etc. Debido a la similitud del procedimiento, nos centraremos en el caso del desarrollo o estimación de la provisión a partir de los triángulos de siniestros pagados acumulados.

A partir de un triángulo de siniestros pagados acumulados se deben calcular los factores de desarrollo (*chain ladder factors*, *aging factors*, *age-to-age factors*, *link ratios* o *report to report factors*) para cada año de ocurrencia. Los factores de desarrollo indican la ratio de los importes pagados en el período  $t+1$  entre los importes del año  $t$  (año anterior). Supongamos que la compañía cuenta con el siguiente volumen de información para los últimos 10 años ( $r=10$ ) para las cantidades incrementales pagadas por siniestros  $x_{i,j}$ .

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.514.018	861.806	514.497	519.613	282.038	170.016	180.455	30.000	7.099	5.689
1	3.595.978	1.251.246	567.060	529.319	308.006	193.725	151.174	12.087	10.159	
2	3.749.652	1.333.272	937.513	666.116	205.369	239.529	175.933	10.700		
3	4.036.511	1.958.470	1.155.572	812.619	380.560	263.908	236.490			
4	4.364.349	2.358.228	1.116.320	814.905	393.286	257.064				
5	5.583.499	3.680.540	1.554.255	1.592.117	551.768					
6	6.105.991	3.557.714	1.986.766	1.691.244						
7	6.310.890	4.090.659	2.153.014							
8	5.972.807	4.203.289								
9	5.470.804									

Se deben acumular los datos de los siniestros pagados para un mismo año de ocurrencia ( $S_{i,j}$ ); resultando el siguiente triángulo.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.514.018	4.375.824	4.890.321	5.409.934	5.691.972	5.861.988	6.042.443	6.072.443	6.079.542	6.085.231
1	3.595.978	4.847.224	5.414.284	5.943.603	6.251.609	6.445.334	6.596.508	6.608.595	6.618.754	
2	3.749.652	5.082.924	6.020.437	6.686.553	6.891.922	7.131.451	7.307.384	7.318.084		
3	4.036.511	5.994.981	7.150.553	7.963.172	8.343.732	8.607.640	8.844.130			
4	4.364.349	6.722.577	7.838.897	8.653.802	9.047.088	9.304.152				
5	5.583.499	9.264.039	10.818.294	12.410.411	12.962.179					
6	6.105.991	9.663.705	11.650.471	13.341.715						
7	6.310.890	10.401.549	12.554.563							
8	5.972.807	10.176.096								
9	5.470.804									

Se puede calcular el desarrollo o ratio de incremento  $A_{i,j}$  de la cantidad pagada para un mismo año de ocurrencia para los años de desarrollo sucesivos como  $A_{i,j} = \frac{S_{(i,j+1)}}{S_{(i,j)}}$ , para  $i = 0, 1, \dots, r-1$  y  $j = 0, 1, \dots, r-1$ . Los valores de dicha ratio se muestran a continuación.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0-12	12-24	24-36	36-48	48-60	60-72	72-84	84-96	96-108	
0	1,2452	1,1176	1,1063	1,0521	1,0299	1,0308	1,0050	1,0012	1,0009	
1	1,3480	1,1170	1,0978	1,0518	1,0310	1,0235	1,0018	1,0015		
2	1,3556	1,1844	1,1106	1,0307	1,0348	1,0247	1,0015			
3	1,4852	1,1928	1,1136	1,0478	1,0316	1,0275				
4	1,5403	1,1661	1,1040	1,0454	1,0284					
5	1,6592	1,1678	1,1472	1,0445						
6	1,5827	1,2056	1,1452							
7	1,6482	1,2070								
8	1,7037									

La ratio de incremento es útil para evaluar los porcentajes de variación para años de desarrollo sucesivos sobre la base del mismo año de ocurrencia, proporcionando una información útil evaluados sobre un mismo año de desarrollo. De esta forma si observamos ratios muy dispares deberemos identificar sus causas, recurriendo frecuentemente a los triángulos sobre el número de siniestros y la cuantía de los mismos.

El método Chain Ladder se basa en el cálculo de los factores de desarrollo para así proyectar los pagos futuros esperados. El valor del factor para cada año de desarrollo será  $Factor_j$ , entonces se dice que el desarrollo desde el periodo  $t$  al  $t+1$  para un año de accidente es un incremento en los siniestros pagados de  $(Factor_j - 1) \cdot 100\%$ , o de forma alternativa, que las cantidades pagadas en el año  $t+1$  son  $Factor_j$  veces las liquidadas en el año  $t$ . De esta forma, si el factor de desarrollo de 0 a 12 meses de los siniestros pagados para un año de ocurrencia, al que denotamos por  $Factor_0$ , es de 3,7, se dice que por término medio las cantidades pagadas en el año 1 son 3,7 veces o un 270% superiores a las cantidades pagadas en el año 0.

La técnica más común a la hora de seleccionar los factores de desarrollo es emplear varias medias respecto al mismo año de ocurrencia. Entre las medias que se pueden emplear destaca el uso de la media simple, la media de los últimos años donde es normal emplear 3 o 5 años, medias ponderadas, medias geométricas, medias excluyendo el mayor y el menor, etc. Dichas medias pueden ser calculadas sobre los ratios de incremento o, lo que es más frecuente, sobre las cantidades. El método Chain Ladder tradicional emplea la media simple para las cantidades, por lo que la fórmula será:

$$Factor_j = \frac{\sum_{i=0}^{r-j-1} S_{(i,j+1)}}{\sum_{i=0}^{r-j-1} S_{(i,j)}}$$

Así, el  $Factor_0$ , es decir aquel que se corresponde con el año de desarrollo de 0 a 12 meses, calculado sobre las cantidades de siniestros pagados sería igual a:

$$Factor_0 = \frac{4.375.824 + 4.847.224 + \dots + 10.401.549 + 10.176.096}{3.514.018 + 3.595.978 + \dots + 6.310.890 + 5.972.807}$$

Para el  $Factor_1$ , que se corresponde con el año segundo de desarrollo o factor de 12 a 24 meses, sería igual a:

$$Factor_1 = \frac{4.890.321 + 5.414.284 + \dots + 11.650.471 + 12.554.563}{4.375.824 + 4.847.224 + \dots + 9.663.705 + 10.401.549}$$

El método chain ladder pertenece a la metodología denominada *link ratio*, que emplea otros factores de desarrollo. En el caso de emplear la media simple para las ratios de incremento o desarrollo la fórmula sería:

$$Factor_j = \frac{\sum_{i=0}^{r-j-1} A_{i,j}}{r - j - 1}$$

A modo de ejemplo el  $Factor_0$  para los ratios de incremento o desarrollo se calcula como:

$$Factor_0 = \frac{1,2452 + 1,3480 + \dots + 1,6482 + 1,7037}{9}$$

Para el  $Factor_1$  su cálculo se realizaría como:

$$Factor_1 = \frac{1,1176 + 1,1170 + \dots + 1,2056 + 1,2070}{8}$$

A continuación se muestran algunas de las medias calculadas en base a las cuales se deben elegir los factores de desarrollo (*Loss Development Factors* o LDFs) para la proyección del triángulo RT.

		Año de desarrollo								
		0-12	12-24	24-36	36-48	48-60	60-72	72-84	84-96	96-108
<b>Medias sobre cantidades</b>	Media	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009
	Media últ. 3	1,6445	1,1941	1,1352	1,0457	1,0313	1,0254	1,0026		
	Media últ. 5	1,6313	1,1895	1,1283	1,0441	1,0310				
<b>Medias sobre ratios</b>	Media	1,5076	1,1698	1,1178	1,0454	1,0311	1,0266	1,0028	1,0014	1,0009
	Media últ. 3	1,6449	1,1935	1,1321	1,0459	1,0316	1,0252	1,0028		
	Media últ. 5	1,6268	1,1878	1,1241	1,0440	1,0311				

Las medias, en principio, más relevantes son las de los últimos años de desarrollo debido que recogen las últimas tendencias para la proyección del futuro. Por el contrario, sus deficiencias son que no se usa toda la información disponible y se imposibilita la continuación de una tendencia lo cual en muchos casos puede ser deseable (Tu, 1998). Sin embargo, siempre se debe buscar un equilibrio entre estabilidad e introducción de más años en el cálculo de las medias, analizando el interés o de incluir determinados años en las medias<sup>57</sup>.

Supongamos que consideramos que los factores LDFs seleccionados se corresponden con la media simple sobre las cantidades.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Factor <sub>j</sub>	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009

Debemos tener en cuenta que el número de años  $r$  históricos pueden no recoger todo el período de liquidación, por lo que es común incluir un factor de cola o *tail factor*. El factor de cola es el desarrollo que falta desde el momento en el que ya no disponemos de más años de desarrollo, es decir, el desarrollo desde el último año para el que podemos calcular los pagos hasta el momento que esperamos se

<sup>57</sup> Además, es muy importante reconocer los niveles normales de fluctuación aleatoria en los desarrollos y analizar el efecto del valor de un año concreto, que puede o no ser considerado anómalo, sobre la media y si la causa de ese desarrollo puede seguir en el futuro. De esta forma, pueden ser identificadas tendencias en los patrones de desarrollo que pueden provocar cambios en los desarrollos futuros.

acaben los pagos por siniestros para un mismo año de ocurrencia (último pago). El índice de cola puede ser especificado por el actuario en base a su juicio o también es frecuentemente estimado a partir de los datos a través de diversas formas funcionales.

Inicialmente supondremos que el índice de cola es igual a 1, lo que implica que el pago efectuado en el último año de desarrollo es el último pago que la compañía efectuará para ese año de ocurrencia y ese grupo de riesgos homogéneos. Por lo tanto finalmente, nuestros factores de desarrollo quedan conforme se muestra a continuación.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Factor <sub>j</sub>	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009	1,0000

En base a estos factores de desarrollo seleccionados es fácil calcular los porcentajes de siniestros, que se asume que por término medio, serán pagados en cada año de desarrollo para un mismo año de ocurrencia. De esta forma podemos calcularlos por medio de las siguientes fórmulas:

Factor acumulado<sub>j</sub>=Factor seleccionado<sub>j</sub>·Factor acumulado<sub>j+1</sub> para  $j=r-1, r-2, \dots, 0$

$$\text{Pago esperado } \%_j = 1/\text{Factor acumulado}_j$$

$$\text{Pago esperado incremental } \%_j = \text{Pago esperado } \%_j - \text{Pago esperado } \%_{j-1}$$

Por lo tanto finalmente, los pagos esperados incrementales serán los recogidos en:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Factor seleccionado o LDF	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009	1
Factor acumulado o CDF	2,2616	1,4697	1,2485	1,1116	1,0636	1,0316	1,0050	1,0023	1,0009	1
Pago esperado %	44,22%	68,04%	80,10%	89,96%	94,02%	96,94%	99,51%	99,77%	99,91%	100,00%
Pago esperado incremental %	44,22%	23,82%	12,06%	9,87%	4,05%	2,92%	2,57%	0,26%	0,14%	0,09%

Una vez tenemos los factores de desarrollo seleccionados, podemos obtener el triángulo RT simplemente multiplicando sucesivamente los factores de desarrollo seleccionados por la última siniestralidad pagada para cada año de ocurrencia.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.514.018	4.375.824	4.890.321	5.409.934	5.691.972	5.861.988	6.042.443	6.072.443	6.079.542	6.085.231
1	3.595.978	4.847.224	5.414.284	5.943.603	6.251.609	6.445.334	6.596.508	6.608.595	6.618.754	6.624.948
2	3.749.652	5.082.924	6.020.437	6.686.553	6.891.922	7.131.451	7.307.384	7.318.084	7.328.043	7.334.901
3	4.036.511	5.994.981	7.150.553	7.963.172	8.343.732	8.607.640	8.844.130	8.867.536	8.879.604	8.887.913
4	4.364.349	6.722.577	7.838.897	8.653.802	9.047.088	9.304.152	9.550.985	9.576.261	9.589.294	9.598.267
5	5.583.499	9.264.039	10.818.294	12.410.411	12.962.179	13.364.445	13.718.995	13.755.301	13.774.021	13.786.911
6	6.105.991	9.663.705	11.650.471	13.341.715	13.942.940	14.375.643	14.757.019	14.796.073	14.816.209	14.830.073
7	6.310.890	10.401.549	12.554.563	14.101.247	14.736.699	15.194.035	15.597.123	15.638.400	15.659.682	15.674.336
8	5.972.807	10.176.096	11.979.170	13.454.967	14.061.295	14.497.671	14.882.284	14.921.670	14.941.977	14.955.959
9	5.470.804	8.418.588	9.910.254	11.131.167	11.632.777	11.993.787	12.311.973	12.344.557	12.361.357	12.372.924

Por diferencia entre los siniestros pagados hasta la fecha de estimación y el valor de los últimos siniestros proyectados, obtenemos el valor de la provisión necesaria para cada año de ocurrencia y por suma el valor de la provisión para prestaciones de ese grupo homogéneo. Este valor indica el importe de dinero necesario para pagar los pasivos por siniestros no pagados en los distintos años de ocurrencia analizados.

Año de ocurrencia	Pagado	Último pago esperado	Provisión para prestaciones
0	6.085.231,00	6.085.231,00	—
1	6.618.754,00	6.624.947,57	6.193,57
2	7.318.084,00	7.334.900,70	16.816,70
3	8.844.130,00	8.887.912,84	43.782,84
4	9.304.152,00	9.598.266,86	294.114,86
5	12.962.179,00	13.786.910,58	824.731,58
6	13.341.715,00	14.830.073,37	1.488.358,37
7	12.554.563,00	15.674.336,04	3.119.773,04
8	10.176.096,00	14.955.959,07	4.779.863,07
9	5.470.804,00	12.372.923,87	6.902.119,87
<b>TOTAL</b>			<b>17.475.753,90</b>

En nuestro segundo ejemplo empleamos el índice de cola estimado a través de regresión log-lineal a partir del año 5 de desarrollo, que en nuestro caso es igual a

1,0003<sup>58</sup>. Esto implica que el pago efectuado en el último año de desarrollo calculado no es el último pago que la compañía efectuará para ese año de ocurrencia, quedando un 0,0327% más de siniestralidad. Por lo tanto finalmente, nuestros factores de desarrollo son los mostrados en:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9-Último
$Factor_j$	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009	1,0003

En base a estos factores de desarrollo seleccionados calculamos los porcentajes de siniestros que se asume que por término medio serán pagadas en cada año de desarrollo para un mismo año de accidente.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Último
Factor seleccionado	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009	1	1,0003
Factor acumulado	2,2623	1,4702	1,2489	1,1119	1,0639	1,0319	1,0053	1,0026	1,0012	1,0003	1,0003
PE %	44,20%	68,02%	80,07%	89,94%	93,99%	96,91%	99,48%	99,74%	99,88%	99,97%	100%
PE incremental %	44,20%	23,82%	12,05%	9,86%	4,05%	2,92%	2,57%	0,26%	0,14%	0,09%	0,03%

Una vez tenemos los triángulos de los factores de desarrollo calculados, podemos obtener el triángulo RT simplemente multiplicando sucesivamente los factores de desarrollo seleccionados por la última siniestralidad pagada, y obtener así el valor de las provisiones

<sup>58</sup> Es el método empleado por el CEIOPS en la herramienta para la valoración de los provisiones puesta en disposición de los aseguradores europeos no vida. La regresión estimada es  $y = bx + a$ , mediante la cual se obtienen los siguientes valores  $a = 3,2217$  y  $b = -1,0699$ , por lo que proyectándose 50 años obtenemos el factor de cola de 1,0003.

$x = j$	5	6	7	8
$Y = Factor_j - 1$	-3,6295	-5,9345	-6,5996	-6,9742

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Último
0	3.514.018	4.375.824	4.890.321	5.409.934	5.691.972	5.861.988	6.042.443	6.072.443	6.079.542	6.085.231	6.087.194
1	3.595.978	4.847.224	5.414.284	5.943.603	6.251.609	6.445.334	6.596.508	6.608.595	6.618.754	6.624.948	6.627.085
2	3.749.652	5.082.924	6.020.437	6.686.553	6.891.922	7.131.451	7.307.384	7.318.084	7.328.043	7.334.901	7.337.267
3	4.036.511	5.994.981	7.150.553	7.963.172	8.343.732	8.607.640	8.844.130	8.867.536	8.879.604	8.887.913	8.890.780
4	4.364.349	6.722.577	7.838.897	8.653.802	9.047.088	9.304.152	9.550.985	9.576.261	9.589.294	9.598.267	9.601.364
5	5.583.499	9.264.039	10.818.294	12.410.411	12.962.179	13.364.445	13.718.995	13.755.301	13.774.021	13.786.911	13.791.359
6	6.105.991	9.663.705	11.650.471	13.341.715	13.942.940	14.375.643	14.757.019	14.796.073	14.816.209	14.830.073	14.834.858
7	6.310.890	10.401.549	12.554.563	14.101.247	14.736.699	15.194.035	15.597.123	15.638.400	15.659.682	15.674.336	15.679.393
8	5.972.807	10.176.096	11.979.170	13.454.967	14.061.295	14.497.671	14.882.284	14.921.670	14.941.977	14.955.959	14.960.784
9	5.470.804	8.418.588	9.910.254	11.131.167	11.632.777	11.993.787	12.311.973	12.344.557	12.361.357	12.372.924	12.376.916

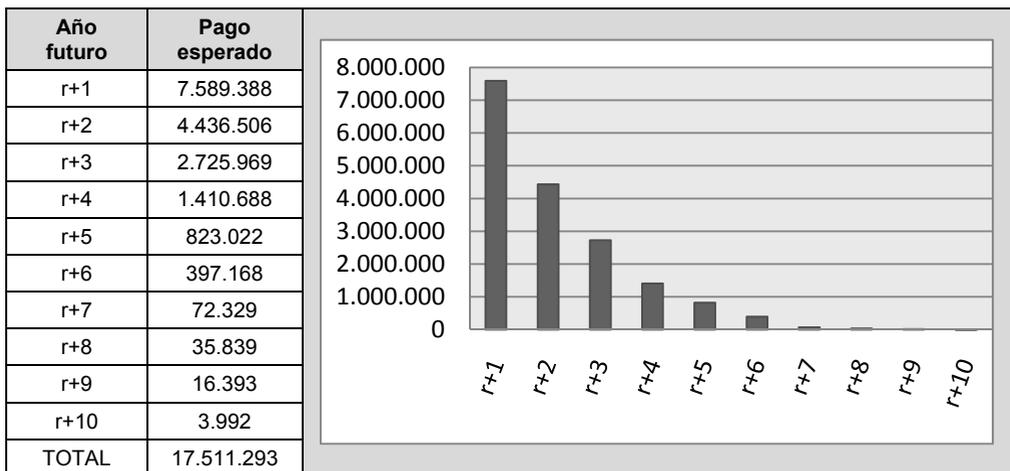
Año de ocurrencia	Pagado	Último pago esperado	Provisión para prestaciones
0	6.085.231,00	6.087.194,34	1.963,34
1	6.618.754,00	6.627.085,05	8.331,05
2	7.318.084,00	7.337.267,23	19.183,23
3	8.844.130,00	8.890.780,44	46.650,44
4	9.304.152,00	9.601.363,65	297.211,65
5	12.962.179,00	13.791.358,80	829.179,80
6	13.341.715,00	14.834.858,15	1.493.143,15
7	12.554.563,00	15.679.393,22	3.124.830,22
8	10.176.096,00	14.960.784,47	4.784.688,47
9	5.470.804,00	12.376.915,88	6.906.111,88
<b>TOTAL</b>			<b>17.511.293,23</b>

Podemos descomponer la provisión para prestaciones en función de los pagos esperados para los próximos años. A continuación se muestra esta descomposición para el caso en el que el factor de cola ha sido calculado mediante regresión.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Último
0										1.963
1									6.194	2.137
2								9.959	6.857	2.367
3							23.406	12.068	8.309	2.868
4						246.833	25.276	13.033	8.973	3.097
5					402.266	354.550	36.307	18.720	12.889	4.448
6				601.225	432.703	381.376	39.054	20.136	13.864	4.785
7			1.546.684	635.452	457.336	403.087	41.277	21.283	14.654	5.057
8		1.803.074	1.475.797	606.328	436.376	384.613	39.385	20.307	13.982	4.825
9	2.947.784	1.491.666	1.220.913	501.610	361.010	318.187	32.583	16.800	11.567	3.992

También es útil representar los pagos esperados para los próximos años en función del año en el que se estima su ocurrencia. Los pagos futuros estimados no descontados para el primer año ( $r+1$ ) se calcularán a partir de la suma de la primera diagonal, y así sucesivamente. Con base a los datos manejados en el ejemplo, el pago esperado del primer año se calcula<sup>59</sup> como:

$$\text{Pago esperado}_{r+1} = 1.963 + 6.194 + \dots + 1.803.074 + 2.947.784 = 7.589.388$$



### Descuento de las provisiones

En Solvencia II el cálculo de las provisiones debe realizarse a través del valor descontado de los pagos futuros esperados<sup>60</sup>. Para ello debemos establecer hipótesis acerca del momento temporal a lo largo del año en el que se produce el pago y del tipo de interés que la compañía puede ganar invirtiendo dichos flujos. Respecto al primer aspecto es común suponer que los pagos acontecen a mediados del año natural, siendo menos habitual considerarlos a final de año. Para descontar los flujos se deben considerar los tipos de interés libres de riesgo, por lo que vamos a emplear los tipos de interés estándar proporcionados por la ETTI EURO de QIS4. De esta forma calcularemos el valor de las reservas bajo las dos siguientes hipótesis: a) los pagos se efectúan a mediados de año y b) los pagos se efectúan a final de año.

El factor de descuento a aplicar para los pagos previstos en  $r+1$  se calcula como  $1/(1 + 4.696\%)^{(0,5)}$  en el caso de la hipótesis a, y como  $1/(1 + 4.696\%)$  en el caso

<sup>59</sup> Suponiendo de forma simplificada que el pago a efectuar del año 9 a último se realiza de forma completa.

<sup>60</sup> Esta valoración no es única de Solvencia II, ya que los requerimientos regulatorios internacionales se están estableciendo actualmente en base al valor económico de las provisiones y no en su valor nominal como se hacía tradicionalmente (D'Arcy *et al.*, 2009).

de la hipótesis b. El valor de la provisión descontada simplemente se calcula por producto del valor sin descontar y del factor de descuento. De esta forma, el descuento de los pagos futuros al tipo de interés libre de riesgo, nos proporciona el valor actual de la provisión. Por lo tanto, se obtiene una menor cantidad como se muestra en la siguiente tabla para las dos hipótesis manejadas.

Total Provisión sin descontar	17.511.292
Total Provisión descontadas (a)	16.295.138
Total Provisión descontadas (b)	15.932.481
Cantidad descontada (a)	1.216.154
Cantidad descontada (b)	1.578.811

	r+1	r+2	r+3	r+4	r+5	r+6	r+7	r+8	r+9	r+10
0	1.963									
1	6.194	2.137								
2	9.959	6.857	2.367							
3	23.406	12.068	8.309	2.868						
4	246.833	25.276	13.033	8.973	3.097					
5	402.266	354.550	36.307	18.720	12.889	4.448				
6	601.225	432.703	381.376	39.054	20.136	13.864	4.785			
7	1.546.684	635.452	457.336	403.087	41.277	21.283	14.654	5.057		
8	1.803.074	1.475.797	606.328	436.376	384.613	39.385	20.307	13.982	4.825	
9	2.947.784	1.491.666	1.220.913	501.610	361.010	318.187	32.583	16.800	11.567	3.992
TOTAL	7.589.388	4.436.506	2.725.969	1.410.688	823.022	397.167	72.329	35.839	16.392	3.992
Tipos estándar (QIS4)	4,696%	4,526%	4,510%	4,533%	4,553%	4,580%	4,614%	4,653%	4,698%	4,742%
Factor de descuento (a)	0,9773	0,9358	0,8956	0,8563	0,8184	0,7817	0,7459	0,7110	0,6769	0,6439
Factor de descuento (b)	0,9551	0,9153	0,8760	0,8375	0,8004	0,7644	0,7292	0,6950	0,6615	0,6292
Provisión descontada (a)	7.417.229	4.151.496	2.441.329	1.207.936	673.592	310.460	53.948	25.481	11.096	2.571
Provisión descontada (b)	7.248.976	4.060.621	2.388.072	1.181.455	658.763	303.586	52.745	24.908	10.844	2.512

## **Inflación**

Para una correcta estimación de la cifra de provisiones se debe considerar no sólo su valor actual, sino todos los posibles aspectos que le afecten a los flujos futuros,

por lo que es preciso analizar el efecto de la inflación. El método Chain Ladder determinista explicado anteriormente se calcula en base a los datos agregados nominales, por lo que implícitamente proyecta al futuro la misma inflación que la acontecida en el pasado. En caso de que esta hipótesis no sea asumible se debe realizar un análisis más pormenorizado. Para ello debemos actualizar todas las cantidades históricas a unidades monetarias del último año, calcular los factores de desarrollo y, con base en la inflación prevista para los futuros años de desarrollo, calcular las nuevas cifras de pagos previstos. Este valor de la provisión se debe restar a los pagos ya satisfechos y actualizarse a los tipos de interés sin riesgo, constituyendo la mejor estimación de la provisión para prestaciones.

Las tasas de inflación deben ser específicas a la línea de negocio (u otro agrupamiento realizado), en caso de no disponer de éstas emplearíamos las tasas de inflación general. De esta forma, a partir de los hipotéticos datos de siniestralidad histórica incrementales y de las hipotéticas tasas de inflación ( $\pi$ ) pasadas para cada uno de los años de ocurrencia evaluados (véase las siguientes tablas), podemos calcular la cifra de pagos incrementales actualizados<sup>61</sup>.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.619.448	975.170	686.937	669.377	481.005	309.352	509.649	339.622	312.853	615.919
1	3.703.860	1.385.733	757.836	690.537	526.360	347.816	503.670	344.934	343.640	
2	3.862.143	1.474.932	1.165.001	853.139	432.661	413.302	567.684	378.745		
3	4.157.611	2.137.125	1.427.869	1.036.893	668.919	470.374	714.166			
4	4.495.280	2.563.426	1.407.307	1.053.174	704.032	476.564				
5	5.751.004	3.976.245	1.956.515	1.967.690	995.812					
6	6.289.179	3.857.713	2.435.617	2.093.382						
7	6.500.223	4.421.411	2.637.300							
8	6.151.992	4.532.915								
9	5.634.929									

Año de ocurrencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi$	2,40%	1,20%	1,40%	2,40%	2,80%	3,40%	3,90%	4,0%	3,60%
$1+\pi$	1,024	1,012	1,014	1,024	1,028	1,034	1,039	1,040	1,036

Para ello debemos establecer el factor al que debe ser actualizado cada pago, por lo que debemos calcular la tasa de inflación acumulada teniendo en cuenta el número de años desde que aconteció el pago hasta el momento de cálculo de la

<sup>61</sup> El ejemplo se ha simplificado de forma que se asume que el total de pagos de un año se realiza a final del año y que todos los pagos incrementales están afectados por la inflación. Un modelo más realista supondría establecer si existe un porcentaje de los pagos futuros que no está expuestos a la inflación, y cómo dichos pagos se desarrollan a lo largo de cada año.

provisión. Por tanto, estableciendo como año base el momento actual de cálculo, el final del año de ocurrencia  $i = 9$ , calcularemos las tasas de inflación aplicables.

Años respecto a la base de cálculo	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi$	3,60%	4,00%	3,90%	3,40%	2,80%	2,40%	1,40%	1,20%	2,40%
$1+\pi$	1,036	1,040	1,039	1,034	1,028	1,024	1,014	1,012	1,024
Acumulado	1,0360	1,0774	1,1195	1,1575	1,1899	1,2185	1,2355	1,2504	1,2804

Así, podemos establecer el siguiente triángulo de tasas de inflación acumuladas respecto a cada año de ocurrencia y desarrollo.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1,2804	1,2504	1,2355	1,2185	1,1899	1,1575	1,1195	1,0774	1,0360
1	1,2504	1,2355	1,2185	1,1899	1,1575	1,1195	1,0774	1,0360	
2	1,2355	1,2185	1,1899	1,1575	1,1195	1,0774	1,0360		
3	1,2185	1,1899	1,1575	1,1195	1,0774	1,0360			
4	1,1899	1,1575	1,1195	1,0774	1,0360				
5	1,1575	1,1195	1,0774	1,0360					
6	1,1195	1,0774	1,0360						
7	1,0774	1,0360							
8	1,0360								

Con base en el anterior triángulo simplemente debemos multiplicar para cada una de las celdas el importe de siniestralidad histórica (triángulo de siniestros pagados incrementales) por la tasa de inflación acumulada correspondiente. Así, obtenemos las cifras de siniestralidad incrementales en unidades monetarias del año de valoración.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.634.288	1.219.329	848.745	815.630	572.363	358.082	570.532	365.922	324.116	615.919
1	4.631.219	1.712.142	923.416	821.692	609.273	389.366	542.674	357.352	343.640	
2	4.771.869	1.797.191	1.386.272	987.527	484.347	445.308	588.121	378.745		
3	5.066.011	2.543.034	1.652.790	1.160.760	720.720	487.307	714.166			
4	5.349.079	2.967.221	1.575.424	1.134.732	729.377	476.564				
5	6.656.913	4.451.248	2.108.028	2.038.527	995.812					
6	7.040.485	4.156.454	2.523.299	2.093.382						
7	7.003.600	4.580.582	2.637.300							
8	6.373.464	4.532.915								
9	5.634.929									

Posteriormente, se acumulan los pagos incrementales anteriores para obtener un triángulo de pagos acumulados en moneda del último año.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.634.288	5.853.617	6.702.362	7.517.992	8.090.355	8.448.437	9.018.969	9.384.891	9.709.007	10.324.926
1	4.631.219	6.343.361	7.266.777	8.088.469	8.697.742	9.087.108	9.629.783	9.987.134	10.330.774	
2	4.771.869	6.569.061	7.955.333	8.942.860	9.427.207	9.872.515	10.460.635	10.839.380		
3	5.066.011	7.609.045	9.261.835	10.422.595	11.143.315	11.630.623	12.344.789			
4	5.349.079	8.316.301	9.891.725	11.026.457	11.755.834	12.232.398				
5	6.656.913	11.108.160	13.216.188	15.254.715	16.250.527					
6	7.040.485	11.196.940	13.720.239	15.813.621						
7	7.003.600	11.584.182	14.221.482							
8	6.373.464	10.906.379								
9	5.634.929									

En el triángulo anterior todas las cantidades están expresadas en las mismas unidades monetarias que los pagos efectuados en el año de ocurrencia  $i=9$ . Por lo tanto, estamos en disposición de calcular los factores LDF relativas a estas cantidades actualizadas. En la siguiente tabla se muestran los factores seleccionados obtenidos como media simple de las cantidades actualizadas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Factor <sub>j</sub>	1,5426	1,1991	1,1331	1,0671	1,0439	1,0619	1,0379	1,0345	1,0634
Factor acumulado	2,8308	1,8350	1,5303	1,3506	1,2656	1,2124	1,1417	1,1001	1,0634

Por otro lado, debemos realizar una previsión de las tasas de inflación futuras, de forma que los pagos realmente satisfechos en los próximos años incorporen la evolución prevista en los costes de la compañía. En los modelos DFA es común emplear un modelo estocástico para la inflación, de forma que en cada uno de los escenarios evaluados la inflación futura sea una posible realización de la senda de

tasas de inflación. Estos modelos son calibrados a partir de la inflación pasada para esa línea de negocio. Otra alternativa más sencilla consiste en suponer que las tasas de inflación evolucionarán de acuerdo a unas expectativas deterministas, es decir, a partir de una predicción o valores esperados para las tasas de inflación. La no consideración de la inflación a través de un modelo estocástico es razonable en la medida en la que se espera que ésta sea relativamente estable. Si se espera que la inflación o su volatilidad aumenten, la variabilidad de la provisión para prestaciones y por lo tanto el riesgo de reserva puede ser mayor que la esperada en base a las técnicas tradicionales<sup>62</sup>. A continuación se muestra la hipotética senda prevista de inflación para los próximos años desde la fecha actual.

Años futuros	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi$	2,90%	2,40%	3,20%	3,30%	3,90%	3,50%	3,70%	3,10%	4,20%
$1+\pi$	1,029	1,024	1,032	1,033	1,039	1,035	1,037	1,031	1,042
Inflación acumulada	1,029	1,054	1,087	1,123	1,167	1,208	1,253	1,291	1,346

Así, podemos establecer el siguiente triángulo de tasas de inflación acumuladas previstas respecto a cada año de ocurrencia y desarrollo.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									1,029
2								1,029	1,054
3							1,029	1,054	1,087
4						1,029	1,054	1,087	1,123
5					1,029	1,054	1,087	1,123	1,167
6				1,029	1,054	1,087	1,123	1,167	1,208
7			1,029	1,054	1,087	1,123	1,167	1,208	1,253
8		1,029	1,054	1,087	1,123	1,167	1,208	1,253	1,291
9	1,029	1,054	1,087	1,123	1,167	1,208	1,253	1,291	1,346

Una vez obtenidos la inflación acumulada (triángulo anterior) simplemente debemos multiplicar para cada una de las celdas el importe de siniestralidad proyectada (triángulo de siniestros pagados incrementales) por la tasa de inflación acumulada

<sup>62</sup> D'Arcy *et al.* (2009) examinan la valoración económica de las provisiones para prestaciones y su variabilidad. Los factores que afectan fundamentalmente a la variabilidad son los tipos de interés nominales, la inflación, la relación entre el coste de los siniestros y la inflación general y la correlación entre tipos e inflación, donde los tres primeros factores son tratados a través de modelos estocásticos.

correspondiente. Así, obtenemos las cifras de siniestralidad incrementales en unidades monetarias de los próximos años.

A partir del triángulo de pagos acumulados en moneda del último año y de los factores calculados obtenemos los siguientes pagos previstos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.634.288	5.853.617	6.702.362	7.517.992	8.090.355	8.448.437	9.018.969	9.384.891	9.709.007	10.324.926
1	4.631.219	6.343.361	7.266.777	8.088.469	8.697.742	9.087.108	9.629.783	9.987.134	10.330.774	10.986.137
2	4.771.869	6.569.061	7.955.333	8.942.860	9.427.207	9.872.515	10.460.635	10.839.380	11.213.015	11.924.345
3	5.066.011	7.609.045	9.261.835	10.422.595	11.143.315	11.630.623	12.344.789	12.812.136	13.253.771	14.094.563
4	5.349.079	8.316.301	9.891.725	11.026.457	11.755.834	12.232.398	12.989.269	13.481.015	13.945.707	14.830.394
5	6.656.913	11.108.160	13.216.188	15.254.715	16.250.527	16.964.091	18.013.733	18.695.694	19.340.137	20.567.035
6	7.040.485	11.196.940	13.720.239	15.813.621	16.875.182	17.616.175	18.706.165	19.414.340	20.083.554	21.357.613
7	7.003.600	11.584.182	14.221.482	16.114.262	17.196.005	17.951.086	19.061.798	19.783.436	20.465.374	21.763.654
8	6.373.464	10.906.379	13.077.976	14.818.563	15.813.327	16.507.694	17.529.097	18.192.711	18.819.815	20.013.705
9	5.634.929	8.692.617	10.423.427	11.810.712	12.603.560	13.156.985	13.971.065	14.499.979	14.999.795	15.951.351

Por lo que el triángulo de siniestros pagados incrementales proyectado será:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.634.288	1.219.329	848.745	815.630	572.363	358.082	570.532	365.922	324.116	615.919
1	4.631.219	1.712.142	923.416	821.692	609.273	389.366	542.674	357.352	343.640	655.363
2	4.771.869	1.797.191	1.386.272	987.527	484.347	445.308	588.121	378.745	373.635	711.330
3	5.066.011	2.543.034	1.652.790	1.160.760	720.720	487.307	714.166	467.347	441.636	840.791
4	5.349.079	2.967.221	1.575.424	1.134.732	729.377	476.564	756.872	491.746	464.692	884.686
5	6.656.913	4.451.248	2.108.028	2.038.527	995.812	713.565	1.049.642	681.961	644.443	1.226.898
6	7.040.485	4.156.454	2.523.299	2.093.382	1.061.561	740.993	1.089.989	708.175	669.214	1.274.058
7	7.003.600	4.580.582	2.637.300	1.892.780	1.081.743	755.081	1.110.712	721.639	681.937	1.298.280
8	6.373.464	4.532.915	2.171.597	1.740.587	994.764	694.367	1.021.403	663.614	627.105	1.193.890
9	5.634.929	3.057.688	1.730.809	1.387.285	792.848	553.425	814.080	528.915	499.816	951.556

Teniendo en consideración el triángulo proyectado de inflación acumulada, podemos calcular el triángulo de siniestros pagados incrementales actualizados a las tasas de inflación previstas:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.634.288	1.219.329	848.745	815.630	572.363	358.082	570.532	365.922	324.116	615.919
1	4.631.219	1.712.142	923.416	821.692	609.273	389.366	542.674	357.352	343.640	674.368
2	4.771.869	1.797.191	1.386.272	987.527	484.347	445.308	588.121	378.745	384.470	749.526
3	5.066.011	2.543.034	1.652.790	1.160.760	720.720	487.307	714.166	480.900	465.350	914.289
4	5.349.079	2.967.221	1.575.424	1.134.732	729.377	476.564	778.821	518.151	505.313	993.767
5	6.656.913	4.451.248	2.108.028	2.038.527	995.812	734.258	1.106.003	741.574	723.902	1.431.922
6	7.040.485	4.156.454	2.523.299	2.093.382	1.092.347	780.782	1.185.270	795.493	781.045	1.539.007
7	7.003.600	4.580.582	2.637.300	1.947.671	1.139.829	821.086	1.247.661	842.230	823.750	1.626.292
8	6.373.464	4.532.915	2.234.574	1.834.050	1.081.720	779.982	1.192.087	801.617	785.543	1.541.888
9	5.634.929	3.146.361	1.823.747	1.508.554	890.605	645.907	983.373	662.545	645.504	1.280.532

Por lo que simplemente debemos acumular dichos valores para obtener el valor de las provisiones. Sin embargo, las cantidades deben ser actualizadas teniendo en cuenta el momento temporal en el cual tendrán lugar. Gracias a la información mostrada en el triángulo RT podríamos establecer el valor de la provisión necesaria descontada.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.634.288	5.853.617	6.702.362	7.517.992	8.090.355	8.448.437	9.018.969	9.384.891	9.709.007	10.324.926
1	4.631.219	6.343.361	7.266.777	8.088.469	8.697.742	9.087.108	9.629.783	9.987.134	10.330.774	11.005.142
2	4.771.869	6.569.061	7.955.333	8.942.860	9.427.207	9.872.515	10.460.635	10.839.380	11.223.850	11.973.376
3	5.066.011	7.609.045	9.261.835	10.422.595	11.143.315	11.630.623	12.344.789	12.825.689	13.291.038	14.205.327
4	5.349.079	8.316.301	9.891.725	11.026.457	11.755.834	12.232.398	13.011.219	13.529.369	14.034.682	15.028.449
5	6.656.913	11.108.160	13.216.188	15.254.715	16.250.527	16.984.785	18.090.788	18.832.363	19.556.264	20.988.186
6	7.040.485	11.196.940	13.720.239	15.813.621	16.905.967	17.686.749	18.872.019	19.667.511	20.448.557	21.987.564
7	7.003.600	11.584.182	14.221.482	16.169.153	17.308.981	18.130.067	19.377.728	20.219.958	21.043.708	22.670.000
8	6.373.464	10.906.379	13.140.952	14.975.002	16.056.722	16.836.704	18.028.791	18.830.408	19.615.951	21.157.839
9	5.634.929	8.781.290	10.605.037	12.113.591	13.004.196	13.650.103	14.633.476	15.296.021	15.941.525	17.222.057

Año de ocurrencia	Pagado (u.m. equivalentes)	Último pago esperado	Provisión
0	10.324.926	10.324.926	0
1	10.330.774	11.005.142	674.368
2	10.839.380	11.973.376	1.133.996
3	12.344.789	14.205.327	1.860.539
4	12.232.398	15.028.449	2.796.051
5	16.250.527	20.988.186	4.737.659
6	15.813.621	21.987.564	6.173.943
7	14.221.482	22.670.000	8.448.518
8	10.906.379	21.157.839	10.251.460
9	5.634.929	17.222.057	11.587.128
TOTAL			47.663.661,38

## **Gastos asociados a siniestros**

Una parte muy importante del proceso de evaluación de la provisión para prestaciones son los gastos asociados a siniestros (*loss adjustment expenses* o LAE). Estos gastos pueden dividirse en dos componentes denominados los gastos directos (*allocated loss adjustment expenses* o ALAE) y los gastos indirectos (*unallocated loss adjustment expenses* o ULAE).

Una alternativa para estimar los pasivos asociados a los ALAE es combinarlos con los siniestros y estimar así el pasivo global. Sin embargo, si los pagos por siniestros y los gastos asociados tienen patrones de desarrollo diferentes, este procedimiento no es el adecuado. En este caso, deben calcularse la provisión como suma de las cantidades obtenidas calculadas de forma independiente<sup>63</sup>. La separación de la siniestralidad de los gastos tiene como principal ventaja que permite una supervisión y control de las desviaciones de la experiencia actual y de la proyectada para cada componente de forma individual. Como desventaja podemos citar el mayor esfuerzo que requiere la estimación. Por lo tanto, para estimar las provisiones asociadas a los gastos que incurre la empresa se pueden emplear básicamente dos métodos: tratamiento agrupado y tratamiento individualizado de cada componente.

En caso de optar por un tratamiento individual, la provisión para afrontar los gastos asociados a los siniestros se calcula como la diferencia entre el valor último estimado de los gastos y su valor realmente satisfecho. Para ello, una opción consiste simplemente en calcular los factores de desarrollo de los gastos directos asociados a siniestros y proyectar los datos históricos hasta su desarrollo último. La principal desventaja de este método es que no relaciona el valor último de los gastos con el nivel último de siniestralidad, lo que produce grandes divergencias en la ratio gastos/siniestros.

Un método alternativo para el cálculo de las provisiones asociadas a los gastos directos consiste en comparar los gastos pagados con los pagos efectuados en concepto de siniestros para las mismas reclamaciones. Este método trabaja con la hipótesis de que el porcentaje de gastos directos y pagos por siniestros es más o menos estable. Una vez calculada esta ratio se calculan los factores de desarrollo. El enfoque determinista calcula las medias de dichos porcentajes para establecer unos valores para los patrones de desarrollo más probables en el futuro. Posteriormente, multiplicando la ratio más probable por la última siniestralidad a pagar, obtenemos los últimos gastos estimados. La principal desventaja de este método reside en que la incorrecta estimación de los últimos siniestros afectará a la provisión necesaria para los gastos. De esta forma una infraestimación (sobreestimación) de los últimos pagos a efectuar por siniestros conducirá a una infraestimación (sobreestimación) de los últimos pagos a efectuar en concepto de gasto y, por tanto, a una doble infraestimación (sobreestimación) de la provisión necesaria.

---

<sup>63</sup> Además, los gastos asociados pueden ser subdivididos en distintas categorías para obtener una mejor estimación de cada subcomponente.

Se debe dotar una provisión que recoja las provisiones para los gastos indirectos (ULAE). Este tipo de gastos tiende a no ser tratado en el mismo nivel de detalle que los ALAE y suelen ser distribuidos a cada línea de negocio por un procedimiento de asignación que refleje el nivel de actividad de reclamaciones que origina tales gastos, como: número de reclamaciones incurridas, cerradas o abiertas durante el año, el número de pagos efectuados, etc. Una vez los gastos han sido asignados a cada línea de negocio se puede proceder a la estimación de las provisiones. El procedimiento más común consiste en estimar la cantidad de gastos indirectos necesarios para cada 100 u.m. de siniestros pagados y calcular la media para el total de años de ocurrencia. En la siguiente tabla se ha supuesto que por media, esa línea de negocio o agrupamiento de pólizas supone 8€ de gastos indirectos por cada 100€ de siniestralidad pagada.

Año de accidente	ULAE pagados	Siniestralidad pagada	% ULAE/siniestralidad
0	$G_1$	$X_1$	$G_1/X_1$
...	...	...	...
$r$	$G_r$	$X_r$	$G_r/X_r$
Media			8%

#### B. Método Bornhuetter–Ferguson o BF (Bornhuetter–Ferguson Method)

El método de estimación Chain Ladder de las provisiones para prestaciones está basado en datos históricos, lo que supone que el comportamiento pasado medio es extrapolable para predecir el comportamiento futuro. En los casos en los que la experiencia en la línea de negocios a evaluar sea reducida o que sea una línea con una siniestralidad muy volátil, el empleo del método de desarrollo de los siniestros pagados a través de la proyección de los datos históricos puede ser inapropiado. En este caso puede ser recomendable emplear el denominado método Bornhuetter–Ferguson (BF) expuesto en Bornhuetter y Ferguson (1972)<sup>64</sup>.

Dados unos datos de siniestros incurridos y factores de desarrollo de siniestralidad esperados para cada año de accidente, debemos calcular el valor esperado de siniestralidad multiplicando la prima ganada por la ratio de siniestralidad esperada (*Expected Loss Ratio* o ELR). La ratio de siniestralidad puede ser estimada basándose en las hipótesis de tarificación, resultados históricos, resultados de mercado o una combinación de los anteriores. En base a esta siniestralidad final esperada y al factor de desarrollo último para ese año de accidente calculamos el desarrollo restante. De esta forma obtenemos la siniestralidad esperada no declarada hasta la fecha, que sumada a la declarada nos proporciona la cifra de siniestralidad total final. Restándole a dicha cantidad el importe realmente satisfecho

<sup>64</sup> Mack (2000) realiza un resumen del trabajo original y de los posteriores trabajos sobre dicha técnica.

obtenemos el importe a dotar para cada año de ocurrencia, y por suma de los anteriores la provisión total estimada. El anterior proceso se resume en la siguiente tabla.

Año	Primas ganadas	Ratio de siniestralidad esperada	Siniestralidad final esperada	Desarrollo último	Desarrollo restante	No declarados esperados	Declarados hasta la fecha	Último total	Pagados hasta la fecha	Provisión
	(1)	(2)	(3)=(1)×(2)	(4)	(5)=1–1/(4)	(6)=(5)×(3)	(7)	(8)=(6)+(7)	(9)	(10)=(8)–(9)
t-6										
t-5										
t-4										
t-3										
t-2										
t-1										
t										

La ventaja del método de Bornhuetter-Ferguson es que la estimación de las provisiones para prestaciones está basada en una media ponderada del desarrollo de los siniestros incurridos y de la estimación de la siniestralidad esperada. De esta forma, a medida que se tienen más datos de la siniestralidad para un mismo año de ocurrencia, la estimación de la siniestralidad incurrida esperada se reduce y la experiencia o historia de siniestralidad declarada aumenta.

### 6.3. Métodos estocásticos

Los métodos deterministas descritos anteriormente producen estimaciones puntuales de la provisión necesaria para afrontar el pago futuro de los siniestros asociados a las pólizas suscritas por la compañía. Sin embargo, existen métodos estocásticos que en vez de producir un valor aislado proporcionan la distribución estimada. Los métodos que analizaremos son el método de simulación basado en la función Beta y el método bootstrap.

#### A. Método de simulación basado en la función Beta

El método Chain Ladder se basa en los datos agregados de siniestros pagados, mediante los cuales se calculan distintas medias que nos ayudan en la elección de los factores de desarrollo. Además, se establece la relación entre estos factores seleccionados y los porcentajes de siniestralidad que se asume que serán pagados en cada año de desarrollo para un mismo año de ocurrencia. Por contra, el método de simulación aquí detallado es una mejora sobre el anterior, permitiendo para cada año de ocurrencia que los porcentajes pagados sean distintos a los otros años y que mismo varíen los años de desarrollo hasta que el último pago es efectuado.

El método de simulación basado en la función Beta es empleado en el Dynamo 3 y en Kaufmann *et al.* (2001). Dicho método emplea técnicas de Monte Carlo para determinar para cada año de ocurrencia los porcentajes pagados a lo largo de los años de desarrollo, que dejan de ser un número determinado a priori para pasar a ser estocástico. Este método se basa en el ajuste de los porcentajes históricos pagados a la distribución Beta, que se emplea para estudiar las variaciones de un porcentaje o proporción que representa algún fenómeno. La distribución ajustada será simulada, proporcionando los nuevos porcentajes de pago estocásticos. De esta forma para un año de ocurrencia se llegará a su último pago final cuando el valor acumulado de la distribución simulada llegue a 100%.

Por tanto, a partir de un triángulo de siniestros pagados se calculan los factores de desarrollo para cada año  $j$  y se selecciona un factor para la proyección de la siniestralidad. En este ejemplo no consideramos el índice de cola y el triángulo empleado será idéntico al del Chain Ladder. La siguiente tabla muestra el triángulo de los factores de desarrollo seleccionados.

Año de accidente	Año de desarrollo								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1,2452	1,1176	1,1063	1,0521	1,0299	1,0308	1,0050	1,0012	1,0009
1	1,3480	1,1170	1,0978	1,0518	1,0310	1,0235	1,0018	1,0015	1,0009
2	1,3556	1,1844	1,1106	1,0307	1,0348	1,0247	1,0015	1,0014	1,0009
3	1,4852	1,1928	1,1136	1,0478	1,0316	1,0275	1,0026	1,0014	1,0009
4	1,5403	1,1661	1,1040	1,0454	1,0284	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009
5	1,6592	1,1678	1,1472	1,0445	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009
6	1,5827	1,2056	1,1452	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009
7	1,6482	1,2070	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009
8	1,7037	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009

En base a los anteriores factores podemos calcular los factores de desarrollo acumulados para cada  $j$ . Primero los calculamos en términos esperados:

$$\text{Para } i = 0, j = 0 \quad C_{0,0} = 1/(1,2452 \cdot 1,1176 \cdot \dots \cdot 1,0009) = 0,5775$$

$$\text{Para } i = 0, j = 1 \quad C_{0,1} = 1/(1,1176 \cdot 1,1063 \cdot \dots \cdot 1,0009) = 0,7190$$

Posteriormente, los calculamos en términos incrementales como:

$$I_{0,0} = C_{0,0} = 0,5775$$

$$I_{0,1} = C_{0,1} - C_{0,0} = 0,7190 - 0,5775 = 0,1416$$

Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,5775	0,1416	0,0845	0,0854	0,0463	0,0279	0,0297	0,0049	0,0012
1	0,5428	0,1889	0,0856	0,0799	0,0465	0,0292	0,0228	0,0018	
2	0,5112	0,1818	0,1278	0,0908	0,0280	0,0327	0,0240		
3	0,4542	0,2204	0,1300	0,0914	0,0428	0,0297			
4	0,4547	0,2457	0,1163	0,0849	0,0410				
5	0,4050	0,2670	0,1127	0,1155					
6	0,4118	0,2399	0,1340						
7	0,4027	0,2610							
8	0,3994								

Debemos calcular la varianza poblacional a estos  $I_{i,j}$ , los datos obtenidos son los mostrados a continuación.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Varianza	0,003957	0,001687	0,000360	0,000132	0,000046	0,000003	0,000009	0,000002	0

Finalmente, podemos calcular los pagos esperados incrementales:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Factor seleccionado	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009	1
Pago esperado incremental %	44,22%	23,82%	12,06%	9,87%	4,05%	2,92%	2,57%	0,26%	0,14%	0,09%

La distribución beta tiene dos parámetros: el parámetro de forma 1 (Alfa) y el parámetro de forma 2 (Beta). Una vez seleccionados los factores de desarrollo, y por tanto establecidos los porcentajes medios de pagos esperados incrementales ( $PEI\%_j$ ), para cada año de desarrollo podemos calcular el parámetro Alfa<sub>j</sub> de la distribución Beta como

$$Alfa_j = PEI\%_j \cdot \left( PEI\%_j \cdot \frac{(1 - PEI\%_j)}{Var(I_{i,j})} - 1 \right)^{65}$$

<sup>65</sup> Con el valor mínimo de 1 cuando  $Var(I_{i,j}) = 0$  o cuando el  $PEI\%_j$  es igual a cero.

A modo de ejemplo:

$$\text{Alfa}_0 = 44,22\% \cdot \left( 44,22\% \cdot \frac{(1 - 44,22\%)}{0,003957} - 1 \right) = 27,1228$$

$$\text{Alfa}_1 = 23,83\% \cdot \left( 23,83\% \cdot \frac{(1 - 23,83\%)}{0,001687} - 1 \right) = 25,3934$$

Por lo que obtenemos los siguientes valores:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Alfa <sub>j</sub>	27,1228	25,3934	35,3839	66,4604	34,1368	276,9263	72,1223	2,7668	1 <sup>66</sup>

El parámetro Beta<sub>j</sub> de la distribución se calcula mediante como:

$$\text{Beta}_j = (1 - \text{PEI}\%_j) / \text{PEI}\%_j \quad \text{cuando el parámetro Alfa}_j \text{ es igual a 1}$$

$$\text{Beta}_j = (1 - \text{PEI}\%_j) \cdot \left( (\text{PEI}\%_j \cdot (1 - \text{PEI}\%_j) / \text{Var}(I_{i,j})) - 1 \right) \quad \text{resto de los casos}$$

A modo de ejemplo:

$$\text{Beta}_0 = (1 - 44,22\%) \cdot \left( \left( 44,22\% \cdot \frac{(1 - 44,22\%)}{0,003957} \right) - 1 \right) = 34,2146$$

Por lo que obtenemos los siguientes valores:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Beta <sub>j</sub>	34,2146	81,1887	258,0776	606,9979	807,1572	9223,5649	2735,3059	1066,6106	5000 <sup>67</sup>

Mediante la simulación para cada año de desarrollo *j* de la distribución Beta con los parámetros correspondientes se obtienen los nuevos porcentajes de pago incrementales. Además, debe establecerse un tope máximo a los valores obtenidos por la distribución, de forma que no se supere el valor del 100%. De esta forma se obtiene para una hipotética simulación los valores siguientes:

<sup>66</sup> Se establece su valor como 1 dado que la varianza es cero.

<sup>67</sup> Dada que la varianza es cero, debe optarse por darle un valor suficientemente grande para que el desarrollo restante sea reducido.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,5775	0,1416	0,0845	0,0854	0,0463	0,0279	0,0297	0,0049	0,0012
1	0,5428	0,1889	0,0856	0,0799	0,0465	0,0292	0,0228	0,0018	0,0032
2	0,5112	0,1818	0,1278	0,0908	0,0280	0,0327	0,0240	0,0007	0,0009
3	0,4542	0,2204	0,1300	0,0914	0,0428	0,0297	0,0274	0,0006	0,0036
4	0,4547	0,2457	0,1163	0,0849	0,0410	0,0269	0,0301	0,0013	0,0018
5	0,4050	0,2670	0,1127	0,1155	0,0402	0,0270	0,0237	0,0016	0,0009
6	0,4118	0,2399	0,1340	0,1077	0,0478	0,0294	0,0259	0,0025	0,0022
7	0,4027	0,2610	0,0990	0,0908	0,0582	0,0304	0,0313	0,0010	0,0030
8	0,3994	0,2939	0,1127	0,0777	0,0379	0,0283	0,0259	0,0010	0,0007

Podemos ordenar los datos anteriores mostrando los años de ocurrencia en columnas y los años de desarrollo en filas. De esta forma es fácil observar que para un mismo año de ocurrencia, los pagos se extienden de forma estocástica tanto en porcentaje como en número de años. En la simulación concreta anterior los porcentajes obtenidos son los mostrados a continuación:

Año de desarrollo	Año de ocurrencia									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	57,75%	54,24%	51,12%	45,42%	45,35%	40,50%	41,13%	40,27%	39,94%	57,75%
1	71,91%	73,12%	69,30%	67,46%	69,85%	67,20%	65,09%	66,37%	69,33%	71,91%
2	80,36%	81,67%	82,08%	80,46%	81,45%	78,47%	78,48%	76,27%	80,60%	80,36%
3	88,90%	89,66%	91,16%	89,60%	89,92%	90,02%	89,23%	85,35%	88,37%	88,90%
4	93,53%	94,30%	93,96%	93,88%	94,01%	94,04%	94,01%	91,17%	92,16%	93,53%
5	96,32%	97,22%	97,23%	96,84%	96,69%	96,74%	96,94%	94,21%	94,99%	96,32%
6	99,29%	99,50%	99,63%	99,58%	99,69%	99,11%	99,53%	97,34%	97,58%	99,29%
7	99,78%	99,68%	99,70%	99,64%	99,82%	99,27%	99,78%	97,44%	97,68%	99,78%
8	99,90%	100,00%	99,79%	100,00%	100,00%	99,36%	100,00%	97,74%	97,75%	99,90%
9	99,90%	100,00%	99,90%	100,00%	100,00%	99,68%	100,00%	98,87%	98,88%	99,90%
10	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	99,87%	99,88%	100,00%
11	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Una vez proyectada la siniestralidad última, los anteriores porcentajes se emplean para estimar los pagos a realizar en cada periodo y proceder a su descuento, proporcionando por tanto el valor de las provisiones descontadas. Mediante la simulación de la distribución Beta obtendremos la distribución estimada de las provisiones necesarias.

## *B. Bootstrap-Chain Ladder*

El *bootstrap* es un método recientemente empleado para la estimación de las provisiones (véase England y Verrall, 1999, 2002 y 2006). De esta forma es común emplear el Chain-Ladder para obtener las cantidades y se hace *bootstrap* para los residuos de este modelo, medidos a través de la desviación de las cantidades estimadas del modelo y las reales, para obtener una estimación de las cantidades a dotar. Las principales fases de un análisis Bootstrap con Chain Ladder son las siguientes (England y Verrall, 1999):

- Análisis Chain Ladder: cálculo de los factores de desarrollo.
- Análisis retrospectivo: cálculo de las cifras estimadas acumuladas.
- Análisis retrospectivo: cálculo de los incrementos anuales estimados.
- Análisis retrospectivo: cálculo de los residuos de cada celda del triángulo.
- Análisis *bootstrap*: remuestreo con repetición de los residuos obtenidos.
- Cálculo de un nuevo triángulo a partir de la información esperada y los residuos.
- Cálculo de las reservas para una realización particular del *bootstrap*.
- Repetición de los últimos tres pasos el número deseado de veces: obtención de la distribución de las reservas.

### ***Paso 1: Análisis Chain Ladder: cálculo de los factores de desarrollo***

El método Chain Ladder consiste en obtener los factores de desarrollo y a partir de ellos estimar las provisiones necesarias. Partiendo de un triángulo de pagos acumulados de siniestralidad se obtiene, aplicando la media simple sobre las cantidades de siniestralidad, los factores de desarrollo. En el caso de aplicar el hipotético triángulo empleado para el chain ladder obteníamos los factores de desarrollo resumidos a continuación.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.514.018	4.375.824	4.890.321	5.409.934	5.691.972	5.861.988	6.042.443	6.072.443	6.079.542	6.085.231
1	3.595.978	4.847.224	5.414.284	5.943.603	6.251.609	6.445.334	6.596.508	6.608.595	6.618.754	
2	3.749.652	5.082.924	6.020.437	6.686.553	6.891.922	7.131.451	7.307.384	7.318.084		
3	4.036.511	5.994.981	7.150.553	7.963.172	8.343.732	8.607.640	8.844.130			
4	4.364.349	6.722.577	7.838.897	8.653.802	9.047.088	9.304.152				
5	5.583.499	9.264.039	10.818.294	12.410.411	12.962.179					
6	6.105.991	9.663.705	11.650.471	13.341.715						
7	6.310.890	10.401.549	12.554.563							
8	5.972.807	10.176.096								
9	5.470.804									

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Factor <sub>j</sub>	1,5388	1,1772	1,1232	1,0451	1,0310	1,0265	1,0026	1,0014	1,0009

### **Paso 2: Análisis retrospectivo: cálculo de las cifras estimadas acumuladas**

En este paso se trata de comparar la proyección retrospectiva efectuada en base a los factores de desarrollo calculados en la fase 1 con la información histórica real. Por lo tanto, fijada la última diagonal del triángulo de pagos acumulados históricos obtenemos el valor histórico esperado para los anteriores años de desarrollo simplemente dividiendo por los factores de desarrollo empleados. Es decir, para cada año de ocurrencia  $i$  las cantidades históricas acumuladas estimadas se obtienen por medio de la siguiente expresión:

$$\hat{x}_{i,j} = \frac{\hat{x}_{i,j+1}}{\text{Factor}_j} \quad \text{para } r < j + 1$$

$$\hat{x}_{i,j} = \frac{x_{i,j+1}}{\text{Factor}_j} \quad \text{para } r = j + 1$$

Por lo tanto, para el primer año de accidente ( $i = 0$ ) empezamos calculando la cantidad estimada a partir del último dato real histórico, es decir  $\hat{x}_{0,8} = \frac{6.085.231}{1,0009}$ . Los anteriores años de desarrollo se calculan de forma sucesiva dividiendo la cantidad estimada obtenida en el período que le sucede por el factor correspondiente a ese año de desarrollo, es decir:  $\hat{x}_{0,7} = \frac{6.079.542}{1,0014}$  y  $\hat{x}_{0,6} = \frac{6.079.542}{1,0026}$ . Y así sucesivamente hasta completar el triángulo que se muestra:

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2.690.642	4.140.416	4.874.045	5.474.512	5.721.213	5.898.764	6.055.254	6.071.279	6.079.542	<b>6.085.231</b>
1	2.929.283	4.507.642	5.306.338	5.960.062	6.228.644	6.421.943	6.592.312	6.609.759	<b>6.618.754</b>	
2	3.243.195	4.990.697	5.874.984	6.598.764	6.896.128	7.110.141	7.298.768	<b>7.318.084</b>		
3	3.929.874	6.047.372	7.118.889	7.995.915	8.356.239	8.615.565	<b>8.844.130</b>			
4	4.243.963	6.530.700	7.687.856	8.634.977	9.024.100	<b>9.304.152</b>				
5	6.096.011	9.380.671	11.042.805	12.403.245	<b>12.962.179</b>					
6	6.557.256	10.090.443	11.878.340	<b>13.341.715</b>						
7	6.930.554	10.664.883	<b>12.554.563</b>							
8	6.612.917	<b>10.176.096</b>								
9	<b>5.470.804</b>									

### **Paso 3: Análisis retrospectivo: cálculo de los incrementos anuales estimados**

Se calculan los incrementos anuales en los valores estimados en el paso 2 simplemente como diferencia entre las cifras estimadas acumuladas para cada año de ocurrencia  $i$ . El incremento o variación en la cifra estimada en base a los factores de desarrollo seleccionados se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\Delta \hat{x}_{i,j} = \hat{x}_{i,j} \quad \text{para } j = 0$$

$$\Delta \hat{x}_{i,j} = \hat{x}_{i,j} - \hat{x}_{i,j-1} \quad \text{para } j > 0 \text{ hasta completar el triángulo, es decir, } j = r - i - 1.$$

Por lo tanto, para el primer año de accidente ( $i=0$ ) empezamos calculando el incremento en la cantidad estimada  $\Delta \hat{x}_{0,0}$  como el valor de la cantidad estimada acumulada  $\hat{x}_{0,0}$ , es decir  $\Delta \hat{x}_{0,0} = \hat{x}_{0,0} = 2.690.642$ . Las variaciones en los siguientes años de desarrollo para el mismo año de ocurrencia se calculan de forma sucesiva restando la cantidad estimada obtenida en el período menos la cantidad obtenida en el año de desarrollo anterior, es decir:

$$\Delta \hat{x}_{0,1} = \hat{x}_{0,1} - \hat{x}_{0,0} = 1.449.774$$

$$\Delta \hat{x}_{0,2} = \hat{x}_{0,2} - \hat{x}_{0,1} = 733.629$$

Y así sucesivamente hasta completar el triángulo que se muestra:

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2.690.642	1.449.774	733.629	600.467	246.701	177.551	156.490	16.025	8.263	5.689
1	2.929.283	1.578.359	798.696	653.725	268.582	193.299	170.370	17.446	8.995	
2	3.243.195	1.747.502	884.287	723.780	297.364	214.013	188.627	19.316		
3	3.929.874	2.117.499	1.071.517	877.025	360.324	259.326	228.565			
4	4.243.963	2.286.737	1.157.156	947.120	389.123	280.052				
5	6.096.011	3.284.659	1.662.134	1.360.440	558.934					
6	6.557.256	3.533.187	1.787.897	1.463.375						
7	6.930.554	3.734.328	1.889.680							
8	6.612.917	3.563.179								
9	5.470.804									

#### **Paso 4: Análisis retrospectivo: cálculo de los residuos de cada celda del triángulo**

En esta paso se calculan los residuos en cada celda del triángulo como la diferencia entre el incremento en el valor real y el incremento en el valor estimado divididos por la raíz cuadrada del incremento del valor estimado. Es decir<sup>68</sup>:

$$residuos_{i,j} = \frac{\Delta x_{i,j} - \Delta \hat{x}_{i,j}}{\sqrt{\Delta \hat{x}_{i,j}}}$$

Por lo tanto debemos calcular el triángulo de incrementos en el valor real histórico, que está compuesta por los elementos  $\Delta x_{i,j}$ .

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.514.018	861.806	514.497	519.613	282.038	170.016	180.455	30.000	7.099	5.689
1	3.595.978	1.251.246	567.060	529.319	308.006	193.725	151.174	12.087	10.159	
2	3.749.652	1.333.272	937.513	666.116	205.369	239.529	175.933	10.700		
3	4.036.511	1.958.470	1.155.572	812.619	380.560	263.908	236.490			
4	4.364.349	2.358.228	1.116.320	814.905	393.286	257.064				
5	5.583.499	3.680.540	1.554.255	1.592.117	551.768					
6	6.105.991	3.557.714	1.986.766	1.691.244						
7	6.310.890	4.090.659	2.153.014							
8	5.972.807	4.203.289								
9	5.470.804									

<sup>68</sup> Los residuos empleados son los calculados en el trabajo original de England y Verrall (1999). Siendo estrictos, debería utilizarse la definición de residuo de Pearson dada por la expresión  $\frac{\Delta x_{i,j} - \Delta \hat{x}_{i,j}}{\sqrt{\phi \Delta \hat{x}_{i,j}}}$  donde  $\phi$  es un parámetro de escala o factor de ajuste en función los grados de libertad. Sin embargo, también pueden ser propuesto otros residuos: eliminar los valores cero que se produce en el  $residuos_{9,1}$  y en el  $residuos_{1,9}$ , entre otros (Pinheiro *et al.*, 2003).

Y posteriormente calcular los residuos como:

$$\widehat{residuos}_{0,0} = \frac{3.514.018 - 2.690.642}{\sqrt{2.690.642}}$$

$$\widehat{residuos}_{0,1} = \frac{861.806 - 1.449.774}{\sqrt{1.449.774}}$$

Y así sucesivamente hasta completar el triángulo de residuos.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	501,96	-488,32	-255,84	-104,34	71,15	-17,88	60,58	110,40	-12,80	0
1	389,54	-260,37	-259,19	-153,87	76,07	0,97	-46,51	-40,57	12,27	
2	281,23	-313,35	56,60	-67,78	-168,70	55,16	-29,23	-61,99		
3	53,79	-109,29	81,20	-68,77	33,71	9,00	16,58			
4	58,44	47,28	-37,96	-135,86	6,67	-43,44				
5	-207,58	218,43	-83,68	198,63	-9,59					
6	-176,23	13,05	148,73	188,37						
7	-235,38	184,39	191,56							
8	-248,92	339,11								
9	0									

Los anteriores residuos son los residuos no ajustados (*unscaled Pearson residuals*). Es común multiplicar dichos residuos por un factor de ajuste para tener en cuenta el número de grados de libertad del triángulo de datos original. El factor de ajuste por el cual se debe multiplicar cada residuo no ajustado es  $\sqrt{\frac{n}{n-p}}$ , siendo  $n$  igual al número de datos del triángulo y  $p$  el número de parámetros estimados. En nuestro ejemplo, dado que es un triángulo de 10 filas y 10 columnas,  $n = 55$  y  $p$  es igual al doble del número de años de ocurrencia menos uno, es decir, 19. De esta forma el factor de ajuste es  $\sqrt{\frac{55}{55-19}} = 1,236$ .

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	620,44	-603,58	-316,23	-128,97	87,94	-22,10	74,88	136,45	-15,82	0
1	481,48	-321,83	-320,37	-190,18	94,03	1,20	-57,48	-50,15	15,16	
2	347,61	-387,31	69,96	-83,78	-208,52	68,17	-36,13	-76,63		
3	66,49	-135,08	100,37	-85,01	41,67	11,12	20,49			
4	72,23	58,44	-46,92	-167,92	8,25	-53,69				
5	-256,57	269,99	-103,43	245,51	-11,85					
6	-217,82	16,13	183,83	232,83						
7	-290,94	227,92	236,78							
8	-307,67	419,15								
9	0									

### **Paso 5: Análisis bootstrap: remuestreo con repetición de los residuos obtenidos**

Este es el paso del proceso donde se aplica el *bootstrap*. Se debe realizar un remuestreo con repetición de los residuos obtenidos en el paso anterior (es común excluir los valores cero), donde todos los residuos tienen la misma probabilidad, pero en una realización concreta puede que alguno o varios residuos no aparezcan y que otros lo hagan en más de una ocasión. Una realización de estos remuestreos es la mostrada a continuación.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	227,92	100,37	15,16	-208,52	-50,15	481,48	87,94	347,61	136,45	-53,69
1	-290,94	68,17	-76,63	-11,85	-190,18	20,49	66,49	-15,82	245,51	
2	-128,97	-103,43	94,03	-256,57	1,20	66,49	8,25	-167,92		
3	-85,01	16,13	232,83	-36,13	-321,83	-22,10	-316,23			
4	620,44	-217,82	-256,57	-57,48	69,96	-103,43				
5	232,83	183,83	419,15	41,67	-603,58					
6	74,88	-387,31	236,78	-320,37						
7	1,20	-46,92	-83,78							
8	58,44	-307,67								
9	481,48									

**Paso 6: Cálculo de un nuevo triángulo a partir de la información esperada y los residuos**

A partir de cada uno de los triángulos de residuos calculados mediante *bootstraping* podemos regenerar los incrementos o variaciones en los datos. Si los residuos los calculábamos mediante la siguiente expresión  $\widehat{residuos}_{i,j} = \frac{\Delta x_{i,j} - \Delta \hat{x}_{i,j}}{\sqrt{\Delta \hat{x}_{i,j}}}$ ,

podemos regenerar los incrementos de la muestra original simplemente mediante  $\Delta x_{i,j}^* = \widehat{residuos}_{i,j} \cdot \sqrt{\Delta \hat{x}_{i,j}} + \Delta \hat{x}_{i,j}$ . Por lo tanto, para el primer año de ocurrencia ( $i=0$ ) empezamos calculando el incremento en la cantidad estimada  $\Delta x_{0,0}^*$  mediante la expresión anterior, es decir:

$$\Delta x_{0,0}^* = \widehat{residuos}_{0,0} \cdot \sqrt{\Delta \hat{x}_{0,0}} + \Delta \hat{x}_{0,0} = 227,92 \cdot \sqrt{2.690.642} + 2.690.642$$

$$\Delta x_{0,1}^* = \widehat{residuos}_{0,1} \cdot \sqrt{\Delta \hat{x}_{0,1}} + \Delta \hat{x}_{0,1} = 100,37 \cdot \sqrt{1.449.774} + 1.449.774$$

Y así sucesivamente hasta completar el triángulo que se muestra:

Año de ocurrencia	Año de desarrollo									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.064.498,29	1.570.624,04	746.617,01	438.885,23	221.791,27	380.431,03	191.277,33	60.028,14	20.666,07	1.639,15
1	2.431.335,44	1.664.007,45	730.216,60	644.145,36	170.019,13	202.306,97	197.813,61	15.356,36	32.280,85	
2	3.010.934,28	1.610.777,68	972.708,29	505.499,57	298.017,12	244.772,19	192.210,04	-4.022,31		
3	3.761.357,35	2.140.967,86	1.312.527,70	843.192,63	167.139,94	248.070,10	77.382,38			
4	5.522.126,57	1.957.348,26	881.157,20	891.178,07	432.763,87	225.318,69				
5	6.670.868,80	3.617.833,15	2.202.514,24	1.409.040,60	107.687,28					
6	6.748.999,88	2.805.163,07	2.104.498,89	1.075.829,07						
7	6.933.708,99	3.643.653,60	1.774.513,85							
8	6.763.186,87	2.982.404,93								
9	6.596.970,36									

Una vez calculados los incrementos podemos acumularlos para un mismo año de ocurrencia, es decir,  $\hat{X}_{i,j} = \sum_{k=0}^j \Delta x_{i,k}^*$  para  $i + j = r - 1$ . Por lo tanto, para el primer año de accidente ( $i = 0$ ) empezamos calculando  $\hat{X}_{0,0}$  como el incremento en la cantidad estimada  $\Delta x_{0,0}^*$ , es decir  $\hat{X}_{0,0} = \Delta x_{0,0}^* = 3.064.498,29$ . Posteriormente, calculamos la cantidad acumulada en el año de desarrollo  $i = 1$ , como:

$$\hat{X}_{0,1} = \Delta x_{0,0}^* + \Delta x_{0,1}^* = 3.064.498,29 + 1.570.624,04;$$

$$\hat{X}_{0,2} = \Delta x_{0,0}^* + \Delta x_{0,1}^* + \Delta x_{0,2}^* = 3.064.498,29 + 1.570.624,04 + 746.617,01;$$

y así sucesivamente hasta completar el triángulo mostrado:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.064.498,3	4.635.122,3	5.381.739,3	5.820.624,6	6.042.415,8	6.422.846,9	6.614.124,2	6.674.152,3	6.694.818,4	6.696.457,6
1	2.431.335,4	4.095.342,9	4.825.559,5	5.469.704,9	5.639.724,0	5.842.031,0	6.039.844,6	6.055.200,9	6.087.481,8	
2	3.010.934,3	4.621.712,0	5.594.420,3	6.099.919,8	6.397.936,9	6.642.709,1	6.834.919,2	6.830.896,9		
3	3.761.357,4	5.902.325,2	7.214.852,9	8.058.045,5	8.225.185,5	8.473.255,6	8.550.638,0			
4	5.522.126,6	7.479.474,8	8.360.632,0	9.251.810,1	9.684.574,0	9.909.892,7				
5	6.670.868,8	10.288.702,0	12.491.216,2	13.900.256,8	14.007.944,1					
6	6.748.999,9	9.554.162,9	11.658.661,8	12.734.490,9						
7	6.933.709,0	10.577.362,6	12.351.876,4							
8	6.763.186,9	9.745.591,8								
9	6.596.970,4									

### **Paso 7: Cálculo de las provisiones para una realización particular del bootstrap**

La proyección del triángulo *run-off* debemos se realiza mediante el cálculo de los factores de desarrollo para cada remuestreo particular. Los factores de desarrollo calculados mediante la media simple de las cantidades acumuladas para nuestro ejemplo son los mostrados a continuación, el cálculo del factor correspondiente al año cero se realizaría como  $\text{Factor}_0 = \frac{4.635.122,3 + \dots + 9.745.591,8}{3.064.498,3 + \dots + 6.763.186,9}$  etc.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Factor <sub>j</sub>	1,4897	1,1876	1,1046	1,0288	1,0361	1,0241	1,0037	1,0042	1,0002

Debajo se muestra el triángulo de datos acumulados completado mediante los nuevos factores de desarrollo. La provisión se calcula como la diferencia entre el último pago esperado y el valor pagado histórico.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3.064.498	4.635.122	5.381.739	5.820.625	6.042.416	6.422.847	6.614.124	6.674.152	6.694.818	6.696.458
1	2.431.335	4.095.343	4.825.559	5.469.705	5.639.724	5.842.031	6.039.845	6.055.201	6.087.482	6.088.972
2	3.010.934	4.621.712	5.594.420	6.099.920	6.397.937	6.642.709	6.834.919	6.830.897	6.859.310	6.860.989
3	3.761.357	5.902.325	7.214.853	8.058.046	8.225.185	8.473.256	8.550.638	8.581.948	8.617.644	8.619.754
4	5.522.127	7.479.475	8.360.632	9.251.810	9.684.574	9.909.893	10.148.289	10.185.448	10.227.814	10.230.318
5	6.670.869	10.288.702	12.491.216	13.900.257	14.007.944	14.514.279	14.863.440	14.917.865	14.979.915	14.983.583
6	6.749.000	9.554.163	11.658.662	12.734.491	13.100.649	13.574.189	13.900.734	13.951.634	14.009.665	14.013.096
7	6.933.709	10.577.363	12.351.876	13.643.802	14.036.106	14.543.459	14.893.322	14.947.856	15.010.031	15.013.706
8	6.763.187	9.745.592	11.574.312	12.784.910	13.152.518	13.627.932	13.955.771	14.006.873	14.065.133	14.068.577
9	6.596.970	9.827.773	11.671.915	12.892.721	13.263.429	13.742.852	14.073.455	14.124.988	14.183.740	14.187.213

Año de ocurrencia	Pagado	Último pago esperado	Provisión
0	6.696.457,55	6.696.457,55	-
1	6.087.481,77	6.088.972,23	1.490,45
2	6.830.896,86	6.860.988,96	30.092,10
3	8.550.637,97	8.619.753,71	69.115,74
4	9.909.892,67	10.230.318,33	320.425,65
5	14.007.944,08	14.983.582,77	975.638,69
6	12.734.490,91	14.013.095,52	1.278.604,61
7	12.351.876,44	15.013.705,99	2.661.829,55
8	9.745.591,80	14.068.576,92	4.322.985,11
9	6.596.970,36	14.187.212,69	7.590.242,33
<b>TOTAL</b>			<b>17.250.424,24</b>

### **Paso 8: Obtención de la distribución de las provisiones**

El proceso anterior muestra el valor de la provisión para prestaciones obtenido para un remuestreo particular, pero gracias al *bootstrap* se puede repetir el proceso de generación de muestras de los residuos un número lo suficientemente elevado como para poder efectuar el cálculo de distintos estadísticos sobre la distribución resultante. De esta forma para cada remuestreo particular obtendremos un valor de la provisión, y para múltiples remuestreos obtenemos la distribución estimada. La mejor estimación o BE de la provisión será su valor medio o esperado, pero, al tener disponible la distribución estimada podemos proceder al cálculo de distintos percentiles útiles para evaluar el riesgo. El anterior procedimiento se realizaría para un modelo DFA basado en escenarios, en donde obtenemos el valor de la provisión en cada uno de los escenarios generados. En el caso de querer efectuar para el cálculo del riesgo por reservas un método basado en factores de

cargas de capital, se debe dividir el capital económico requerido entre el indicador o medida de volumen seleccionada. La medida de volumen empleada suele ser la mejor estimación de la provisión para prestaciones, mientras que el capital económico se obtiene como diferencia entre el valor del percentil 99,5 y la mejor estimación.

## 7. EL REASEGURO

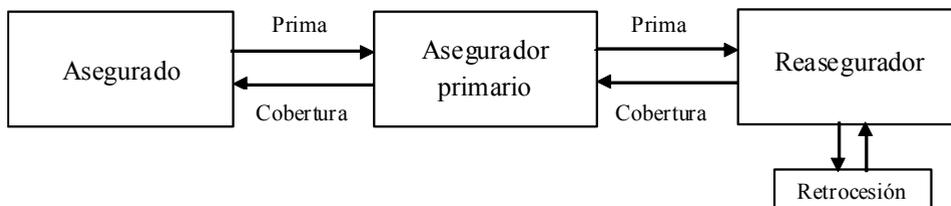
Las compañías aseguradoras deben mantener una estabilidad financiera para proteger los intereses de sus asegurados. Una herramienta de gestión del riesgo y del capital a la que recurren frecuentemente las compañías aseguradoras para alcanzar esta estabilidad es el reaseguro<sup>69</sup>. El reaseguro es el seguro de las compañías aseguradoras y permite adaptar la estructura de riesgos asumidos a su capacidad financiera. El reaseguro evita la concentración excesiva de riesgo por parte de una única aseguradora y se emplea para cubrir riesgos que un asegurador no desea o no puede cubrir. Otra función fundamental del reaseguro es aumentar la capacidad de suscripción de riesgos empleando la capacidad de los reaseguradores, lo que posibilita captar nuevo negocio a través de más riesgos u otras clases de riesgos, beneficiándose de economías de escala.

El reaseguro puede definirse formalmente como el contrato entre una aseguradora (cedente, reasegurado, asegurador directo o primario) y un reasegurador (aceptante), según el cual se acuerda indemnizar al asegurador con parte o todo el daño cubierto de acuerdo al contrato suscrito. De esta forma, el reaseguro al igual que en el seguro, es el compromiso de pago futuro de una posible siniestralidad objeto de cobertura contra el pago de una prima o precio. Además, debe mencionarse que si bien el reaseguro aumenta la estabilidad de los resultados del asegurador primario aumentando la garantía de pago de las coberturas originales con sus asegurados, el reaseguro es independiente del contrato de seguros original. Por lo tanto, el responsable del pago de la siniestralidad experimentada por un asegurado es en su totalidad el asegurador primario. Dicho asegurador será el encargado de reclamar en base al contrato de reaseguro realizado los pagos correspondientes al reasegurador. Finalmente, mencionar que las reaseguradoras también suelen acudir al mercado de reaseguro mediante la retrocesión de riesgos<sup>70</sup>, estableciéndose de esta forma una cadena de reaseguradores. La estructura del reaseguro viene resumida en el siguiente gráfico.

---

<sup>69</sup> Otra herramienta frecuentemente empleada es el coaseguro. El coaseguro es el método mediante el cual dos o más compañías aseguradoras cubren de forma compartida un riesgo, estableciéndose una relación contractual entre cada coasegurador y el asegurado.

<sup>70</sup> Al igual que en el caso del contrato de reaseguro original puede deberse a que la reaseguradora no desea o no puede retener totalmente algunos de los riesgos contratados.



No todas las compañías aseguradoras recurren en la misma medida al reaseguro. En este sentido, en la siguiente tabla se resumen los fundamentales factores que afectan a una compañía aseguradora en lo referente a la contratación de reaseguro.

Características	Razón	Influencia
Carteras expuestas a catástrofes naturales	Afectan al mismo tiempo a un número elevado de asegurados	+
Las aseguradoras locales	No pueden diversificar sus riesgos a través de una base de clientes más amplia	+
Las aseguradoras multi-ramos.	Cuentan con una cartera de negocio más balanceada que los aseguradores especializados en algún ramo	-
Carteras de ramos con un gran número de riesgos pequeños y homogéneos	Compañías con bajo riesgo actuarial	-
Los aseguradores que expanden sus productos o que entran en nuevas regiones (Nuevo negocio)	Aprovechar la experiencia y capacidad financiera del reasegurador	+
Los aseguradores que están abandonando un mercado o algún ramo de seguro	Usan el reaseguro de <i>run-off</i> para transferir al reasegurador ciertos negocios cuya responsabilidad permanece todavía existente conforme a los respectivos contratos	+
Compañías con débil posición financiera	Las consideraciones y exigencias de las autoridades y de las agencias de clasificación del riesgo	+
Las aseguradoras de vida con una mayor proporción de contratos que contengan riesgos de mortalidad o de invalidez	Mayores necesidades de capital	+

Fuente: Swiss Re (2005).

El reaseguro tiene un impacto fundamental en la solvencia de una compañía aseguradora al reducir su riesgo técnico o asegurador, debido a que permite modificar la distribución de la siniestralidad. En el lado negativo, el reaseguro supone un menor volumen de primas, ya que el precio del reaseguro es la prima de reaseguro<sup>71</sup>, lo que implica una reducción del beneficio esperado para la aseguradora, y la reducción del riesgo técnico se ve en parte mitigada por el aumento del riesgo de crédito, ya que la aseguradora será indemnizada por el reasegurador sólo si éste permanece solvente. Si  $\psi^{\text{Reaseguro}}$  es la probabilidad de insolvencia del reasegurador, las distribuciones de las cantidades de los siniestros pueden separarse en dos componentes

$$S(T) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i^{\text{Reaseguro}} & \text{con probabilidad } (1 - \psi^{\text{Reaseguro}}) \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{con probabilidad } \psi^{\text{Reaseguro}} \end{cases}$$

El reaseguro evita la concentración excesiva de riesgo por parte de una compañía, logrando la dispersión de los riesgos a un conjunto potencialmente elevado de compañías de todo el mundo. Además de la menor volatilidad de los resultados aseguradores, otras ventajas proporcionadas por el reaseguro al asegurador primario es la reducción del capital necesario<sup>72</sup>, el desarrollo de nuevos productos y a un mayor conocimiento sobre los riesgos. A continuación pueden verse resumidas las ventajas del reaseguro.

Ventaja	Razón
Protección frente a dificultades financieras	Proporcionar estabilidad en los resultados del negocio suscrito
Diversificación de riesgos	Permite transferir a múltiples agentes los riesgos asumidos.
Reducción del capital necesario	El reasegurador participa en los riesgos asumidos, por lo que reduce las provisiones.
Asesoramiento profesional	Los reaseguradores proporcionan asesoramiento técnico
Aumenta la capacidad de suscripción	El reaseguro proporciona flexibilidad a la aseguradora que puede suscribir un mayor volumen de riesgos de los que su capacidad financiera le hubiera permitido

<sup>71</sup> Los factores que fundamentalmente se tienen en cuenta para el cálculo de la prima son: la experiencia de siniestralidad de la aseguradora cedente en los últimos años, la siniestralidad del mercado y su posible evolución futura. Además, la compañía aseguradora establece frecuentemente un recargo por gastos y, finalmente, un margen de beneficios.

<sup>72</sup> Se produce una reducción del capital necesario si la aseguradora principal no asegura más riesgos. Pero también puede verse una ventaja desde la perspectiva de que el asegurador primario tenga capacidad para asumir más riesgos y, por lo tanto, pueda aprovecharse de economías de escala.

## **Modalidades de reaseguro**

Existe una amplia gama de contratos de reaseguro que permiten adaptarse a las necesidades propias de la empresa y a las particularidades del riesgo que se desea transferir. Tradicionalmente las diferentes clases de reaseguro se diferencian de acuerdo a la relación jurídica o forma operativa en dos grupos de contratos:

- Reaseguro facultativo. Es el contrato de reaseguro en el cual se negocia la transferencia riesgo por riesgo. La aseguradora primaria no tiene el compromiso de ceder ni la compañía reaseguradora el de aceptar una determinada clase de riesgos, sino que deben ser negociados individualmente. Se suele emplear para la cobertura de riesgos elevados e inusuales.
- Reaseguro contractual o automático. Es el contrato de reaseguro en el cual la compañía cedente transfiere una parte determinada de riesgo de todos los contratos conforme a los términos de un acuerdo previo, y la reaseguradora tiene la obligación de aceptar todas las cesiones. Se suele emplear para la cobertura de riesgos usuales resultando muy operativo.

Los grupos de contratos facultativo y automático, se dividen a su vez, en contratos proporcionales y no proporcionales. Desde el punto de vista técnico, existen dos grandes grupos de reaseguro: el reaseguro proporcional o de riesgos y el reaseguro no proporcional o de siniestros:

- Reaseguro Proporcional. Es la clase de reaseguro en donde la cesión es proporcional al riesgo asumido por la cedente. Por tanto la aseguradora cede o transfiere un porcentaje de riesgos y primas y, en este mismo porcentaje, la reaseguradora hace frente a los siniestros ocurridos. Existen dos modalidades principales: el reaseguro cuota-parte (*quota-share*) y el excedentes (*surplus*). En el reaseguro cuota parte el reasegurador acepta un porcentaje o proporción fija para todos los riesgos, haciéndose responsable en ese mismo porcentaje de todos los siniestros. Por su parte, en el reaseguro de excedentes la aseguradora no cede todos los riesgos, sino sólo los que sobrepasen una determinada suma llamada retención. La retención es el importe máximo que asume por cuenta propia la aseguradora, mientras que la cesión es la parte que asume el reaseguro.
- En el reaseguro no proporcional el reasegurador está obligado a compensar al asegurador primario el importe de la siniestralidad que excedan una cierta cantidad o porcentaje estipulado. Por tanto, la responsabilidad no está en proporción con las con la suma asegurada o primas, sino que obedece a los acuerdos pactados entre ambas que normalmente obedecen a los siniestros más graves. En esta categoría se encuentran el reaseguro exceso de pérdida por riesgo, exceso de pérdida por evento o catástrofe y el reaseguro limite de siniestralidad<sup>73</sup>. El reaseguro exceso de pérdida por riesgo, *Working Cover* o WXL cubre un siniestro "individual" que sobrepasa la prioridad, hasta una cantidad llamada ca-

---

<sup>73</sup> Por lo tanto podría hablarse de forma genérica de reaseguro Excess-loss y Stop-loss.

pacidad. Este reaseguro opera riesgo por riesgo, por lo tanto protege al cedente contra desviaciones en la severidad de los siniestros<sup>74</sup>. El reaseguro catastrófico, CAT XL o exceso de pérdidas por evento permite proteger al asegurador frente a una elevada frecuencia provocada por un mismo evento. El reaseguro *Stop Loss* se diferencia de los anteriores en que protege al asegurador cedente contra una desviación en la siniestralidad conjunta o global<sup>75</sup>, por lo que opera cuando la siniestralidad acumulada supere cierta prioridad y de esta forma limita la siniestralidad del cedente a un determinado valor. A diferencia del reaseguro *Excess-Loss* que pretende la cobertura de una serie de siniestros individuales, el reaseguro *Stop-Loss* pretende hacer frente a una desviación de la siniestralidad en su conjunto<sup>76</sup>.

En el reaseguro no proporcional la base no es el riesgo o suma asegurada, sino el siniestro. De esta forma es común que el reasegurador asume parte de la siniestralidad que supere un cierto valor llamado "prioridad". La aseguradora se hace responsable de la prioridad que fija y protege la siniestralidad restante mediante la cobertura del reaseguro. Por otro lado, también es frecuente que la reaseguradora sólo se haga responsable de la siniestralidad hasta un importe máximo que pueden poner en juego por su cuenta, a esta cantidad se le llama capacidad. Bajo capacidad ilimitada, la siniestralidad asumida por el asegurador y el reasegurador viene determinada según lo mostrado en la siguiente tabla.

Siniestralidad (S)	Asumida por la Aseguradora (Sa)	Asumida por la Reaseguradora (Sr)
$0 < S \leq \text{Prioridad}$	S	0
$\text{Prioridad} < S < \infty$	Prioridad	S-Prioridad

Bajo capacidad limitada, la siniestralidad asumida por el asegurador y por el reasegurador, está determinada según la siguiente tabla. Por tanto el reasegurador sólo responde ante los siniestros que superen un determinado valor (*prioridad*) y como máximo hasta la capacidad fijada.

<sup>74</sup> Cubre aquella parte de cada siniestro que supera una determinada cantidad o prioridad.

<sup>75</sup> De esta forma protege al asegurador contra desviaciones en la frecuencia y en la severidad.

<sup>76</sup> Este es el caso del reaseguro *Stop Loss* con capacidad ilimitada. Sin embargo, es frecuente el reaseguro *Stop Loss* en el que la reaseguradora se hace cargo de la siniestralidad que excede a la prioridad hasta una determinada cuantía llamada capacidad.

Siniestralidad (S)	Asumida por la Aseguradora (Sa)	Asumida por la Reaseguradora (Sr)
$0 < S \leq \text{Prioridad}$	S	0
$\text{Prioridad} < S \leq \text{Prioridad} + \text{Capacidad}$	Prioridad	S-Prioridad
$\text{Prioridad} + \text{Capacidad} < S < \text{inf.}$	S-Capacidad	Capacidad

## 8. REGLAS DE DECISIÓN O LAZOS DE REGENERACIÓN

La diferencia entre un modelo estocástico de activo y pasivo y un modelo DFA reside principalmente en que los modelos dinámicos incorporan lazos de regeneración, dotándolos de cierta inteligencia artificial. Los lazos de regeneración pueden verse como decisiones condicionales automáticas que se incorporan al modelo. La causa de su inclusión es la hipótesis de que la gerencia de un asegurador puede reaccionar a su entorno revisando sus estrategias cuando sea necesario, y no implantar su plan operativo de una forma pasiva a lo largo del período de proyección del modelo. Formalmente los lazos son algoritmos que realizan cálculos para algunas variables del modelo, en función de los valores obtenidos en períodos anteriores o de los valores previstos para el futuro. Los lazos de regeneración se utilizan para prever la reacción futura de la compañía (evolución de las estrategias) a las condiciones específicas simuladas a lo largo del período de proyección.

La causa principal por la que se incorporan lazos de regeneración en un modelo dinámico es el intento de modelizar el comportamiento futuro de la compañía, de forma que los resultados obtenidos sean más realistas. Los modelos sin lazos de regeneración pueden estar infra determinados, mostrando pérdidas excesivas bajo escenarios desfavorables y ganancias reducidas bajo escenarios favorables. Sin embargo, los modelos con lazos de regeneración pueden estar sobre determinados, mostrando un nivel de riesgo demasiado bajo tanto en escenarios optimistas como en escenarios pesimistas. Según la CAS (2009) la causa reside en que normalmente el modelo asume a menudo que la gerencia responderá rápidamente a las situaciones adversas aplicando las respuestas estratégicas u operacionales apropiadas. D'Arcy *et al.* (1998) indican la conveniencia de incorporar determinadas decisiones estratégicas en los modelos, sin embargo no les parece apropiado incorporar todos los procesos de toma de decisiones en el modelo, para así poder analizar el efecto de distintos escenarios. También Eling *et al.* (2008b) afirman que es especialmente importante incorporar las estrategias de gestión en la planificación a largo plazo, pero que dicha integración no ha sido profundamente tratada en la literatura, dando dos razones por las que modelizar el comportamiento de la gerencia es esencial para un modelo DFA apropiado. Primero, el comportamiento de la gerencia refleja la reacción de la compañía a su entorno y a su situación financiera, de forma que son necesarias para hacer la simulación multi-período más significativa. En segundo lugar, la gerencia puede utilizar DFA para probar diversas estrategias y para aprender de sus resultados, de forma que puede prevenir futuros errores.

Mientras que un modelo financiero dinámico que no incorpore reglas de decisión es poco realista, incorporar tales reglas representa un desafío a la hora de especificar el modelo. Según Warthen y Sommer (1996) además de las reglas específicas de decisión, se debe también especificar lo que se presume que la gerencia del asegurador conoce sobre su entorno en un momento temporal dado, es decir, el estado del conocimiento de la gerencia. Los ejemplos de las reglas de la decisión que se podrían identificar como relevantes para estos autores son: relacionar el proceso de tarificación con su adecuación pasada y el nivel de competencia, los cambios en los procesos de inversión debido a opiniones respecto al comportamiento futuro de la cartera, limitar el crecimiento del asegurador en entornos de fuerte competencia, la valoración de la provisión para prestaciones y del coste de los siniestros en función de las desviaciones pasadas, reglas para las estrategias de reaseguro de la compañía, y finalmente, reglas que determinen el momento y el importe del pago de dividendos.

## CAPÍTULO 5

# MODELACIÓN FINANCIERA DE LOS RIESGOS DE MERCADO; DE CONTRAPARTE Y OPERATIVO DE LAS COMPAÑÍAS DE SEGUROS NO DE VIDA

### 1. INTRODUCCIÓN

Un aspecto crucial a la hora de configurar un modelo interno es la selección de los submodelos que resultan más apropiados para simular los riesgos a los que se enfrenta el asegurador. En la literatura económica nos encontramos con múltiples alternativas para cada riesgo, si bien son pocos los estudios que pueden facilitar dicha tarea. De hecho, es muy común la existencia de propuestas que no justifican los criterios utilizados para la selección de los modelos. En este capítulo haremos una revisión de la literatura relativa a la modelización de los riesgos de activo de una compañía aseguradora y que ha constituido la base para la selección de los modelos que se comparan con el último modelo estándar propuesto por el CEI-OPS recogido en el último estudio de impacto cuantitativo (QIS4).

Las compañías de seguros generales españolas destinaban en 2008 directamente un 15,2 por ciento de su cartera a la inversión en renta variable<sup>1</sup>. El riesgo de renta variable ha sido modelizado a través de técnicas muy diversas en el marco del análisis financiero dinámico. Así, Schmeiser (2004) opta por el modelo de rendimientos normal, Kaufmann *et al.* (2001) y el modelo DynaMo 3 proponen un “modelo lineal”, mientras que Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004b) utilizan un modelo de cambio de régimen, que propone Hardy (2001), justificando el mejor ajuste a las “colas gruesas” que muestran las rentabilidades históricas. En un trabajo posterior Hardy *et al.* (2006), exponen una metodología de comparación y selección de modelos alternativos muy útil para la configuración de un modelo interno. De su trabajo se desprende el mejor ajuste global de los modelos GARCH, a pesar de que presentan un ajuste peor que los de cambio de régimen a la cola de la distribución por lo que pueden ser no adecuados para determinar las cargas de capital. Estas alternativas, que se han utilizado para el riesgo de renta variable son igualmente válidas para los riesgos derivados del tipo de cambio y de propiedades inmobiliarias, donde en general se ha recurrido al uso de modelos autorregresivos menos sofisticados (Ahlgrim *et al.*, 2004b y Blum *et al.*, 2001). A continuación se muestra un resumen de la alternativa propuesta en QIS4 frente a las distintas opciones que pueden ser empleadas en DFA para los tres riesgos descritos anteriormente.

---

<sup>1</sup> Fuente ICEA [www.icea.es](http://www.icea.es)

Solvencia II-DFA	Modelo	Características	Riesgo	Autores
Modelo estándar Solvencia II	QIS4	Modelo normal utilizando media y volatilidad histórica	Renta Variable* Inmuebles Tipo de cambio	CEIOPS (2008a)
DFA	Modelo normal	Modelo normal utilizando media y volatilidad histórica	Renta Variable Inmuebles	Schmeiser (2004)
	Modelo lineal	Versión del CAPM en donde se correlaciona negativamente el cambio en los tipos de interés a la rentabilidad de las acciones.	Renta Variable	Kaufmann <i>et al.</i> (2001) DynaMo **
	Modelo de cambio de régimen	Regímenes con distintas volatilidades y rendimientos esperados. El cambio de un régimen a otro está dictado por las probabilidades de transición.	Renta Variable	Hardy (2001). Hibbert <i>et al.</i> (2001) Ahlgren <i>et al.</i> (2004b)
	Modelo AR(1)	Modelo en el que los valores de una variable se generan a partir de sus valores retardados un periodo.	Inmuebles	Ahlgren <i>et al.</i> (2004b)
	Regresión lineal múltiple	Modelo en el que los tipos de cambio se generan a partir de los valores de la tasa de inflación y tipos de interés de distintas economías.	Tipo de cambio	Blum <i>et al.</i> (2001)
	Vectores autorregresivos	Modelo en el que los tipos de cambio se generan a partir de sus valores pasados y de los valores de otras variables.	Tipo de cambio	Blum <i>et al.</i> (2001)

\* Para la renta variable se testa el modelo con efecto amortiguador.

\*\*DynaMo es un modelo descrito en D'Arcy *et al.* (1997,1998), en la actualidad está siendo actualizado a su cuarta versión por la sociedad de actuarios americana CAS.

El riesgo de tipo de interés afecta a todos los activos y pasivos cuyo valor neto sea sensible a las variaciones en la estructura temporal y que no estén relacionados con pólizas en las que el tomador asuma el riesgo de inversión. Este riesgo es particularmente relevante en el caso de las compañías de seguros generales españolas, ya que según los datos estadísticos aportados por ICEA, en 2008 destinaban directamente un 46,6 por ciento de su cartera a la inversión en activos de renta fija, fundamentalmente del área euro. Respecto al riesgo de tipo de interés, los modelos internos DFA optan generalmente por el diseño de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés mediante el ajuste de los datos históricos a un modelo estocástico. Ahlgrim *et al.* (1999) indican que los modelos de equilibrio<sup>2</sup> son más apropiados para la proyección a largo plazo debido a que los modelos sin arbitraje<sup>3</sup> pueden tender a niveles poco realistas (valores extraordinariamente altos o negativos). En cuanto al número de factores, también Ahlgrim (2001) llega a la conclusión de que un modelo de un factor es suficiente para un modelo DFA de una compañía aseguradora de no vida. Sin embargo, el asegurador de vida debe utilizar un modelo de más factores debido a la mayor sensibilidad de su actividad a las fluctuaciones del tipo de interés. Un modelo de más de un factor posibilita una gama más completa de movimientos y formas de la curva, pero por contra aumenta rápidamente la complejidad y la manejabilidad del modelo. Dentro de los modelos de un factor, el propuesto por Cox *et al.* (1985) o modelo CIR (1985) es el que logra un mejor equilibrio entre complejidad y exactitud, tal y como indican D'Arcy *et al.* (1998), Ahlgrim *et al.* (1999) y Kaufmann *et al.* (2001). Por el contrario Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004b) emplean un modelo de 2 factores de Vasicek.

Solvencia II-DFA	Modelo	Características	Riesgo	Autores
Modelo estándar Solvencia II	QIS4	Análisis del efecto en el valor neto de los activos menos pasivos de cambios predeterminados en la ETTI.	Tipo de interés	CEIOPS (2008a)
DFA	Modelo normal	Modelo normal utilizando media y volatilidad histórica	Tipo de interés	Schmeiser (2004)*
	Modelo CIR (1985)	Modelo en el que el tipo de interés a corto plazo es un proceso estocástico de reversión a la media estando su volatilidad relacionada con el nivel de los tipos.	Tipo de interés	Kaufmann <i>et al.</i> (2001) DynaMo
	Modelo de 2 factores de Vasicek	Modelo en el que tanto el tipo de interés a corto plazo como tipo medio al que revierte presentar reversión a la media..	Tipo de interés	Hibbert <i>et al.</i> (2001) Ahlgrim <i>et al.</i> (2004b)

\* En realidad modeliza directamente la rentabilidad de la renta fija.

<sup>2</sup> Entre otros se incluyen las propuestas de Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox *et al.* (1980), Cox *et al.* (1985).

<sup>3</sup> Dentro de estos se incluyen las propuestas de Ho y Lee (1986), Heath *et al.* (1992), etc.

En cuanto al riesgo de *spread*, son muy pocos los estudios que han tratado de modelizar su dinámica. No obstante, en la medida que el *spread* forma parte del tipo de interés de los activos con riesgo de crédito, algunos autores han optado por aplicar los modelos de la ETTI descritos anteriormente. Así, Prigent *et al.* (2001) emplean los datos de los niveles de *spreads* agregados de crédito de Moody's con observaciones diarias entre enero de 1986 a Marzo de 2000 para estimar los parámetros de modelos de equilibrio de un factor<sup>4</sup>. Asimismo, Pauling (2002)<sup>5</sup> propone el uso del modelo CIR (1985) para simular los caminos futuros de los *spreads*. Otras alternativas podrían ser el empleo del modelo de saltos lognormal propuesto por el CEIOPS (2008a) o la aplicación de alguno de los modelos de series temporales explicitados para la simulación del riesgo de mercado.

El riesgo de quiebra de la contraparte ha sido abordado tanto en la regulación de los requerimientos de capital del sistema financiero como del sector asegurador, Basilea II y Solvencia II, mediante la distribución de Vasicek. En este capítulo mostraremos la forma de derivar la distribución y las hipótesis básicas con las que esta trabaja. Finalmente abordaremos la cuantificación del riesgo operativo de una compañía aseguradora, aspecto también muy ligado a los modelos desarrollados en la industria bancaria.

El objetivo de este capítulo es realizar una revisión de la literatura relativa a la modelización de los riesgos de activo y operativo de una compañía aseguradora. Para alcanzar dicho objetivo, este capítulo se estructura en los siguientes apartados. En el apartado 2 se realiza una revisión de las principales técnicas para la modelización de los riesgos de renta variable, tipos de cambio y propiedades inmobiliarias. En el apartado 3 se realiza una revisión de los principales modelos estocásticos establecidos en el ámbito financiero para los riesgos de tipos de interés. El apartado 4 está dedicado al análisis de las series de *spreads*, y cómo dichas características pueden ser incorporadas en un modelo de evaluación del riesgo. En el apartado 5 se establece los modelos de fallidos o quiebra de la contraparte como herramientas para medir su riesgo. Finalmente, el apartado 6 está dedicado al análisis y discusión del riesgo operativo.

## **2. MODELIZACIÓN DEL RIESGO DE RENTA VARIABLE, TIPOS DE CAMBIO E INMUEBLES**

Solvencia II propone en QIS4 para la estimación de las cargas de capital para los riesgos de renta variable, tipos de cambio e inmuebles el VaR al 99,5% bajo la hipótesis de que los rendimientos siguen una determinada función de distribución

---

<sup>4</sup> Encuentran que para el *spread* Aaa el modelo de tipo CKLS que mejor se ajusta es el de Vasicek (1977), mientras que para el *spread* Baa es Brennan y Schwartz (1980).

<sup>5</sup> Emplea los datos mensuales de Moody's de Febrero de 1977 a Septiembre de 2002 para calibrar el modelo CIR (1985) y generar los *spreads* en 100 escenarios para un horizonte temporal de 10 años (simulación mes a mes).

de probabilidad, la distribución Normal o Gaussiana. Si bien bajo Solvencia II estos riesgos se abordan de forma individual, hemos optado por integrarlos dentro de un mismo epígrafe, debido a que en el análisis financiero dinámico se suelen modelizar a través de distribuciones semejantes o técnicas derivadas del análisis de series financieras temporales comunes.

El modelo tradicional del rendimiento de la renta variable asume que dicha variable sigue un movimiento Browniano geométrico, lo que implica que en cualquier intervalo discreto de tiempo los precios de las acciones están lognormalmente distribuidos y son independientes entre intervalos diferentes. De esta forma el precio de un activo puede expresarse como  $P_t = P_0 \exp\left(\frac{\mu - \sigma^2}{2}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}W_t\right)$ , donde  $W_t$  es una secuencia de normales estándar. A través de este modelo podemos simular las trayectorias de los precios del activo a lo largo del horizonte temporal deseado a partir de su rendimiento medio  $\mu$  y volatilidad  $\sigma^2$ .

De esta forma si  $P_t$  es el precio de una acción en el momento  $t$ , entonces el rendimiento logaritmico  $Y_t$  se puede definir como  $Y_t = \ln \frac{P_{t+s}}{P_t} \sim N(\mu(s); \sigma^2(s))$ , para la media  $\mu$  y la volatilidad  $\sigma^2$ . Por lo tanto se obtiene directamente que  $P_t = P_{t-1} \exp(Y_t) = P_0 \exp(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t)$ . Una propiedad muy importante del modelo lognormal es la escalabilidad (*scalability*) o invarianza ante cambios de escala de la distribución normal, lo que implica que si  $\ln \frac{P_1}{P_0} \sim N(\mu; \sigma^2)$  para  $t = 1, 2, \dots, 11$  entonces  $\ln \frac{P_{12}}{P_0} \sim N(12\mu; 12\sigma^2)$  lo que convierte el modelo en muy manejable matemáticamente.

El modelo normal de rendimientos supone que los rendimientos son independientes a lo largo de diferentes periodos. Por lo tanto la volatilidad del rendimiento de  $t$ -periodos es  $\sqrt{t}$  veces la volatilidad del periodo 1 lo que se conoce como la fórmula temporal de la raíz cuadrada, dado que la volatilidad aumenta con la raíz cuadrada del tiempo  $\sigma\sqrt{t}$  al hacerlo la varianza de forma lineal  $\sigma^2 t$ . Esto implica que la varianza a largo plazo crece linealmente con el tiempo, de forma que la varianza a  $n$  años es  $n$  veces la varianza a un año. Poterba y Summers (1988)<sup>6</sup> muestran que las distribuciones a largo plazo de los mercados de acciones tienen menor varianza que la considerada por el crecimiento lineal, lo que muestra cierta evidencia de reversión a la media. Siegel (2002)<sup>7</sup> analiza los rendimientos reales del mercado bursátil en el período comprendido entre 1802 y 2001, encontrando que la volatilidad de los rendimientos a largo plazo es menor que la proporcionada por la regla de la raíz cua-

<sup>6</sup> Para ello calculan el test de la razón de varianzas (*variance ratio test*). Este test calcula el cociente de la varianza de las rentabilidades de  $n$  periodos sobre  $n$  veces la varianza de un periodo de forma que si los rendimientos no estuviesen correlacionados a lo largo del tiempo este ratio no debiera ser estadísticamente distinto de uno. Al mismo tiempo, encuentran autocorrelaciones positivas examinando periodos cortos de tiempo, mientras que si se observan largos periodos se evidencia autocorrelaciones negativas, lo que implica reversión a la media en el mercado bursátil.

<sup>7</sup> Al mismo tiempo encuentra que la inversión en renta variable, a diferencia de la liquidez o la inversión en renta fija, proporciona rendimientos reales positivos manteniéndolos en cartera a largo plazo.

drada, lo que atribuye a la reversión a la media de los rendimientos. La hipótesis de que los rendimientos puedan revertir en el medio o largo plazo a la media supone un fuerte argumento para la introducción de modelos de series temporales que permitirán acomodar este y otros aspectos característicos de los rendimientos.

El modelo de rendimientos normal que subyace en el cálculo de QIS4 ha sido elegido por razones de simplicidad y transparencia y proporciona una aproximación razonable para periodos temporales muy reducidos<sup>8</sup>. No obstante, la hipótesis de normalidad puede subestimar seriamente la cola de la distribución de pérdidas (resultados extremos) y no captura la variabilidad en la volatilidad por lo que es menos apropiado para representar periodos temporales más largos. En un modelo DFA pueden emplearse otras técnicas para recoger la tradicional asimetría y curtosis de la distribución de resultados, la posible correlación de los rendimientos a lo largo del tiempo (autocorrelación serial) y la volatilidad no constante en el tiempo (heterocedasticidad).

En el diseño de modelos internos a través de DFA se ha recurrido a técnicas muy variadas, que provienen del análisis de las series temporales, que proporcionan las bases teóricas en la que se sustentarán los modelos empleados para simular estos riesgos. El objetivo es mostrar la necesidad de los siguientes pasos para el cálculo de las cargas de capital asociados a estos riesgos de mercado:

- Transformar las series originales (índices de mercado, cotizaciones de divisas, índices de propiedades inmobiliarias, etc.<sup>9</sup>) en rendimientos logarítmicos para convertirlas en estacionarias. Para ajustar los modelos es preciso que la serie no tenga tendencia, y que presente un grado de dispersión similar en cualquier momento de tiempo.
- Elección del modelo más adecuado para la modelización de la serie de rendimientos: empleo de distribuciones (normal,  $t$  de student, mixturas de normales) o modelos temporales (modelos ARMA, GARCH, RSLN, etc.).
- Simulación del modelo estimado a lo largo del horizonte temporal marcado. Si el objetivo es la determinación de las cargas de capital bajo Solvencia II dicho horizonte temporal será de un año, pero desde un punto de vista de gestión del riesgo puede ser útil realizar una simulación para horizontes temporales mayores, sobre todo en el caso de las compañías aseguradoras de vida. En este ca-

---

<sup>8</sup> Sin embargo, la escalabilidad no se sostiene a largo plazo en los datos ya que se observa autocorrelación entre las distintas observaciones por lo que se viola el principio de independencia entre las mismas.

<sup>9</sup> Es útil recordar en este punto las series empleadas por el CEIOPS en la calibración de estos tres riesgos, dado que las empleadas en un modelo interno serían de naturaleza semejante. Para el riesgo de renta variable el CEIOPS empleo los rendimientos obtenidos por el índice MSCI (Morgan Stanley Capital Investment) de mercados desarrollados, para inmuebles y propiedades los índices IPD (Investment Property Databank) correspondientes a Holanda, Francia, Alemania, Suecia y Gran Bretaña. Finalmente, para el riesgo derivado del tipo de cambio se analizaron los datos de los tipos de cambio contra el euro de un conjunto de divisas (dólar estadounidense, libra esterlina, peso argentino, etc.) con los que se formaron una cesta mediante ponderaciones.

so es indispensable modelizar adecuadamente la posible reversión a la media de los rendimientos.

- Proceder a la acumulación o agregación temporal de los rendimientos continuos a lo largo del horizonte temporal marcado y transformar la serie de rendimientos en la serie originaria (índices de mercado, etc.)
- A partir de los valores de la serie originaria simulados, calcular las medidas del riesgo (VaR, TVaR, etc.), determinando el capital asociado.

## 2.1. Análisis de series temporales financieras

El análisis de las series temporales es la parte de la estadística donde las observaciones son recogidas secuencialmente en el tiempo y trata de analizar y entender las relaciones de dependencia entre dichas observaciones. Por lo tanto una serie temporal es el resultado de observar los valores de una variable a lo largo del tiempo en intervalos regulares (días, semanas, meses, etc.). El análisis de la serie temporal trata de encontrar un modelo matemático que describa la dependencia temporal en los datos. Una vez ajustado el modelo se emplea para la predicción o simulación de los siguientes valores. En el contexto de la gestión y medición del riesgo de una entidad aseguradora, estos modelos son útiles para simular posibles sendas de las series objeto de interés de forma que obtengamos una distribución de sus valores futuros y el efecto sobre el excedente que servirá para tomar decisiones como la determinación y asignación de capital, estrategias de inversión, etc. Los modelos para analizar las series temporales se pueden clasificar en tres clases (véase por ejemplo Peña, 2005):

- Modelos univariantes: representan la evolución temporal de una serie en función de sus propios valores pasados para predecir su comportamiento futuro.
- Modelos multivariantes: representan conjuntamente la evolución temporal de una serie temporal multivariante en función de sus propios valores pasados para predecir su comportamiento futuro de forma simultánea.
- Modelos de regresión dinámica o modelos econométricos dinámicos: representan la evolución temporal de una serie en función de sus propios valores pasados y de la relación de dependencia dinámica entre dichos valores y un grupo de variables explicativas.

Estos tres tipos de modelos son candidatos a emplear en la modelización de los riesgos de renta variable, inmuebles y tipos de cambio. Antes de proceder a describir estos tres tipos de modelos es útil detallar las principales características de las series de rendimientos financieros.

### A. Características de las series de rendimientos financieros

Una serie temporal financiera univariante está compuesta por una serie de sucesivas observaciones a lo largo del tiempo del valor de un índice bursátil, cotización

de un activo financiero, tipo de cambio, etc.. Generalmente, en el campo financiero en vez de operar con los valores de la serie originales se emplean los rendimientos para obtener una serie estacionaria. Si las observaciones de una serie en los momentos  $t$  y  $t + 1$  son respectivamente  $P_t$  y  $P_{t+1}$ , el rendimiento compuesto continuo  $r_t$  (a veces denominado geométrico) vendrá dado por<sup>10</sup>:

$$r_t = \ln \frac{P_{t+1}}{P_t} = \ln P_{t+1} - \ln P_t$$

Además, el rendimiento suele ser expresado frecuentemente en tanto por ciento, por lo que los rendimientos que emplearemos para la modelización de las series financieras vendrán dados por la siguiente expresión:

$$r_t = 100 \ln \frac{P_{t+1}}{P_t} = 100[\ln P_{t+1} - \ln P_t]$$

Las series financieras temporales presentan características relevantes, como son:

- Exceso de curtosis (*excess kurtosis*) o colas gordas (*fat tails* o *leptokurtic*). Por tanto, la distribución de probabilidad de los rendimientos financieros posee colas gordas mayores que la normal (distribuciones leptocúrticas). Esta característica, es mencionada por primera vez por Mandelbrot (1963) y Fama (1963, 1965).
- Los rendimientos suelen tener una distribución de rendimientos bastante simétrica, pero a veces se obtienen distribuciones asimétricas negativas.
- En caso de analizar series financieras de baja frecuencia existe una correlación de los rendimientos a lo largo del tiempo (autocorrelación serial). Sin embargo en las series financieras de alta frecuencia se suele encontrar una ausencia o reducida estructura regular dinámica en la media. Los modelos ARMA modelizan de forma adecuada la posible dependencia de los rendimientos.
- Existencia de períodos de agrupamiento, persistencia o conglomerados de volatilidad (*volatility clusters* o *persistence*), lo cual se reflejará en las funciones de autocorrelación de los cuadrados de la serie. Si la volatilidad es elevada (baja) en un período, tiende a seguir siendo elevada (baja) en los períodos siguientes (Engle 1982), por lo que los efectos de un *shock* tardan en desaparecer. Por ejemplo, los modelos tipo GARCH o modelos de cambio de régimen son capaces de reproducir este fenómeno.
- De manera ocasional se pueden producir valores muy altos de volatilidad en determinados momentos, lo que se conoce como saltos discontinuos en los precios de los índices (*discontinuous price jump*) (Figlewski 1997). Esto motivaría la introducción de modelos de cambio de régimen, como por ejemplo los modelos de umbrales (TAR, etc.) o los modelos de cambio de régimen de Markov.

---

<sup>10</sup> Siendo menos frecuente emplear el rendimiento simple (periódico simple o aritmético) definido como:  $r_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1$ . La diferencia entre ambas tasas de rendimiento es normalmente pequeña. La relación existente entre ambas viene dada por la siguiente ecuación: *Rend. geométrico* =  $\ln(1 + \text{Rend. aritmético})$ .

- Comportamiento asimétrico de las series temporales o efecto apalancamiento. El comportamiento de las series de volatilidades es diferente según lleguen al mercado buenas o malas noticias (Campbell y Hentschel, 1992). Dado que las noticias no tienen el mismo impacto en el mercado se justifica el empleo de modelos asimétricos de volatilidad. Los modelos GARCH asimétricos son capaces de recoger esta propiedad.
- Movimientos conjuntos de volatilidad entre mercados. Los movimientos bruscos entre distintos mercados están fuertemente relacionados, lo que justifica la utilidad de los modelos multivariantes para series temporales, pues permiten analizar estas relaciones cruzadas. Entre los tipos de modelos multivariantes más empleados destacan los modelos de vectores autorregresivos y medias móvil VARMA, los modelos GARCH multivariantes o los modelos de cambio de régimen multivariante.

### *B. Modelos univariantes de series temporales*

La finalidad de los modelos univariantes de series temporales es analizar una serie temporal univariante para prever o simular su evolución futura utilizando tan sólo información sobre sus valores pasados. Por lo tanto, los objetivos son dos: elaborar un modelo estadístico que describa el comportamiento de la serie temporal e inferir su comportamiento futuro. Los principales modelos univariantes para la simulación de rendimientos de inmuebles, renta variable o divisas son: los modelos ARMA, los modelos tipo ARCH- GARCH, los modelos GARCH asimétricos, los modelos de volatilidad estocástica o SV, y los modelos no lineales (TAR, SETAR, modelos de cambio de régimen, etc.). A continuación, nos centraremos en los modelos que se han propuesto para la modelización de la renta variable en la industria aseguradora.

<b>Modelos ARMA</b>	
<p><b>Modelo autorregresivo de orden <math>p</math> AR(<math>p</math>)</b>            Establece dependencia entre los valores presentes y sus <math>p</math> valores pasados.</p>	$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ <p>Donde <math>\phi_i</math> son constantes y <math>\varepsilon_t</math> es un proceso ruido blanco con varianza <math>\sigma_\varepsilon^2</math> constante.</p>
<p><b>Modelo de media móvil de orden <math>q</math> MA(<math>q</math>)</b>            El valor actual de la serie depende de las <math>q</math> innovaciones anteriores.</p>	$y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$ <p>Donde <math>\theta_0</math> son constantes</p>
<p><b>Modelo ARMA (<math>p, q</math>)</b>            Combina las propiedades de un modelo AR (<math>p</math>) y MA(<math>q</math>)</p>	$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$
<b>Modelos no lineales</b>	
<p><b>Modelos autorregresivos por umbrales (<i>Threshold AutoRegresive</i> o TAR)</b>            Permite <math>k</math> estados donde para cada estado se establece un modelo lineal autorregresivo</p>	$y_t = \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i^{(1)} y_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} \text{ si } y_{t-d} \leq u_1$ $y_t = \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_i^{(2)} y_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} \text{ si } u_1 < y_{t-d} < u_2$ <p>...</p> $y_t = \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{p_k} \phi_i^{(k)} y_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} \text{ si } u_{k-1} < y_{t-d}$ <p>Donde <math>k</math> es el número de regímenes del modelo, <math>d</math> es un número entero conocido como el parámetro de retardo o <i>delay</i>, <math>p_i</math> es el orden autorregresivo en el régimen <math>i</math>-ésimo del modelo.</p>
<p><b>Modelos de cambio de régimen de Markov</b></p> <p><b>RSLN (<i>Regime-Switching Lognormal model</i>)</b>            En cada uno de los regímenes los rendimientos siguen un modelo normal independiente donde los parámetros son distintos para cada régimen <math>p_t</math></p> <p><b>RSDD (<i>Regime-Switching Draw-Down</i>)</b>            Extensión que considera reversión a la media</p>	<p style="text-align: center;"><b>RSLN</b></p> $y_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} \varepsilon_t$ <p style="text-align: center;"><b>RSSD</b></p> $y_t = \mu_{p_t} + k_{p_t} D_{t-1} + \sigma_{p_t} \varepsilon_t$ $D_t = \min(0, D_{t-1} + Y_t)$
<b>Modelos de heterocedasticidad condicional</b>	
<p><b>ARCH(<math>r</math>)</b>            La varianza condicional de una serie temporal depende del pasado con una estructura autorregresiva</p>	$y_t = \mu + z_t \sigma_t$ $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m y_{t-m}^2$ <p>Donde <math>z_t</math> es normalmente un ruido blanco</p>

El modelo de rendimientos normal, en el cual se basa el modelo estándar de Solvencia II, es de uso común en el ámbito financiero. Una aplicación interesante para el conjunto de activos financieros de una compañía de seguros puede verse en Schmeiser (2004). Este modelo, cuando se aplica a períodos largos, suele presentar colas menos gruesas que las que revelan los datos (Hardy, 2001). De ahí que su consideración dentro del modelo de Solvencia II pueda implicar una subestimación del riesgo realmente asumido. Una alternativa frecuentemente considerada para captar la mayor curtosis observada en los rendimientos de los activos financieros consiste en emplear una mixtura de dos o más distribuciones normales. Sin embargo, además del exceso de curtosis las series de rendimientos presentan otras propiedades como son la volatilidad no constante en el tiempo (heterocedasticidad) y la persistencia o conglomerados de volatilidad. Los modelos ARCH y GARCH modelizan de forma dinámica la propia varianza condicional en función de los valores pasados de la propia variable y fueron propuestos para explicar estas propiedades (Engle, 1982; Bollerslev, 1986). El modelo empleado con más frecuencia para modelizar las series financieras es el modelo GARCH (1,1), y una versión simplificada de dicho modelo viene dada por el modelo IGARCH(1,1) de Engle y Bollerslev (1986). Dichos procesos carecen de autocorrelación serial en la media. Sin embargo, en caso de que se detecte que los propios retardos de la variable de rendimientos o de las innovaciones pueden explicar su comportamiento, deben ser incorporados a la ecuación de la media dando lugar a los denominados modelos ARMA-GARCH. Los anteriores modelos tienen como principal ventaja la capacidad de generar clusters de volatilidad y distribuciones con colas gruesas. Sin embargo, una limitación es el impacto simétrico de los shocks positivos y negativos. De esta forma, la varianza condicional depende del tamaño de las innovaciones retardadas pero no de su signo. Para incorporar los denominados efectos apalancamiento (*leverage effect*) observados en la series financieras se han propuesto una amplia gama de modelos GARCH asimétricos, entre los que destacan el modelo GARCH exponencial o EGARCH (Nelson, 1991) y el GJR-GARCH (Glosten *et al.* 1993).

El modelo de cambio de régimen lognormal (RSLN), propuesto por Hardy (2001), utiliza una cadena de Markov que representa la evolución del estado de la economía, que puede estar en distintas situaciones denominadas regímenes. En cada uno de los regímenes los rendimientos siguen un modelo normal independiente con parámetros distintos. Hardy (2001) considera adecuado emplear 2 regímenes para las series utilizadas del TSE 300 y del S&P 500. Los regímenes se denominan de acuerdo a su varianza como régimen 1 o de baja volatilidad y régimen 2 o de alta volatilidad. Los resultados alcanzados por Hardy (2001) muestran que la deriva o rendimiento medio esperado en el régimen 1 es positivo, mientras que en el régimen de alta volatilidad es negativo. Panneton (2002, 2003, 2006) ha propuesto una extensión del modelo RSLN para tener en cuenta las características de reversión a la media de los rendimientos, el denominado *Regimen Switching Draw-Down* (RSSD). El modelo establece una mayor rentabilidad esperada para el siguiente periodo en la medida en que el valor del índice esté por debajo de su último valor máximo ( $D_t$ ). De esta forma  $D_t$  será negativa o cero, en el caso de que el mercado esté en un máximo o en el momento inicial. Es de esperar que los pará-

metros  $\varphi_a$  del modelo sean negativos para que se produzca la recuperación del mercado. Este modelo, si bien es muy parecido al RSLN, cuando se hacen proyecciones a largo plazo, tiende a generar una menor cola izquierda o riesgo dada la reversión de los rendimientos (Hardy *et al.*, 2006).

Recientemente se han producido desarrollos en los modelos GARCH de cambio de régimen (*Regime-Switching* GARCH o RS-GARCH) donde los parámetros del modelo cambian a partir de una matriz de “estado” o “régimen” de Markov. Estos modelos permiten que la volatilidad varíe dentro de cada uno de los distintos regímenes. El modelo GARCH de cambio de régimen presenta como inconveniente, frente a los modelos GARCH y RSLN, la mayor complejidad a la hora de estimarlo. Una simplificación sobre el modelo de cambio de régimen GARCH consistiría en establecer una mixtura de los procesos.

### C. Modelos de regresión dinámica

Un modelo de regresión dinámica es una representación de la relación existente entre varias series temporales. Por lo tanto, son la aplicación del modelo de regresión lineal a las series temporales. Es decir, un modelo de regresión lineal expresa la variable dependiente o endógena  $y_t$  en función de una o varias variable independientes o exógenas  $x_{it}$ :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_i x_{it} + \varepsilon_t$$

Donde  $\beta_i$  son constantes y  $\varepsilon_t$  son las innovaciones del modelo que siguen un proceso ruido blanco. Al intentar aplicar este modelo a series temporales que puede que tengan dependencia temporal encontramos los siguientes tres problemas (Peña, 2005):

- Puede que la relación entre la variable dependiente e independiente no sea instantánea, sino que puede transmitirse con cierto retardo.
- Supone implícitamente que la relación entre las dos variables es unidireccional, de forma que la variable independiente influye sobre la dependiente pero no viceversa. Cuando la causalidad sea bidireccional se tendrán que aplicar modelos multivariantes.
- El modelo de regresión lineal clásico supone que  $\varepsilon_t$  es un proceso formado por variables independientes, pero en la práctica puede que las innovaciones estén autocorrelacionadas.

Por lo tanto, un modelo de regresión dinámico con un único regresor establece una relación lineal unidireccional entre dos procesos estocásticos  $y_t$  y  $x_t$ , que viene dada por la siguiente ecuación:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \dots + \varepsilon_t$$

Siendo la relación instantánea entre las dos variables medida por el coeficiente  $\beta_1$ , mientras que  $\beta_2$  mediría la relación con un retardo, etc. La utilidad de los modelos

de regresión dinámica depende normalmente del intervalo temporal entre las observaciones. De esta forma cuanto menor sea dicho intervalo es más frecuente que los regresores  $x_{t-k}$  ( $k > 0$ ) afecten a la variable  $y_t$ . Si el intervalo temporal es grande (por ejemplo anual) la relación entre  $y_t$  y  $x_t$  no suele incluir retardos. Además, el anterior modelo en el que sólo existe una variable explicativa puede generalizarse incluyendo  $p$  variables explicativas mediante la siguiente expresión:

$$y_t = \beta_0 + \beta_{11}x_{1t} + \beta_{12}x_{1t-1} + \dots + \beta_{p1}x_{pt} + \beta_{p2}x_{pt-1} + \dots + \varepsilon_t$$

Este tipo de modelos son muy útiles en el desarrollo de aplicaciones DFA. De esta forma, para explicar y simular el comportamiento de una variable  $y_t$  se puede establecer un modelo en función de varias variables explicativas, de forma que haya una relación instantánea o con retardos. Además se pueden introducir en el modelo regresores, sean los propios valores retardados de la variable explicada ( $y_{t-i}$ ) o de las innovaciones ( $\varepsilon_{t-i}$ ) (modelos ARMAX). Finalmente, podemos investigar la presencia de heterocedasticidad condicional en el modelo (modelos ARMAX-GARCH) o incluso de efectos de apalancamiento o de cambio de régimen.

Este tipo de modelos han sido empleados en un contexto de DFA por Blum *et al.* (2001), Kaufmann *et al.* (2001) y el modelo DynaMo 3. Blum *et al.* (2001) establecen una regresión lineal múltiple para los tipos de cambio en el que éstos se generan a partir de los valores de la tasa de inflación y tipos de interés de distintas economías. Por otra parte Kaufmann *et al.* (2001) y el modelo DynaMo 3 establecen una regresión lineal entre los tipos de interés a corto plazo y las tasas de inflación. Para la modelización de la renta variable establecen el denominado modelo lineal, que no es más que una versión del CAPM en donde se correlaciona negativamente el cambio en los tipos de interés a la rentabilidad de las acciones<sup>11</sup>. El “modelo lineal” de rendimientos establece la siguiente dinámica para el precio de las acciones:

- La rentabilidad del mercado” se determina combinando el tipo de interés libre de riesgo con la prima de riesgo histórica de mercado:  $E(r_{M,t}) = R_{f,t} + P$  donde  $R_{f,t}$  es el rendimiento libre de riesgo y  $P$  es la prima de riesgo
- La rentabilidad del mercado “esperada”  $E^*(r_{M,t})$  se ajusta a los cambios recientes en el tipo de interés simulado y se añade un componente aleatorio que permite calcular la rentabilidad de la cartera de mercado:  $E^*(R_{M,t}) = E(R_{M,t}) + \{h \times (R_{f,t} - R_{f,t-1})\} + \varepsilon_t$  donde  $h$  es el coeficiente de regresión lineal entre la variación de los tipos de interés y la rentabilidad de las acciones y  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^A)$ .

<sup>11</sup> Ahlgrim *et al.* (2004a) comparan el “modelo lineal” con un modelo de cambio de régimen con dos posibles estados basado en la propuesta de Hardy (2001). En su estudio comprueban que la volatilidad de los rendimientos de las acciones es mayor que en la aproximación lineal, lo cual puede afectar a un asegurador que invierta un elevado porcentaje de su cartera en acciones.

- Puesto que no todas las carteras de los aseguradores tiene la misma sensibilidad a la rentabilidad total del mercado ( $\beta_i$ ), se estima la rentabilidad de la cartera del asegurador ( $R_{i,t}$ ) usando el modelo CAPM:  $R_{i,t} = R_{f,t} + \beta_i(R_{M,t} - R_{f,t})$
- De esta forma y resumiendo los pasos anteriores la rentabilidad de la cartera de renta variable viene dada por la siguiente ecuación<sup>12</sup>:

$$R_{i,t} = R_{f,t} + \beta_i(R_{f,t} + P + (h(R_{f,t} - R_{f,t-1}) + \varepsilon_t) - R_{f,t})$$

En Kaufmann *et al.* (2001) y el modelo DynaMo 3 las tasas de inflación en cada periodo ( $i_t$ ) se generan mediante una regresión lineal sobre los tipos de interés a corto plazo ( $r_t$ ) que generados por el modelo CIR-SR con término de constante ( $\beta_0$ ). Es decir:

$$i_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + \varepsilon_t$$

Donde  $\varepsilon_t$  es una serie de variables indepétiendes idénticamente distribuidas con media cero y varianza constantes<sup>13</sup>.

Blum *et al.* (2001) emplean un modelo de regresión múltiple dinámica sobre los tipos de cambio. De esta forma incorporan el riesgo en divisas al generador de escenarios del modelo Dynamo 3 para analizar decisiones, desarrollando una aplicación práctica para el caso del reaseguro. Los autores abordan dos tipos de modelos para la modelización del riesgo de cambio: modelos con fundamentos económicos y modelos estadísticos o econométricos. Dentro del primer tipo de modelos emplean la teoría de la paridad de compra, la cual supone que en mercados eficientes y sin costes de transporte ni impuestos, un mismo bien debe tener el mismo precio en distintas monedas. De esta forma proponen dos modelos que podrían provenir de esta teoría.

El primero modeliza el logaritmo del tipo de cambio<sup>14</sup> en cada momento temporal  $t$  entre las monedas X e Y ( $tc_t^{X/Y}$ ) mediante una regresión múltiple, en la cual hay una constante ( $\beta_0$ ) y dos regresores: la diferencia entre las tasas de inflación

<sup>12</sup> Esta rentabilidad anual calculada será la que determina el aumento de valor de la cartera previo a la reinversión, una vez descontado el valor de los dividendos. Por lo que en el caso de efectuar una simulación a lo largo de varios años se emplea la siguiente ecuación

$$VS_t = VS_{t-1}(1 + R_{i,t}) - D_{t-1} + R_t^{RV}$$

Donde  $VS_t$  es el valor de la cartera de acciones en el momento  $t$ ,  $D_{t-1}$  son los dividendos cobrados y  $R_t^{RV}$  es reinversión en renta variable en  $t$  como consecuencia de los flujos de caja positivos (los negativos acarrearán desinversión) del periodo.

<sup>13</sup> En principio emplean un ruido blanco gaussiano, pero nada impediría el empleo de, por ejemplo, variables distribuidas como la  $t$  de Student.

<sup>14</sup> Definido como el precio de una unidad monetaria del país Y en unidades monetarias del país X.

$(i_t^X - i_t^Y)$ , y la diferencia entre los tipos de interés  $(r_t^X - r_t^Y)$  entre los dos países<sup>15</sup>. Es decir<sup>16</sup>:

$$tc_t^{X/Y} = \beta_0 + \beta_1(i_t^X - i_t^Y) + \beta_2(r_t^X - r_t^Y) + \varepsilon_t^{X/Y}$$

O de forma alternativa regresar el tipo de cambio sobre los tipos de interés reales (diferencia entre los nominales y las tasas de inflación) de la economía:

$$tc_t^{X/Y} = \beta_0 + \beta_1(r_t^X - i_t^X) + \beta_2(r_t^Y - i_t^Y) + \varepsilon_t^{X/Y}$$

Los modelos estadísticos no tienen fundamentos económicos sino que intentan modelizar las características empíricas (propiedades y relaciones) observadas en los datos. Los autores proponen para modelizar la serie multivariante formada por los tipos de cambio, los tipos de interés y las tasas de inflación de los distintos países una técnica de regresión lineal múltiple en la que las tasas de inflación son generadas mediante regresión lineal simple a partir de los tipos de interés siendo estos generados mediante el modelo CIR- SR<sup>17</sup>. Por lo tanto aplican las fórmulas del modelo Dynamo para tipos e inflación de las distintas monedas y generan a partir de ellas el tipo de cambio mediante la siguiente regresión:

$$tc_t^{X/Y} = \beta_0 + \beta_1 i_t^X + \beta_2 i_t^Y + \beta_3 r_t^X + \beta_4 r_t^Y + \varepsilon_t^{X/Y}$$

Donde las constantes de la regresión  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  son específicas al tipo de cambio entre dos divisas al igual que la perturbación  $\varepsilon_t^{X/Y}$ <sup>18</sup>. Otra alternativa propuesta por los autores sería emplear un modelo VAR para la modelización puramente econométrica de la serie temporal multivariante compuesta por el tipo de cambio de entre dos monedas y las tasas de inflación y tipos de interés de cada una de ellas.

#### D. Modelos multivariantes

Con frecuencia nos encontramos con series financieras multivariantes. La interdependencia entre mercados (como es el caso de la cotización de índices, materias primas, etc.) o economías (tasas de inflación, tipos de interés, PIB, etc.) hace que las series no sean independientes entre sí, originando co-movimientos entre las

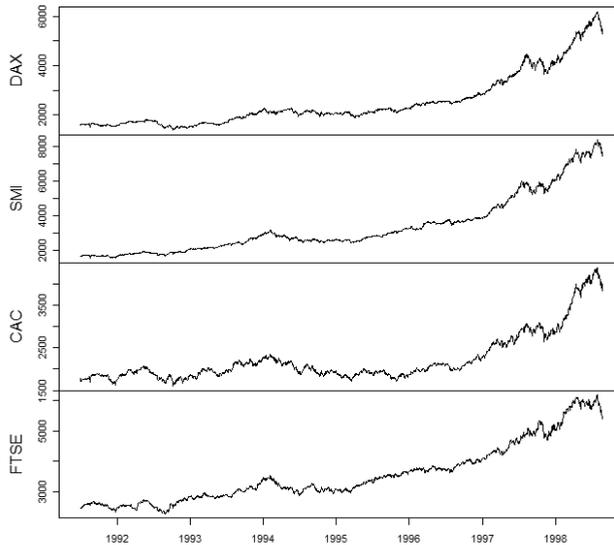
<sup>15</sup> Emplean una transformación logarítmica para las tasas de inflación  $I_t^X$  y tipos de interés  $R_t^X$ , es decir  $i_t^X = \log(1 + I_t^X/100)$  y  $r_t^X = \log(1 + R_t^X/100)$ .

<sup>16</sup> A la ecuación también se le podría añadir un proceso estocástico estacionario, como por ejemplo un componente AR, MA, etc.

<sup>17</sup> Además proponen establecer una estructura de dependencia entre países en las innovaciones del proceso de tipos CIR-SR, bien mediante el empleo de una distribución normal bivalente (Cholesky) bien mediante cópulas en el caso de que la dependencia sea más extrema en las colas. Para las perturbaciones del proceso de regresión lineal simple de la inflación no "correlacionan" los términos de error, sin embargo recomiendan emplear distribuciones con mayores colas (*t*-Student, et.) en el caso de que estos no sean gaussianos.

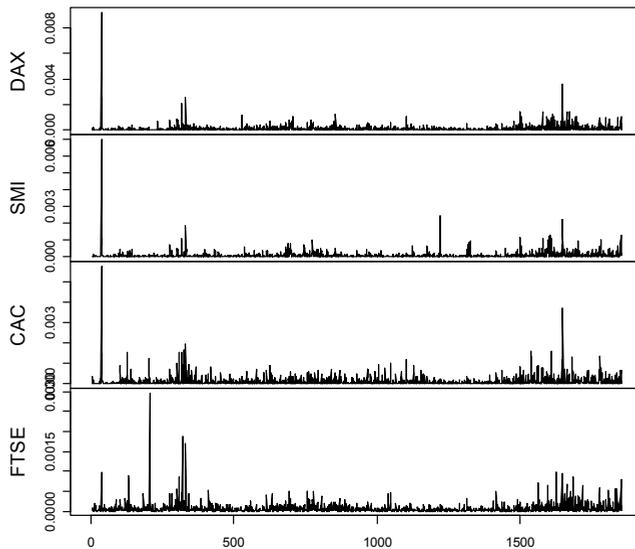
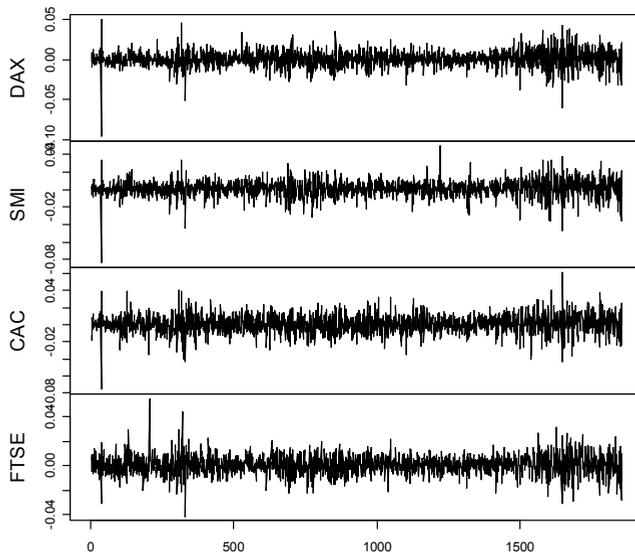
<sup>18</sup> Es una serie de variables independientes idénticamente distribuidas como una normal con media cero y desviación típica constante o *t* de Student.

series. El siguiente gráfico muestra los precios de cierre diario de los índices de acciones europeos DAX alemán, SMI suizo, CAC francés y el FTSE de Reino Unido entre 1991 y 1998. Por lo tanto representa una serie temporal multivariante con 1860 observaciones diarias<sup>19</sup>. Como se aprecia en dicho gráfico la interdependencia entre mercados es notable.



A continuación se muestra los rendimientos logarítmicos (gráfico izquierda) y los rendimientos logarítmicos al cuadrado (gráfico derecha). En general, tanto los agrupamientos de volatilidad como los rendimientos máximos y mínimos experimentados están altamente correlacionados entre los cuatro mercados. Se aprecia que han existido periodos en los que la dispersión de los rendimientos o volatilidad es mayor y otros en los que la dispersión es menor. Estos periodos están, quizá para el caso de FTSE en menor medida, altamente correlacionados entre los cuatro mercados.

<sup>19</sup> Los datos han sido obtenidos del paquete datasets de R desarrollado principalmente por R Development Core Team. Los datos originales han sido proporcionados por Erste Bank AG (Austria).



Los coeficientes de correlación simple entre los rendimientos de los cuatro índices confirman las anteriores apreciaciones gráficas. Dichos coeficientes se muestran en la siguiente tabla:

	<b>DAX</b>	<b>SMI</b>	<b>CAC</b>	<b>FTSE</b>
<b>DAX</b>	1,000	0,703	0,734	0,639
<b>SMI</b>	0,703	1,000	0,616	0,585
<b>CAC</b>	0,734	0,616	1,000	0,649
<b>FTSE</b>	0,639	0,585	0,649	1,000

La distribución normal multivariante es la extensión al campo multivariante de la distribución normal. Una distribución normal multivariante viene determinada por el vector de medias  $\mu$  y la matriz de varianzas covarianzas  $\Sigma$ . Del mismo modo también es común extender otras distribuciones al campo multivariante como la t de Student o las mixturas de distribuciones. A semejanza del caso univariante dichas distribuciones generan rendimientos independientes idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo, y en función de la distribución empleada, menores o mayores colas. Sin embargo, en el caso de que los rendimientos entre periodos no coincidentes no se consideren independientes puede ser adecuado introducir modelos multivariantes de series temporales de forma que se permita autocorrelación serial, heterocestascidad o mismo correlaciones entre los distintos rendimientos variantes en función del momento de tiempo. Por lo tanto, además de la correlación incondicional, los mercados de acciones internacionales están correlacionados condicionalmente, de forma que la correlación entre mercados es mayor ante períodos de alta volatilidad o caídas bruscas en los mercados (véase Ang y Chen, 2002, Longin y Solnik, 1995, Karolyi y Stulz, 1996).

Desde un punto de vista práctico en la gestión del riesgo de una compañía puede ser útil simular varias series de manera conjunta puesto que pueden estar relacionadas entre sí<sup>20</sup>. De esta forma, los rendimientos en un mercado no solo dependen como en el caso univariante de sus valores y errores pasados (metodología ARMA) o de su volatilidad (metodología GARCH y SV), sino que también depende de los rendimientos de otros mercados. De esta forma surgen los modelos multivariantes: modelos VAR, VMA, VARMA, VEC, GARCH multivariantes, SV multivariantes, modelos de cambio de régimen multivariantes, etc. que modelizan conjuntamente la relación entre varias series temporales, es decir, entre los componentes de un vector de series temporales.

Bollerslev *et al.* (1988) propusieron de forma pionera una formulación muy general del modelo GARCH multivariante o MGARCH, el denominado modelo VECH o modelo sin restricciones a partir del cual se han ido desarrollando diversas variantes. Los principales modelos MGARCH son los denominados BEEK desarrollado en Engle y Kroner (1995) con las versiones escalares (Scalar VECH o SVECH) y

<sup>20</sup> Este procedimiento implica simular cada serie de forma correlacionada para posteriormente, y mediante las proporciones de cartera invertida en cada una de ellas, obtener la serie de rendimientos de nuestra cartera. Otra alternativa menos elegante consiste en obtener una serie univariante a partir de las series multivariantes mediante las proporciones de cartera y, simular así el comportamiento de esta última.

diagonales (Diagonal VECM o DVECM), el modelo CCC de Bollerslev (1990) y el modelo DCC de Engle (2002). Estos modelos GARCH multivariantes permiten estudiar las co-volatilidades entre las distintas series financieras temporales. Una alternativa a los modelos GARCH multivariantes o a los modelos de volatilidad estocástica son los modelos de cambio de régimen de Markov. Dichos modelos son ajustados y comparados para la determinación de las cargas de capital de un asegurador en Boudreault y Panneton (2009). El modelo RSLN de Hardy (2001) modeliza la rentabilidad de un activo o un índice como un modelo de cambio de régimen de Markov donde bajo cada uno de los regímenes la rentabilidad es gaussiana. Sin embargo, en la medida de que las compañías aseguradoras invierten en carteras de diversos índices correlacionados este modelo puede ser extendido al campo multivariante mediante un modelo MRSLN (*multivariate regime-switching lognormal model*). De esta forma en vez de una distribución normal univariante el modelo MRSLN está basado en una distribución normal multivariante con media  $U_{p_t}$  y matriz de varianzas-covarianzas  $\Sigma_{p_t}$ .

## 2.2. Ajuste de los modelos y agregación temporal

En este apartado analizaremos el procedimiento genérico para la estimación por máxima verosimilitud de los distintos modelos analizados, y se aborda el problema de la agregación temporal de los rendimientos continuos. Este problema surge debido a que los modelos son generalmente estimados usando una serie temporal formada por observaciones con una frecuencia inferior al periodo de simulación. Por lo tanto, habrá que agregar los rendimientos simulados (diarios, mensuales) para obtener la distribución de rendimientos deseada (normalmente anuales).

### A. Ajuste de modelos

La técnica más habitual para el ajuste de las series temporales es emplear la estimación por máxima verosimilitud (EMV), lo que requiere establecer a priori el tipo de distribución que sigue el término de error (innovación) del modelo<sup>21</sup>. En este apartado explicaremos cómo se procede al ajuste por máxima verosimilitud de los modelos lognormal y GARCH (1,1) para el caso univariante, ya que la mayor parte de modelos son versiones de éstos.

El modelo de precios lognormal, establece que los rendimientos siguen un modelo normal independiente de forma que:  $Y_t = \mu + \sigma Z_t$ , donde  $Z_t \sim N(0; 1)$  para  $t = 1, 2, \dots$ . La función de densidad de una distribución normal viene dada por:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  son la media y la varianza de dicha distribución.

La estimación por máximo verosimilitud de la distribución normal coincide por la estimación por el método de los momentos, por lo que se obtiene fácilmente a

<sup>21</sup> El estimador resultante es eficiente supuesto que la hipótesis acerca del tipo de distribución sea correcta. El método de quasi-máximo verosimilitud (QMV), frecuentemente empleado para los modelos de tipo GARCH, emplea errores estándares robustos para la inferencia. Otros métodos de estimación de estos modelos son el método de los momentos o métodos bayesianos.

partir de la media y la desviación estándar de los rendimientos del índice. Por lo tanto la EMV de la distribución normal sólo se realiza a efectos ilustrativos de cara a comprender el procedimiento para posteriormente aplicarlo a modelos más complejos. El valor de la función de log-verosimilitud de los rendimientos  $y_t$  se calcula mediante la siguiente expresión:

$$L(\theta) = -0,5 \ln(2\pi) - \ln(y) - 0,5 \left( \frac{y - \mu}{\sigma} \right)^2$$

Por lo tanto, la estimación MV consiste en obtener el vector de parámetros  $\theta = \{\mu, \sigma\}$  tal que maximicen la función de log-verosimilitud, o bien de forma alternativa y como es habitual en diversos paquetes informáticos que minimicen la función de log-verosimilitud con signo negativo. Los pasos para obtener los parámetros más verosímiles para un modelo dado y una serie temporal pueden sintetizarse en<sup>22</sup>:

- Transformar la serie original (índice, cotizaciones, etc.) en sus rendimientos logarítmicos.
- Establecer la función de log-verosimilitud del modelo.
- Establecer unos valores iniciales para el vector de parámetros  $\theta$  y las restricciones oportunas<sup>23</sup>.
- Maximizar el valor de la función de log-verosimilitud mediante un algoritmo iterativo cambiando el vector de parámetros  $\theta$ .
- Partir de unos valores iniciales diferentes del vector de parámetros  $\theta$  y verificar que se alcanza el mismo máximo. Este procedimiento intenta verificar para los modelos más complejos (con mayor número de parámetros) que se ha logrado alcanzar el máximo global de la función objetivo y no un óptimo local.

A continuación mostraremos cómo realizar la estimación por máxima verosimilitud del modelo GARCH(1,1) con innovaciones normales. Dicha estimación se basa en la inferencia del proceso de innovaciones o residuos mediante una transformación de los procesos  $\varepsilon_t$  observados en un proceso ruido blanco no correlacionado  $z_t$ . La función de log-verosimilitud emplea las innovaciones  $z_t$  para inferir las correspondientes varianzas condicionales  $\sigma_t^2$  mediante sustitución repetida. Se puede emplear las innovaciones inferidas  $z_t$  y las varianzas condicionales  $\sigma_t^2$  para maxi-

<sup>22</sup> Formalmente para estimar por máxima verosimilitud deberíamos derivar el logaritmo de la función de verosimilitud. Para obtener el valor de los parámetros que hacen máximo el valor de la función se recurre a la condición de primer orden, que establece que se deben igualar a cero cada una de las derivadas de la función objetivo. Resolviendo dicho sistema de ecuaciones obtendríamos los valores de los parámetros del modelo. Las condiciones de segundo orden establecen que el hessiano o segundas derivadas parciales de  $L(\theta)$  debe ser definido positivo en el vector de parámetros  $\theta$  de la solución al sistema. Además, debe verificarse que la función sea globalmente cóncava. El empleo de un algoritmo iterativo o numérico de optimización reside en que generalmente el sistema de ecuaciones anterior no tiene solución analítica.

<sup>23</sup> Por ejemplo, la desviación típica de una distribución normal no puede ser negativa, etc. También debe programarse la variación en el vector de parámetros.

mizar la función de versosimilitud. De esta forma, la función de log-verosimilitud de un modelo GARCH (1,1) con una distribución normal (distribución estándar o clásica de los modelos GARCH) y empleando que  $\varepsilon_t = z_t \sigma_t$  es igual a:

$$l(\Theta) = \ln \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-(\varepsilon_t^2/2\sigma_t^2)} = \ln \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{-(z_t^2/2)} = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2 + z_t^2)$$

### B. Agregación temporal o escalabilidad (scalability)

La agregación temporal o cambios de escala de los rendimientos continuos (Klein, 2002; Chan *et al.*, 2008; Chan *et al.*, 2009) surge cuando los modelos se han estimado a la serie de rendimientos logarítmicos a una frecuencia inferior, por ejemplo mensual, a la que se debe calcular el capital necesario para soportar el riesgo de renta variable bajo Solvencia II (anual). Para analizar el problema de la agregación temporal es útil definir el concepto de factor de acumulación  $A_T$ .

Sea  $P_t$  el valor mensual una serie temporal sin transformar (por ejemplo, serie del índice Ibex35) en el momento  $t$ , para  $t = 0, 1, \dots, n$  y definamos el rendimiento logarítmico para el mes  $t$ -ésimo como  $y_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ . La serie de rendimientos logarítmicos para el mes  $m$  se puede construir como  $Y_T = \ln \frac{P_{mT}}{P_{m(T-1)}} = \sum_{t=m(T-1)+1}^{mT} y_t$  para  $T = 1, 2, \dots, N$  siendo  $N = [n/m]$  un número entero. Se puede definir el factor de acumulación  $A_T$  o ratio de crecimiento del valor de mercado del índice como  $A_T = \frac{P_{mT}}{P_{m(T-1)}} = \exp(Y_T)$ . Por lo tanto, el factor de acumulación a un año ( $m = 12$ ) a partir de rendimientos logarítmicos mensuales se puede obtener fácilmente mediante  $A_{12} = \exp(y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \dots + y_{t+11})$  y de esta forma el valor del índice en el mes 12, es decir al cabo de un año, es igual a  $P_{12} = P_0 A_{12}$ .

### 2.3. Determinación del capital necesario a través de modelos alternativos al estándar

El riesgo de inversión en renta variable, objeto de este trabajo, se incluye dentro del módulo de mercado y de acuerdo con la Directiva sobre Solvencia II mide la sensibilidad del valor de los activos, los pasivos y los instrumentos financieros ante variaciones en el nivel o la volatilidad de los precios de mercado de las acciones.

El modelo de rendimientos normal, implícito en el cálculo de la fórmula estándar de QIS4, ha sido elegido por razones de simplicidad y transparencia. No obstante, la hipótesis de normalidad puede subestimar la cola de la distribución de pérdidas (resultados extremos) y no capturar la variabilidad que puede presentar la volatilidad, por lo que es menos apropiado para representar períodos temporales más largos (Hardy, 2001), que es a los que está expuesto el asegurador. La posibilidad de utilizar modelos internos para la determinación de las necesidades de capital,

ha despertado el interés por el diseño y la selección de modelos que midan de forma más adecuada el riesgo de *equity* que asumen las compañías de seguros.

En este apartado se pretende evaluar el cálculo de las necesidades de capital asociadas a la inversión en renta variable, a través de modelos alternativos al estándar. En concreto se consideran dentro de este estudio, el modelo lognormal, la mixtura de distribuciones normales y el modelo RSLN. Los distintos modelos han sido calibrados a la serie mensual del IBEX-35 entre Enero de 1992 y Diciembre de 2008, y comparados a través de diferentes criterios que muestran el grado de adecuación a las series históricas y a la cola de la distribución de pérdidas. Además esta metodología puede ser replicada para el riesgo de tipos de cambio y el derivado de la inversión en propiedades inmobiliarias.

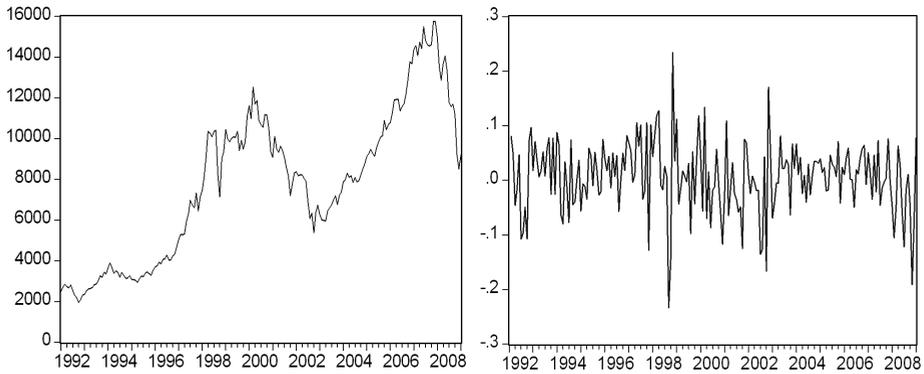
### A. Modelos para el riesgo de renta variable

En este apartado exponemos brevemente los modelos que han sido objeto de análisis, ajuste a los datos de mercado y posterior simulación. En el mismo se incluyen el modelo lognormal, la mixtura de normales y el modelo RSLN

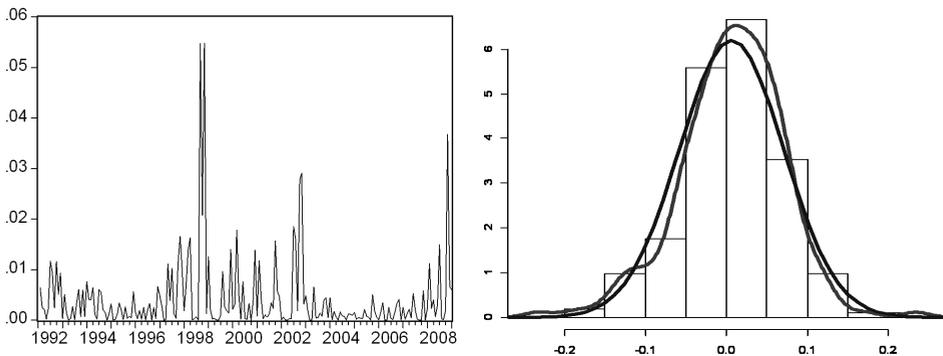
Modelo	Especificación
Normal	$y_t = \mu + \sigma Z_t$
Mixtura de $k$ normales	$y_t = \sum_{i=1}^k p_i(\mu_i + \sigma_i Z_t); k = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^k p_i = 1$
RSLN ( $k$ regímenes)	$y_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} Z_t; (p_t = 1, \dots, k)$

### B. Análisis empírico de la serie analizada

La muestra empleada para calibrar el riesgo de inversión en renta variable es el IBEX-35 para el período Enero de 1992 a Diciembre de 2008 aportados por BME, por ser un índice de referencia para los aseguradores españoles. Dado que las compañías aseguradoras deben velar por los intereses de sus asegurados a medio y largo plazo, es común que los modelos de *equity* diseñados en el ámbito asegurador empleen una frecuencia mensual de la muestra [véase los trabajos de Hardy (2001), Panneton (2003), Wong y Chan (2005), Hardy et al. (2006) o Boudreault y Panneton (2009)], e incluso el CEIOPS ha calibrado el modelo estándar de solvencia europeo (QIS3 y QIS4) empleando una frecuencia trimestral. A continuación se recoge la evolución mensual del índice (izquierda) y de los rendimientos logarítmicos (derecha). Si las observaciones de la serie IBEX-35 en los momentos  $t$  y  $t - 1$  son respectivamente  $P_t$  y  $P_{t-1}$ , el rendimiento compuesto continuo o logarítmico  $r_t$  vendrá dado por  $r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ .

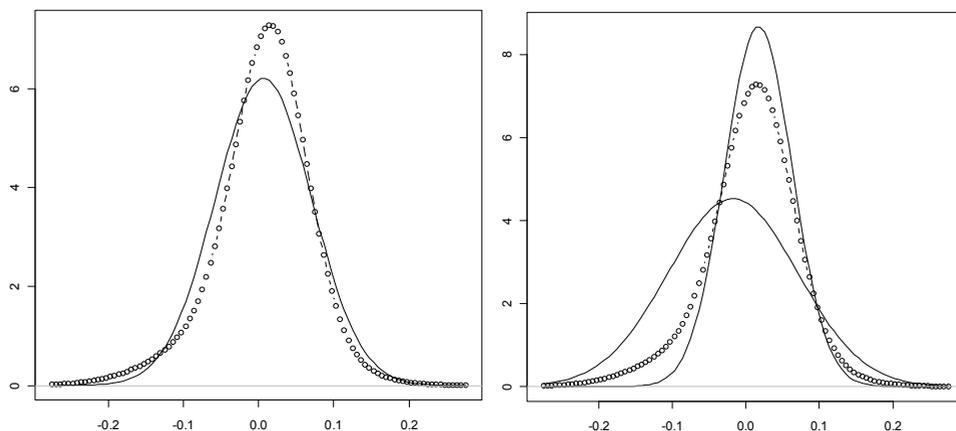


La serie analizada es claramente no estacionaria, sin embargo, no ocurre lo mismo cuando se utilizan rendimientos logarítmicos. Los rendimientos son estacionarios en media, pero presentan *clusters* o agrupamientos de volatilidad. Por esta razón, es importante determinar cuál es el modelo que mejor se ajusta al comportamiento de la varianza a lo largo del tiempo. La presencia de conglomerados en la volatilidad también se aprecia en el gráfico del cuadrado de los rendimientos logarítmicos. Dicho gráfico se muestra a continuación (gráfico izquierda), en donde también se representa el histograma de los rendimientos, junto con la estimación Kernel de su densidad y una densidad Normal con su misma media y varianza. Se observa como la distribución de los rendimientos mensuales es asimétrica y presenta un exceso de curtosis que llevan a rechazar la hipótesis de normalidad con la que trabaja el CEIOPS.



A continuación se muestra en el gráfico de la izquierda la distribución normal (curva líneas) resultante del ajuste frente a la distribución mixtura de dos normales (curva de líneas y puntos). Como se aprecia en dicho gráfico la mixtura de dos normales pone un mayor énfasis en la cola izquierda de la distribución, que es la cola relevante para los requerimientos de capital, ya que es la que provoca las

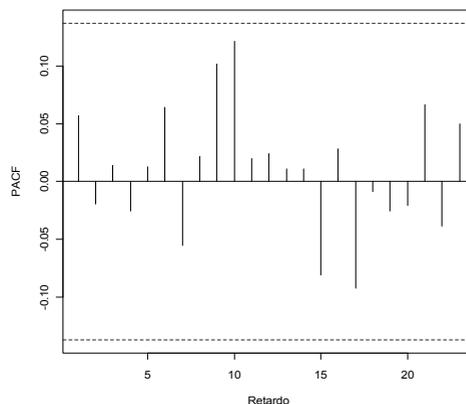
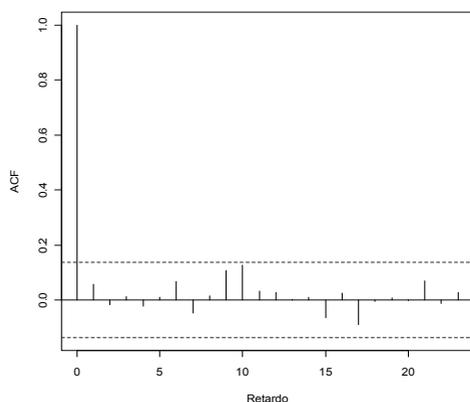
asignaciones de capital mediante el VaR o TVaR. En el gráfico de la derecha se muestran las dos distribuciones normales (curvas líneas) cuya probabilidad se pondera y la mixtura resultante (curva de líneas y puntos).



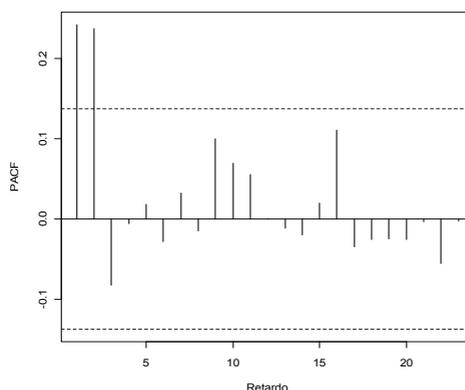
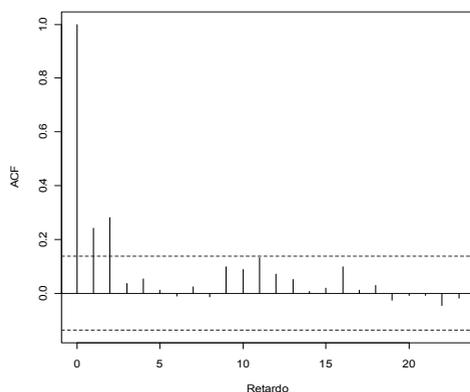
En la siguiente tabla se muestran los principales estadísticos resumen de los rendimientos logarítmicos mensuales de la serie analizada, donde se puede observar el exceso de curtosis y el rechazo de la hipótesis de normalidad medida a través del test de Jarque-Bera.

Estadística	Valor
Media	6,37e-03
Máximo	0,23
Mínimo	-0,23
Desviación típica	0,06
Sesgo	-0,38
Curtosis	4,33
Jarque-Bera	19,96
Probabilidad	4,60e-05

En la función de autocorrelación simple (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF) de los rendimientos, representadas en el gráfico siguiente, no se observa autocorrelación lineal entre las observaciones de las rentabilidades del IBEX-35 en los diferentes desfases o retardos temporales.



Sin embargo, la función de autocorrelación simple (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF)<sup>24</sup> de los rendimientos al cuadrado, representadas a continuación, muestran una fuerte estructura de dependencia, lo cual implica la existencia de dependencia en la varianza de los rendimientos mensuales.



### C. Estimación y comparación de modelos

En este apartado exponemos los resultados de la estimación de los modelos a partir de la serie analizada, así como la comparación de los mismos a partir de diferentes criterios estadísticos. A continuación recogemos los parámetros que resultan de la estimación por máxima verosimilitud de los distintos modelos anali-

<sup>24</sup> La función de autocorrelación (ACF) mide la dependencia lineal o correlación existente entre los periodos de un proceso, y viene dada por:  $\rho_k = \text{corr}(x_t, x_{t-k}) = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(x_t)}\sqrt{\text{var}(x_{t-k})}}$ . Por lo que una serie no estará correlacionada si los valores de su función son iguales o cercanos a 0. La función de autocorrelación parcial es una función que para cada número entero  $k$  toma un valor igual a la correlación entre  $x_t$  y  $x_{t-k}$  corregida del efecto común de los retardos intermedios  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k+1}$ .

zados. El modelo RSLN de 2 regímenes (RSLN2), al igual que ocurre con los resultados obtenidos por Hardy (2001), proporciona un régimen estable donde la rentabilidad esperada es positiva y otro más volátil con una rentabilidad esperada negativa.

Modelo	Parámetros		
Normal		$\mu = 6,37e-03$	$\sigma = 0,06$
Mixtura 2 normales	$p = 0,69$	$\mu_1 = 0,02$ $\mu_2 = -0,02$	$\sigma_1 = 0,05$ $\sigma_2 = 0,09$
RSLN2	$p_{1,2} = 0,04$ $p_{2,1} = 0,05$	$\mu_1 = -0,01$ $\mu_2 = 0,02$	$\sigma_1 = 0,08$ $\sigma_2 = 0,04$

La selección entre los modelos suele realizarse utilizando el principio de parsimonia, es decir, que será preferible un modelo más sencillo a otro más complejo siempre y cuando el ajuste a los datos históricos sea similar. En el caso de que los modelos tengan el mismo número de parámetros, se suele utilizar como criterio de comparación el valor de la función de verosimilitud. Si por el contrario, los modelos presentan un número diferente de parámetros, será preciso utilizar criterios que tengan en consideración este aspecto. En concreto, en este apartado se tienen en cuenta los criterios AIC (*Akaike information criteria*) propuesto por Akaike (1973), el SBC o SC (*Schwarz criteria*) propuesto por Schwarz (1978) y el test de la razón de verosimilitud (LRT). El test de la ratio o razón de verosimilitud (véase por ejemplo Klugman *et al.*, 2008a) se puede emplear para comparar distintos modelos en el caso de que estos se consideren versiones reducidas o casos especiales de modelos más complejos.

Modelo	Nº parámetros ( $k_j$ )	Log L ( $l_j$ )	AIC	SBC	LRT ( $p$ -valor)
Normal	2	270,72	268,72	265,40	6,05e-07
Mixtura 2 normales	5	276,94	271,94	263,64	2,72e-06
RSLN2	6	287,94	281,94	271,99	

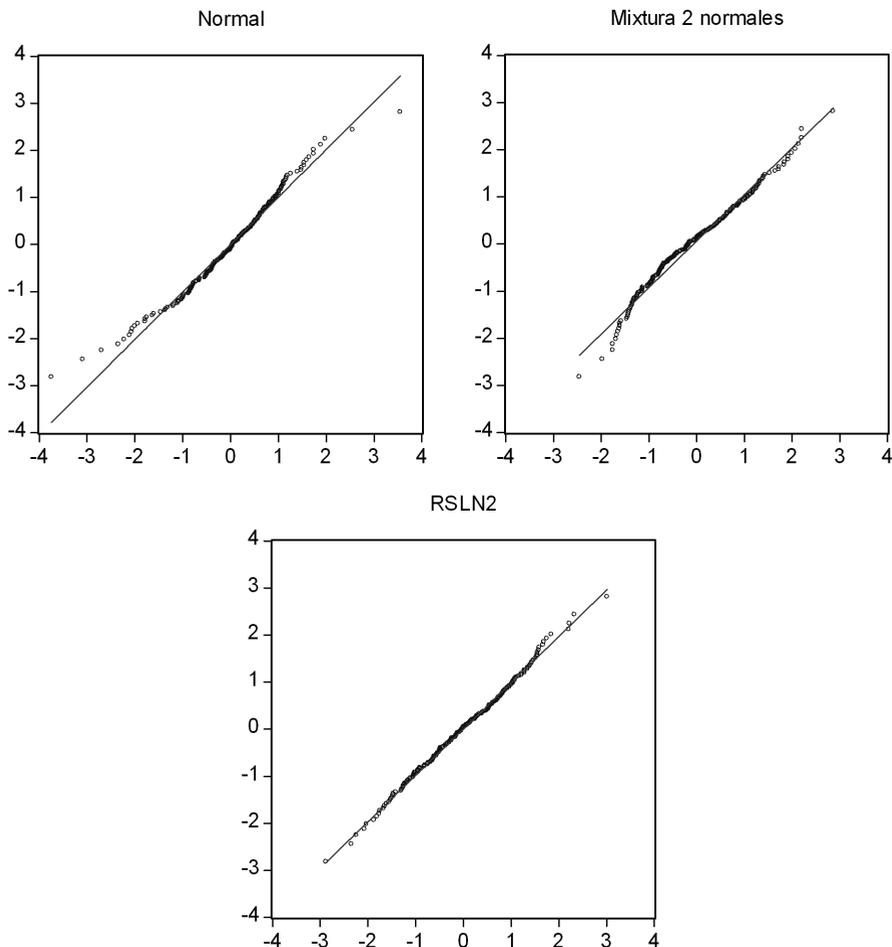
Dado que el presente trabajo tiene por objetivo el análisis del riesgo de *equity*, la selección de los modelos fundamentada exclusivamente en criterios basados en los valores de la función de verosimilitud puede no ser adecuada. En este sentido, podría ocurrir que los modelos con mayores valores proporcionen un buen ajuste global pero no a los valores extremos, que sin embargo son determinantes para el cálculo del capital necesario. Bajo estos modelos los datos atípicos suelen ser considerados como *outliers*, pero desde el punto de vista de la gestión del riesgo tienen un significado crucial ya que determinan en gran medida las máximas pérdidas a las que está expuesta la compañía. Por tanto, se debe evaluar en qué medida los residuos superan el test de normalidad, especialmente en la cola iz-

quiera de la distribución. En el caso de que los residuos no sean normales, el ajuste proporcionado por el modelo no es adecuado. Sin embargo, para los modelos de cambio de régimen y de mixturas los residuos sólo son aproximadamente  $N(0; 1)$ , debido a la incertidumbre asociada al proceso de cambio de régimen o de mixtura. De esta forma, en cada periodo temporal se establece una probabilidad de pertenecer a cada submodelo de forma que los residuos deben ser determinados en función del submodelo con el que se presupone que fueron generados. Existen dos formas de determinar los residuos a partir de los residuos condicionales a cada régimen o mixtura. El primer método consiste en asignar los residuos a cada submodelo de acuerdo a su probabilidad condicional. La segunda consiste en asociar los residuos al submodelo con una mayor probabilidad asociada. En este trabajo, a semejanza de Hardy *et al.* (2006), se emplea los residuos generados por el submodelo con una mayor probabilidad asociada.

El análisis de normalidad se hace a través de cualquiera de los test tradicionales (gráficos QQ, gráficos PP, Test de Jarque Bera, Shapiro- Wilk, etc.). En el caso de que una de estas pruebas indique que el modelo no tenga residuos normales es indicativo de que el modelo no se ajusta bien a los datos, o en el caso de modelos de mixturas o de cambios de régimen que el efecto de la incertidumbre del submodelo es muy elevado. El estadístico del test de Jarque-Bera (Jarque y Bera, 1980, 1987) emplea la asimetría  $S$  y la curtosis  $C$  de los residuos y toma la expresión  $Q = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(C-3)^2}{4} \right)$ . Bajo la hipótesis de que los residuos son normales el estadístico  $Q$  tiene una distribución  $\chi^2$  con dos grados de libertad. A continuación se aprecia como el modelo normal no superan el test de normalidad de los residuos con un 99% de confianza. Al mismo tiempo, debe apreciarse la capacidad del modelo RSLN de Hardy (2001) para superar dicho test.

Modelo	JB	Prob
Normal	19,96	4,64e-05
Mixtura 2 normales	5,91	0,05
RSLN2	0,49	0,78

A continuación recogemos los diferentes gráficos QQ de los residuos para analizar en qué medida los datos empíricos de los residuos (eje horizontal) se ajustan a los teóricos de la distribución normal.



#### D. Capital resultante de los modelos

En este apartado vamos a comparar el capital resultante de utilizar los modelos lognormal, mixtura de normales y RSLN evaluados con anterioridad, frente a la carga establecida en el modelo estándar. En QIS4 la carga de capital para riesgo de inversión en renta variable se calcula asumiendo un shock del 32% de caída para las inversiones en índices de mercados desarrollados globales (países OCDE y EEE) y un 45% para el resto de mercados. Dichos factores permanecen inalterados desde la calibración efectuada en el tercer estudio de impacto cuantitativo (QIS3) y se alcanzó por el ajuste de los rendimientos medidos en términos nominales y netos de riesgo cambiario del índice global MSCI de mercados desarrollados para el período 1970-2005 (datos trimestrales).

A continuación exponemos el resultado de estimar el capital necesario para una cartera invertida en IBEX-35 mediante los distintos modelos analizados. Para ello se realizó una simulación de 100.000 escenarios a un año por el método Latino Hipercúbico. En la siguiente tabla se muestran los factores que resultarían de aplicar los diferentes modelos para un VaR (99,5%). Como puede observarse tales factores superan considerablemente a la cuantía establecida en el modelo estándar. Además, el modelo de rendimientos normales, implícito en el cálculo de capital de Solvencia II, subestima de forma considerable la cifra de capital respecto al resto de los modelos. Sin embargo, dicha diferencia puede venir derivada del distinto índice empleado y/o del horizonte temporal analizado. Por lo que centrándonos en la serie Ibox 35 podemos afirmar que el modelo de rentabilidad normal infravalora seriamente la carga de capital necesaria frente a los otros dos modelos que como hemos visto proporcionan un mejora ajuste a los datos históricos analizados<sup>25</sup>.

<b>Modelo</b>	<b>Factor equivalente a VaR (99,5%)</b>
Modelo estándar Solvencia II	-32,00%
Normal	-38,82%
RSLN2	-48,82%
Mixtura de 2 normales	-55,40%

### **3. MODELIZACIÓN DEL RIESGO DE TIPOS DE INTERÉS**

El riesgo de tipo de interés afecta a todos los activos y pasivos cuyo valor neto sea sensible a las variaciones en la estructura temporal y que no estén relacionados con pólizas en las que el tomador asuma el riesgo de inversión. En este apartado se describen las principales alternativas para la modelización de los tipos de interés al contado y de los tipos a plazo empleando los modelos estocásticos de tipos de interés más populares en el ámbito financiero.

#### **3.1. Introducción**

Tradicionalmente, las compañías de seguros no han prestado atención al riesgo de tipo de interés debido a que la tarificación de productos se producía desde un enfoque conservador o tradicional, al ofrecer a sus asegurados un tipo de interés bajo o incluso no considerando las rentas de inversión. De esta forma las compa-

<sup>25</sup> La metodología empleada por el CEIOPS para el cálculo del VaR consiste en asumir implícitamente que los precios están normalmente distribuidos lo que supone una mayor cola izquierda (riesgo) que la distribución lognormal. Dicha metodología aplicada a los datos evaluados en este trabajo proporciona una carga de capital de -47,45%, más en línea con los resultados obtenidos por los modelos más avanzados.

ñas tenían cierta seguridad en que podrían obtener el índice de la rentabilidad empleado en la tarificación. La hipótesis de tipos de interés fijos era una práctica aceptable durante los periodos en que los tipos de interés eran bajos y relativamente estables. Pero desde la década de los años 80 la volatilidad de los tipos de interés se ha incrementado notablemente y consecuentemente, la necesidad de evaluar y gestionar el riesgo de tipos de interés. Los cambios en tipos de interés pueden afectar a la solvencia de la compañía aseguradora porque sus activos y las pasivos están correlacionados con los movimientos de éstos. Ahlgrim (2001) afirma que las hipótesis sobre los tipos de interés son fundamentales para las empresas aseguradoras debido a dos motivos principalmente. El primero es que los tipos de interés son empleados para calcular las primas mediante el descuento de las obligaciones futuras y de esta forma establecer el valor económico de las provisiones. El segundo es que las compañías deben realizar un análisis determinando el capital necesario para soportar los riesgos inherentes a sus operaciones. Por lo tanto la generación de una amplia gama de escenarios económicos futuros de tipos de interés y la proyección del resultado obtenido por la compañía, permite determinar la sensibilidad de dicho resultado ante cambios en las hipótesis de los tipos empleadas (Ahlgrim, 2001).

Los aseguradores de no vida están expuestos al riesgo de tipos de interés en el activo, tanto en el valor de mercado de sus títulos como en la reinversión de los flujos que se generan. Por el lado de los pasivos, en la medida en que la inflación está correlacionada con los tipos de interés y los pagos futuros por siniestros recogidos en las provisiones están relacionados con la inflación, el valor de los pasivos varía con los tipos de interés. De esta forma un incremento en los tipos de interés podría dar como resultado la caída en el valor de mercado de los activos y una reducción del valor de los pasivos, pudiendo reducir el excedente de la compañía.

En el contexto del desarrollo de modelos internos a través de análisis financiero dinámico, los tipos de interés constituyen un factor muy relevante. De hecho, es frecuente el uso de una estructura de cascada para dotar de cierta correlación a las distintas variables del modelo. En este caso, el tipo de interés suele ser un inductor del modelo (factor de primer nivel), afectando a múltiples variables del mismo (véase, por ejemplo, D'Arcy, *et al.* 1997a, 1998; Kaufmann *et al.*, 2001; Ahlgrim *et al.* 2004b). La proyección de la curva de tipos de interés suele hacerse a través de alguno de los múltiples modelos que se han desarrollado en el ámbito financiero. Siguiendo a Rebonato (1998), el modelo seleccionado deberá considerar las principales características que se observan a nivel empírico:

- *La volatilidad de los tipos de interés varía con el vencimiento.* En particular, los tipos a largo plazo no varían tanto como los tipos a más corto plazo.
- *Los tipos de interés presentan reversión a la media.* Históricamente los aumentos del tipo de interés tienden a ser seguidos por disminuciones; inversamente, cuando los tipos caen, tienden a ser seguidos por aumentos.
- *Tipos de interés de diversa madurez se correlacionan imperfectamente.* El grado de correlación decrece a medida que los vencimientos están más alejados.

Esto quiere decir que están más correlacionados el tipo de interés a 6 meses con el tipo a un año que lo que están el tipo a 20 años con el tipo a 20 años y 6 meses.

- *La dispersión de los tipos a corto plazo debe ser consistente con nuestras expectativas de valores probables.* Los tipos nominales no deben ser negativos ni permitir valores extremadamente elevados.
- La volatilidad de los tipos a corto plazo carece de homocedasticidad. La volatilidad de los tipos de interés debe ser proporcional al nivel de los tipos (heterocedasticidad).

Ningún modelo captura todas las características mencionadas. Por tanto, uno de los primeros pasos al elegir un modelo de tipos de interés es entender cuáles de estas características son importantes en función de los objetivos que se persiguen con su uso.

### A. Modelos de tipos de interés

El análisis del riesgo de interés requiere el uso de un modelo que permita simular la dinámica de la curva de tipos de interés y el efecto sobre el excedente de las posiciones activas y pasivas. Los modelos generadores de tipos de interés que se pueden emplear en un contexto DFA pueden ser determinísticos o estocásticos. Los *modelos determinísticos* establecen los valores de los tipos de interés de forma prefijada o a priori. Es decir, es el usuario del modelo o el regulador el que establece los tipos de interés que se desean probar en el modelo. Su interés reside en evaluar el comportamiento de una compañía de seguros ante un conjunto reducido de escenarios predeterminados, siendo de gran utilidad en el análisis de escenarios de estrés. Frente a éstos, los *modelos estocásticos* generan los tipos de interés aleatoriamente sobre la base de una fórmula matemática. Estos modelos son de gran utilidad para evaluar el comportamiento de una compañía de seguros ante un conjunto muy amplio de escenarios futuros. Presentan como principal ventaja que gracias a la simulación estocástica de escenarios correlacionados, es fácil generar escenarios coherentes para las distintas variables. Obviamente, todo ello a costa de una mayor complejidad de implementación.

En el ámbito financiero se han propuesto múltiples alternativas que pueden ser utilizadas para analizar el riesgo de tipos de interés. Una clasificación habitual es aquella que distingue entre *modelos de equilibrio* y *modelos sin arbitraje* o *libres de arbitraje*<sup>26</sup>. Cada tipo de modelo tiene ventajas dependiendo de la finalidad con la que se desee utilizar. Para las proyecciones a largo plazo, las trayectorias de simulación de los modelos sin arbitraje pueden llegar a ser extremas, por lo que a priori no se recomienda su empleo para la simulación de escenarios económicos

---

<sup>26</sup> Para modelizar los tipos de interés a corto plazo pueden emplearse modelos lineales o no-lineales basados en series temporales (modelos ARMA, GARCH, SV, etc.). Sin embargo para la generación de escenarios económicos nos parece más adecuado el empleo de un modelo financiero de tipos de interés estocástico que genere la ETTI.

como en DFA. Sin embargo, si el objetivo del modelo de tipos fuese la valoración de distintos instrumentos este tipo de modelos serían los más adecuados.

Los *modelos de equilibrio* o endógenos se clasifican generalmente según el número de variables de estado entre modelos unifactoriales y modelos multifactoriales. Estos modelos asumen que el mercado está en equilibrio y se basan en hipótesis para los tipos de interés a corto plazo<sup>27</sup>, que se derivan generalmente de una serie de supuestos más generales sobre la economía, los factores que afectan a la estructura temporal de tipos de interés y sobre el proceso estocástico que siguen dichas variables. A partir de los supuestos realizados, se intenta explicar la estructura temporal de los tipos de interés, que está totalmente determinada por el valor de los parámetros del modelo, por lo que la ETTI es una variable endógena. El uso de modelos de equilibrio tiene como ventaja la mayor sencillez, pero eso a costa de la generación de curvas de interés que no son consistentes con las del mercado.

Los *modelos libres de arbitraje* o exógenos parten de la hipótesis de que no hay oportunidades de arbitraje en el mercado, es decir, no hay una estrategia financiera que sin asumir riesgo nos reporte una ganancia. En estos modelos se toma como dada la estructura temporal observada y, a partir de ella, se derivan los movimientos futuros de los tipos de interés de modo que no existan oportunidades de arbitraje. Trabajos representativos de este enfoque son Ho y Lee (1986), Hull y White (1990) y Heath *et al.* (1992) (modelo HJM) y Brace *et al.* (1997) o modelo BGM. La ventaja de estos modelos es su ajuste a la estructura de tipos existente en el mercado. Por contra, estos modelos son con frecuencia más difíciles de utilizar. Además en muchos modelos de estos modelos el tipo a plazo o *forward* desempeña un papel central en la trayectoria prevista de los tipos de interés a corto, por lo que dependiendo de la pendiente existente de la curva de tipos de interés, los tipos a plazo pueden comportarse de manera extraña. Para las curvas de tipos inclinadas, el tipo a plazo puede llegar a ser muy grande. Para las curvas invertidas, el tipo a plazo puede incluso llegar a ser negativo.

### B. ¿Qué modelo utilizar?

Son pocos los trabajos que han sido realizados para comparar que modelo se adapta mejor a la medición del riesgo de tipos de interés en el sector asegurador, de ahí que sea preciso investigar este asunto en mayor detalle. Los modelos internos DFA optan generalmente por el diseño de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés mediante el ajuste de los datos históricos a un modelo de tipos de interés. Ahlgrim *et al.* (1999) indican que los modelos libres de arbitraje pueden tender a niveles poco realistas, valores extraordinariamente altos o negativos, cuando se simulan sobre un período largo de tiempo. Por tanto, aunque los modelos libres de arbitraje son preferibles para valorar productos derivados y otros activos financieros, no son tan útiles para generar escenarios de tipo de interés a plazos largos. No obstante, estos problemas tradicionales son superados por el modelo BGM.

---

<sup>27</sup> Los modelos unifactoriales, y de otras variables de estado los modelos multifactoriales.

Dentro de los *modelos generales de equilibrio*, se debe determinar cuántos parámetros incluir. Los modelos se clasifican basados en el número de los factores que se permite variar, de forma que se habla de modelos uni y multifactoriales. Usar más parámetros aumenta obviamente la complejidad de un modelo, así que uno debe considerar si la complejidad agregada aporta suficientes ventajas. Los modelos de un factor tienen solamente una variable, generalmente el tipo de interés a corto plazo. Mientras, los modelos de dos factores permiten variar el tipo de interés a corto plazo y otro factor, generalmente la volatilidad o el tipo a medio o a largo plazo. Otros modelos permiten que tres o más factores varíen. En cuanto al número de factores, Ahlgrim (2001) llega a la conclusión de que un modelo de un factor es suficiente para un modelo DFA de una compañía aseguradora de no vida mientras que un modelo de más factores era más apropiado para un marco similar para un asegurador de vida, debido a que sus productos y su estructura financiera son más sensibles a las fluctuaciones de los tipos de interés. Introducir más factores posibilita una gama más completa de movimientos y formas de la curva, pero por contra aumenta rápidamente la complejidad y la manejabilidad del modelo. Dentro de los modelos de un factor, el propuesto por Cox *et al.* (1985b) o modelo CIR (1985b) es el que logra un mejor equilibrio entre complejidad y exactitud, tal y como indican D'Arcy *et al.* (1998), Ahlgrim *et al.* (1999) y Kaufmann *et al.* (2001). Por el contrario, Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004b) emplean un modelo de 2 factores de Vasicek

### C. Nomenclatura empleada

Ignorando impuestos y costes de transacción,  $P(t, T)$  representa el precio en el momento  $t$  de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria en el momento  $T$ . Por lo tanto se obtiene inmediatamente que,  $P(T, T) = 1$ . En el momento  $t$ , el rendimiento al vencimiento  $R(t, T)$  del bono anterior es la tasa de interés continuo a la que el precio del bono capitalizado es igual a 1 en el momento  $T$ , es decir  $P(t, T)e^{(T-t)R(t, T)} = 1$ . De forma que el rendimiento es:  $R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}$ . Para un período determinado de tiempo, la forma de  $R(t, T)$  a medida que se incrementa  $T$  determina la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI).

El tipo de interés *spot* o al contado es el tipo de interés que existe hoy en el mercado para un vencimiento determinado. Se denomina por  $r_t$  o  $r(t)$  el tipo de interés instantáneo libre de riesgo o tipo de interés a corto plazo y viene dado por  $r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$ .

Denotamos por  $f(t, T_1, T_2)$  el tipo *forward* o a plazo que es el tipo de interés aplicable a periodos futuros y viene dado por<sup>28</sup>  $R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T_1) - \ln P(t, T_2)}{T_2 - T_1}$ . El tipo de interés *forward* instantáneo  $f(t, T) \equiv f(t, T, T)$  es el tipo que se puede contratar en el momento  $t$  para un préstamo que comienza en el período  $T$  para un período

<sup>28</sup> El tipo forward o a plazo entre dos períodos consecutivos se puede calcular a partir de los tipos al contado. Por ejemplo, el tipo a plazo esperado ( $f$ ) entre el año 1 y el año 2, dados los tipos de interés al contado a 1 año ( $r_1$ ) y a 2 años ( $r_2$ ) se obtiene mediante la siguiente expresión:  $(1 + f) = (1 + r_2)^2 / (1 + r_1)$ .

instantáneo de tiempo  $f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=T} = -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T}$ . Por lo que podríamos definir el precio de un bono en términos de los tipos *forward* como  $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$ . Además nótese que  $f(t, t) = r_t$ .

El tipo a plazo para diferentes horizontes temporal constituye lo que denominamos ETTI o estructura temporal de los tipos de interés. La ETTI puede ser interpretada como la expectativa o estimación de los tipos de interés futuros a corto plazo. En principio las formas de las curvas ETTI pueden ser diversas debido a las expectativas de los agentes sobre la evolución de los tipos de interés a distintos plazos, las cuales suelen estar muy afectadas por las expectativas de inflación y de actividad económica, sin embargo es común caracterizarlas en: normal, planas, invertidas y con joroba<sup>29</sup>. Bajo una forma de curva normal los inversores no esperan grandes cambios en las políticas monetarias por lo que demandan mayores rendimientos para los instrumentos con mayor vencimiento. Esta es la situación habitual de los mercados en la medida en que los títulos de corto plazo son mantenidos por los inversores generalmente para soportar menos riesgo. Las curvas planas se interpretan como una mezcla de señales o indicadores de subida y de bajada de tipos por parte de los inversores. Las curvas invertidas se producen cuando los títulos de mayor vencimiento rinden menos que los de menor vencimiento. En esta circunstancia el mercado espera que los tipos de interés se vean reducidos en el futuro. Las curvas con jorobas se producen cuando la ETTI tiene pendiente positiva (curva normal) para los vencimientos más cercanos y pendiente negativa (curva invertida) para un mayor plazo.

### 3.2. Modelos de tipos de interés aplicables al análisis del riesgo en DFA

En este apartado vamos a introducir y clasificar los principales modelos que se pueden emplear en DFA. Sin embargo, dada la amplia gama de modelos existente y dado que el objetivo de este trabajo no es realizar una enumeración exhaustiva de los mismos sólo se contemplan los modelos más populares. Una revisión exhaustiva de los mismos puede encontrarse en Moreno (1997) o Gibson *et al.* (2001).

#### 3.2.1. Modelos de equilibrio de un factor

Los modelos de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) surgieron inicialmente para comprender las dinámicas de los precios de los bonos. Muchos

<sup>29</sup> Existen tres principales teorías para explicar las formas de las curvas de tipos a plazo: la teoría de las expectativas, la teoría de preferencia por la liquidez y la teoría del hábitat preferido. En base a la teoría de las expectativas los tipos *forward* son los estimadores insesgados de los tipos a corto plazo futuros y por lo tanto reflejan las expectativas de alzas/bajas en estos. Bajo la teoría de la liquidez los inversores son adversos al riesgo por lo que demandan primas para los mayores plazos ya que prefieren títulos a corto plazo. Finalmente, en la teoría del hábitat preferido se supone que prestamistas y prestatarios tienen distintos horizontes temporales preferidos por lo que los tipos de interés a cada plazo será el resultado de las distintas ofertas y demandas de fondos. Bajo esta última teoría la curva de tipos a plazo puede tener cualquier forma posible.

modelos de tipos de interés son modelos sencillos de la evolución estocástica de un tipo de interés, donde es habitual emplear el tipo a corto plazo. Este tipo de interés se define como markoviano, es decir, la evolución futura depende sólo de su valor inicial y no de su historia o trayectoria seguida hasta ese momento. Este es el tipo de modelos que veremos en este apartado.

Los modelos de equilibrio unifactoriales en tiempo continuo suponen generalmente que la única variable de estado relevante es el tipo de interés instantáneo  $r_t$ . Estos modelos de difusión parten generalmente de la siguiente ecuación diferencial estocástica (SDE):

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t) dW_t$$

Donde  $dr_t$  indica el cambio en el tipo de interés instantáneo,  $\mu(r_t)$  y  $\sigma(r_t)$  son las funciones de la deriva y la difusión del proceso estocástico y  $dW_t$  es un movimiento browniano. Bajo esta modelización, tanto la media condicional como la varianza condicional de los cambios en el tipo de interés instantáneo dependen del nivel de los tipos. La anterior ecuación puede reescribirse en función de los parámetros de los que dependen, generalmente las funciones de deriva y difusión,

$$dr_t = \mu(r_t, \theta)dt + \sigma(r_t, \theta) dW_t^{30}$$

La anterior ecuación engloba un amplio abanico de modelos según las distintas especificaciones concretas que proponga cada autor para la ecuación de la deriva  $\mu(r_t, \theta)$  y la difusión  $\sigma(r_t, \theta)$  del proceso. La deriva o *drift* representa la parte de los cambios en los tipos de interés determinista o predecible, por lo que a veces se denomina cambio esperado. La difusión representa la volatilidad de los cambios en los tipos de interés. Longstaff (1989) propone un modelo al que comúnmente se refiere como el modelo de la doble raíz cuadrada, ya que tanto la deriva como la difusión están en función de la raíz cuadrada del nivel de los tipos de interés. Chan *et al.* (1992) (de aquí en adelante CKLS, 1992) trabajan con un proceso cuya deriva es lineal y cuya difusión depende del nivel de los tipos de interés. Este proceso tiene como casos particulares varios de los modelos más empleados (Vasicek, 1977; Cox *et al.* 1985b; etc.) por lo que posteriormente será retomado en profundidad. Constantinides (1992) establece un proceso para los tipos de interés nominales en el que la deriva es una función no lineal del tipo de interés y en el que la volatilidad tiene reversión a la media. La versión unifactorial del modelo de Duffie y Kan (1996)<sup>31</sup> refleja que los tipos de interés presentan reversión a la media y que su volatilidad también tiende a largo plazo a un nivel constante. Por últi-

<sup>30</sup> Los modelos sin arbitraje como los modelos de Heath-Jarrow-Morton (1990, 1992) en vez de modelizar los tipos de interés a corto plazo modelizan los tipos *forward* o a plazo instantáneos  $f(t, T)$ . De esta forma, la modelización de la ETTI se realiza mediante el siguiente proceso para los tipos a plazo para todos los vencimientos  $df(t, T) = a(t, T, f(t, T))dt + \sigma(t, T, f(t, T)) dW_t$ , donde los términos  $a(t, T, f(t, T))$  y  $\sigma(t, T, f(t, T))$  son la deriva y la difusión del proceso respectivamente.

<sup>31</sup> Duffie y Kan (1996) proponen un modelo multifactorial, conocido como exponencial-afín, en el que las rentabilidades asociadas a unos bonos cupón cero con determinados vencimientos siguen un proceso multivariante markoviano con volatilidad estocástica.

mo, el modelo de Ait-Sahalia (1996)<sup>32</sup> supone un proceso con deriva y volatilidad no lineales. Las especificaciones de las funciones para la deriva y la difusión de los anteriores modelos se muestran en la siguiente tabla. Una breve descripción de estos modelos se puede encontrar en Moreno (2000).

Modelo	$\mu(r_t, \theta)$	$\sigma(r_t, \theta)$
Longstaff (1989)	$\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{r_t}$	$\beta_0 \sqrt{r_t}$
CKLS (1992)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t$	$\beta_0 r_t^\gamma$
Constantinides (1992)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 \sqrt{r_t - \alpha_3}$	$\beta_0 (r_t - \beta_1)$
Duffie y Kan (1996)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t$	$\sqrt{\beta_0 \beta_1 r_t}$
Ait-Sahalia (1996)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2 + \alpha_3 / r_t$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 r_t^\gamma$

Los modelos de un factor explicativo asumen que toda la información de la estructura de la curva de tipos puede ser resumida por un factor, normalmente el tipo de interés a corto plazo. Son muchos los modelos de tipos de interés continuos que se han construido en la literatura financiera. Nosotros vamos a centrarnos en los principales modelos dinámicos de un factor explicativo que se englobarían en el trabajo de CKLS (1992). Con las oportunas restricciones a este modelo general obtenemos en particular los modelos de Merton (1973); Vasicek (1977); Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1980), Cox *et al.* (1980), Cox *et al.* (1985b) y los denominados modelos GBM y CEV. Siguiendo a CKLS (1992) la *forma general* de estos modelos se describe en términos de cambio en los tipos a corto plazo en la forma  $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$ . Ecuación que podemos reescribir para darle un mayor sentido económico a sus parámetros como  $dr_t = -\beta \left( \frac{\alpha}{-\beta} - r_t \right) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$ .

Por lo que igualando  $\kappa = -\beta$  y  $\mu = \frac{\alpha}{-\beta}$  resulta:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$$

Donde:

- $dr_t$  es el cambio continuo en el nivel actual de los tipos a corto plazo.
- $\kappa$  es la velocidad de reversión a la media de los tipos a corto plazo.
- $\mu$  es el tipo al cual revierten los tipos de interés a corto plazo.
- $\sigma$  es la volatilidad (desviación estándar) de los tipos a corto.
- $\gamma$  es el exponente condicional de la volatilidad de los tipos.
- $W_t$  es un movimiento browniano estándar.

<sup>32</sup> El modelo de Ait-Sahalia (1996) englobaría al modelo de Chan *et al.* (1992) y por tanto a sus distintas versiones. Los resultados de su investigación muestran una fuerte no-linealidad de la deriva del proceso y un incremento de la volatilidad cuando los tipos de interés toman valores extremos.

La primera característica importante de este tipo de modelos es la reversión a la media. Esta característica presume que cuando los niveles de tipos de interés sean muy altos o muy bajos tenderán a invertirse a niveles "normales". Esta era una de las características que mencionábamos debiera cumplir un modelo de tipos de interés. Hull (1997) afirma la reversión de los tipos de interés tiene sólidos argumentos económicos a favor porque cuando los tipos de interés son altos (bajos), hay menos (más) demanda por parte de los prestatarios lo cual induce un descenso (aumento) en el valor de dichos tipos de interés. La velocidad de la reversión es determinada por el parámetro  $\kappa$  del modelo, por lo que afecta a la forma de la curva. Si su valor es alto, la curva tiende rápidamente hacia el tipo a largo  $\mu$ . Si  $\kappa$  toma un valor bajo, la curva tiende lentamente hacia ese nivel.

La forma general de CKLS (1992) agrupa un conjunto de modelos de tipos a corto plazo continuos unifactoriales que se resume en la siguiente tabla. Los modelos concretos se obtienen simplemente imponiendo restricciones sobre los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del modelo extendido de CKLS (1992).

Modelo	Restricciones			Fórmula
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
CKLS (1992)	Sin restricciones			$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$
Merton (1973)	1	0	0	$dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t$
Vasicek (1977)	1	1	0	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma dW_t$
CIR (1985b) o CIR SR	1	1	1/2	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Dothan (1978)	0	0	1	$dr_t = \sigma r_t dW_t$
Black y Scholes (1973)	0		1	$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t dW_t$
Brennan y Schwartz (1980)	1	1	1	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
CIR (1980) o CIR VR	0	0	3/2	$dr_t = \sigma r_t^{3/2} dW_t$
CEV	0	1		$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$

Merton (1973) fue el primer autor en proponer un proceso general estocástico como modelo para el tipo de interés. De esta forma, el tipo de interés instantáneo libre de riesgo se comporta de acuerdo a un proceso browniano aritmético. En la nomenclatura empleada en CKLS (1992) esto supone que  $\beta = 0$  y  $\gamma = 0$ , por lo que  $dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t$ . En el modelo reescrito en términos económicos  $\mu = 0$  y  $\gamma = 0$ , es decir  $dr_t = \kappa r_t dt + \sigma dW_t$ . Por tanto, el modelo de Merton no presenta reversión a la media y supone que la volatilidad condicional de los cambios en los tipos de interés es constante, cuestión fuertemente discutida al observar la serie de datos históricos de los tipos. El modelo de Merton tiene fórmula analítica para la estructura temporal de los tipos de interés, que viene dada por la suma del tipo de interés a corto plazo y una función cuadrática del tiempo al vencimiento:

$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} = r_t + \frac{(T-t)\mu}{2} - \frac{(T-t)^2\sigma^2}{6}$ <sup>33</sup>. La anterior fórmula implica que los cambios en los tipos de interés a corto plazo resultarán en cambios paralelos en la ETTI. Además, la forma de la curva puede ser con joroba o invertida no pudiendo ser normal por lo que es un modelo muy restringido (Gibson *et al.* 2001).

El modelo de Vasicek (1977) supone un modelo Ornstein-Uhlenbeck, por lo que agrega al modelo de Merton otra variable explicativa, la media a la cual el tipo revierte. Por lo tanto la restricción que este modelo impone a la fórmula de CKLS (1992) es que el exponente condicional de la volatilidad es igual a cero ( $\gamma = 0$ ) obteniéndose  $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma dW_t$ . El modelo reescrito en términos económicos se convierte en  $dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$ . El modelo de Vasicek (1977) asume que los cambios absolutos en los tipos de interés están distribuidos normalmente, por lo que proporciona una probabilidad positiva de que los tipos de interés sean negativos. Otro defecto del modelo de Vasicek es que implica, al igual que el modelo de Merton, que la volatilidad condicional de los cambios en el tipo de interés es constante. CKLS (1992) ilustran que la hipótesis de la volatilidad constante es cuestionable, de hecho los autores estiman que el parámetro  $\gamma$  es próximo a 1,5. La relación entre la volatilidad del tipo de interés y el nivel de éste implica que el modelo de Vasicek al igual que el de Merton puede proporcionar pronósticos poco realistas de los tipos de interés a corto plazo. Cuando los tipos de interés son bajos estos modelos exageran la volatilidad, y cuando los tipos son altos minimizan la volatilidad.

El modelo de Cox *et al.* (1985b), CIR (1985b), CIR-SR o “proceso de la raíz cuadrada” relaciona la volatilidad de los tipos de interés con la raíz cuadrada de su nivel actual. Es decir la restricción que se impone en la fórmula general de CKLS (1992) es que  $\gamma = 1/2$  por lo que se obtiene  $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$ <sup>34</sup>. El modelo reescrito en términos económicos es  $dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$ .

Dothan (1978) presenta un modelo en el que  $r_t$  se comporta como un movimiento browniano geométrico (GBM) sin deriva, por lo que el tipo de interés esta lognormal-

<sup>33</sup> En realidad todos los modelos de equilibrio fueron diseñados y empleados originalmente para valorar productos relacionados con los tipos de interés (bonos, derivados, etc.) por lo que es necesario añadir una prima de riesgo, que en función del modelo de equilibrio analizado es constante  $\lambda$  o dependiente del tiempo  $\lambda(t)$ . Esto es una desventaja de los modelos de equilibrio, ya que para valorar los títulos dependientes de los tipos de interés exige una estimación de la aversión del riesgo de los individuos. Los modelos libres de arbitraje no necesitan la estimación de dicha prima de riesgo lo que supone una ventaja frente a los anteriores. Sin embargo, en el contexto de DFA la principal utilidad de emplear modelos estocásticos de tipos de interés no es la valoración sino la generación de múltiples curvas de tipos realistas en base a las cuales evaluar el riesgo de la compañía. Esta es la razón por la que obviamos la prima de riesgo que provoca alteraciones en la función de la ETTI detallada. Es decir, de aquí en adelante supondremos que  $\lambda = 0$  para todos los modelos para los cuales se detalle la forma analítica de la ETTI. A modo de ejemplo, la forma exacta del modelo de Merton que supone una prima de riesgo constante es:  $R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} = r_t + \frac{(T-t)(\mu - \lambda\sigma)}{2} - \frac{(T-t)^2\sigma^2}{6}$ . Fijar la prima de riesgo en cero implica suponer un mundo neutral al riesgo.

<sup>34</sup> El tipo de interés a corto plazo  $r_t$  está distribuido como una chi-cuadrado no centrada.

mente distribuido y por tanto no puede ser negativo<sup>35</sup>. Las restricciones del modelo de Dothan en relación al modelo general de CKLS (1992) son  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1$ , por lo que se obtiene  $dr_t = \sigma r_t dW_t$ . El modelo reescrito en términos económicos es por tanto  $dr_t = \sigma r_t dW_t$ . En este modelo se asume que  $r_t$  es positiva con total probabilidad y se distribuye como una variable lognormal. Debido a que el exponente de la volatilidad en este modelo es más alto que en los modelos anteriores, el modelo relaciona la volatilidad de los movimientos del tipo de interés a corto plazo de forma más fuerte a su nivel. La obtención de la ETTI del modelo de Dothan es más difícil de poner en ejecución en la práctica porque no hay fórmula analítica cerrada, como en el Vasicek y CIR-SR, por lo que se debe recurrir a la simulación. Esta es posiblemente la razón por la que no ha sido un modelo popular. Además, Courtadon (1982) ha demostrado que este modelo es inadecuado para representar el comportamiento de los tipos de interés a largo plazo, ya que el límite cuando  $t$  tiende a infinito de  $r_t$  es cero.

Otro modelo es el propuesto por Black y Scholes (1973)<sup>36</sup> en su trabajo pionero en valoración de opciones sobre acciones. En este modelo se representa el cambio en el tipo de interés mediante un movimiento browniano geométrico con parámetros de deriva y difusión constantes. Este modelo es un caso particular de Brennan y Schwartz (1980) y englobaría el modelo de Dothan (1978) al que añade la deriva. Las restricciones de este modelo en relación al modelo general de CKLS (1992) son  $\alpha = 0$  y  $\gamma = 1$ , por lo que resulta  $dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t dW_t$ . Siendo el modelo reescrito en términos económicos  $dr_t = \kappa r_t dt + \sigma r_t dW_t$ .

Brennan y Schwartz (1980) emplean un modelo para el tipo de interés instantáneo que refleja reversión a la media, y al igual que Black y Scholes (1973) y Dothan (1978) establece que la desviación típica de los cambios en los tipos de interés es proporcional al nivel de dichos tipos de interés. Por tanto este modelo simplemente añade al modelo de Dothan (1978) un proceso de reversión a la media. En el modelo general  $\gamma = 1$ , por lo que se obtiene  $dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dW_t$ . El modelo reescrito en términos económicos se denota por  $dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t Z_t$ .

El modelo de Cox *et al.* (1980), CIR (1980) o modelo CIR-VR establece una varianza muy sensible al nivel de los tipos de interés, dado que el exponente al que se eleva el tipo de interés en la función de difusión toma el valor 1,5 lo cual concuerda con el resultado de CKLS (1992). Sin embargo, los tipos no presentan reversión a la media. En el modelo general  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 3/2$  por lo que se obtiene  $dr_t = \sigma r_t^{3/2} dW_t$ .

Cox (1975) y Cox y Ross (1976) postulan un modelo de elasticidad de varianza constante al cual se le denomina generalmente como modelo CEV, el cual engloba como casos particulares a los modelos de Black and Scholes (1973), Dothan (1978) y CIR (1980). En el modelo general  $\alpha = 0$ , por lo que se obtiene  $dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$ . En la nomenclatura económica, el modelo viene dado por  $dr_t = \kappa r_t dt + \sigma r_t^\gamma Z_t$ .

<sup>35</sup> Esa es la razón por la que a este modelo también se le conozca en terminología anglosajona como *geometric random walk* o *elastic random walk*.

<sup>36</sup> En ocasiones este modelo es referenciado como modelo de Rendleman y Bartter (1980).

En resumen, la modelización de la dinámica de la curva de tipos de interés a partir de un modelo unifactorial tiene las siguientes características:

- Los modelos de equilibrio unifactoriales suponen que una única variable de estado es suficiente para explicar los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI). Esta variable suele ser el tipo de interés instantáneo o a corto plazo  $r_t$ , que es modelizado según un proceso de difusión.
- La principal desventaja de este tipo de modelos es que no logran un ajuste perfecto a la estructura de tipos de interés observados.
- Hasta el momento, los estudios no nos han determinado que modelo debemos usar. El mejor modelo dependerá de su uso específico. El tipo de modelo, el número de factores y cuáles serán esos factores debe verse siempre desde el intercambio entre el esfuerzo necesario para la parametrización del modelo y su exactitud.
- El modelo unifactorial más empleado en el contexto DFA es el modelo CIR (1985). Para la generación de escenarios económicos es aconsejable emplear un modelo que a pesar de tener un peor ajuste al comportamiento de los tipos a corto plazo, proporcione una forma analítica para derivar la curva a plazo. Esta es la razón por la que en la literatura sobre DFA el modelo CIR (1985b) sea el modelo empleado por D'Arcy *et al.* (1998), Ahlgrim *et al.* (1999) y Kaufmann *et al.* (2001). Las principales razones que aconsejan su uso son la simplicidad para simular la curva de tipos de interés evitando la presencia de tipos de interés negativos, la reversión a la media y la consideración de un nivel de volatilidad ajustado al nivel de tipos de interés.

### **3.2.2. Modelos de equilibrio multifactoriales**

Los modelos de equilibrio multifactoriales presumen que la ETTI viene dada por un conjunto de factores, los cuales han sido identificados empleando generalmente el análisis estadístico de componentes principales, y que descomponen la ETTI en tres factores independientes:

- El primer factor son los movimientos paralelos de todos los tipos de interés, el denominado *shift* de la curva, que representa en torno a un 80%-90% de la varianza total. Estos son los denominados cambios en el nivel de la curva.
- El segundo factor son las situaciones en las que los tipos de interés a largo plazo y corto plazo se mueven en direcciones opuestas, el denominado *twist* de la curva, que representa en torno a un 5%-10% de la varianza total. Estos son los denominados cambios en la pendiente de la curva.
- Finalmente, el tercer factor son los movimientos del tipo de interés a medio plazo en dirección opuesta a los tipos a corto plazo y largo plazo, el denominado efecto *butterfly*, que representa en torno al 2% de la varianza total. Estos son los denominados cambios en la curvatura de la ETTI.

En la medida en que el primer componente explica una gran parte de los movimientos de las curvas de tipos, tradicionalmente se ha reducido el problema de modelización de la ETTI a modelos de un factor<sup>37</sup>. Los modelos de un factor han sido criticados porque el tipo de interés a largo plazo es una función determinista del tipo a corto plazo. Dado que existen valores cuyos precios son sensibles a la forma de las curvas de los tipos y no sólo a sus niveles, se han desarrollado modelos de más de un factor.

Los modelos multifactoriales suponen la existencia de más de una variable de estado en la estructura temporal de los tipos de interés y surgen con el objetivo de evitar las características poco realistas relacionadas con los modelos unifactoriales, explicando una mayor variedad de movimientos en la evolución temporal de los tipos de interés. La mayoría de los modelos multifactoriales tienen dos factores. Además del tipo de interés a corto plazo, Richard (1978) y Cox *et al.* (1985b), proponen la tasa de inflación instantánea esperada, Brennan y Schwartz (1979, 1982) utilizan el tipo de interés a largo plazo, Fong y Vasicek (1991) y Longstaff y Schwartz (1992) la volatilidad del tipo de interés a corto plazo. Schaefer y Schwartz (1984) y Moreno (1997) consideran modelos bifactoriales basados en el tipo de interés a largo plazo y el diferencial o *spread* entre dicho tipo y el tipo a corto plazo.

Modelo	Variables consideradas
Richard (1978) y Cox <i>et al.</i> (1985b)	-Tipo de interés a corto plazo real esperado -Tasa de inflación anticipada a corto plazo
Brennan y Schwartz (1979, 1982)	-Tipo de interés a corto plazo -Tipo de interés a largo plazo
Longstaff y Schwartz (1992)	-Tipo de interés a corto plazo -Volatilidad condicional del tipo a corto
Fong y Vasicek (1991)	-Tipo de interés a corto plazo -Volatilidad condicional del tipo a corto
Schaefer y Schwartz (1984)	-Tipo de interés a largo plazo -Diferencial o <i>spread</i> de tipos de interés entre el largo y corto plazo
Moreno (1997)	-Tipo de interés a largo plazo -Diferencial o <i>spread</i> de tipos de interés entre el largo y corto plazo

El modelo de Vasicek de dos factores modeliza el tipo de interés a corto plazo y el tipo a largo plazo como procesos de reversión a la media mediante dos procesos

<sup>37</sup> Esto no debe ser entendido en que todos los movimientos de las curvas sean paralelos, sino en el sentido de que es suficiente una única fuente de incertidumbre para explicar los movimientos de la estructura temporal de tipos.

de Ornstein-Uhlenbeck y proporciona una expresión analítica para la ETTI<sup>38</sup>. Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004b) incorporan un modelo de estas características en el ámbito de la generación de escenarios económicos para las compañías aseguradoras, y por tanto es susceptible de aplicación en DFA. Su estructura es similar al modelo de un factor de Vasicek en el que el proceso de reversión a la media del tipo a corto plazo es una variable estocástica. Aquí, sin embargo, hay un segundo factor aleatorio, la media duradera a la cual los tipos a corto tienden a revertir<sup>39</sup>. Por lo tanto, bajo este modelo el tipo a corto plazo ( $r_{1t}$ ) revierte a un tipo a largo plazo estocástico ( $r_{2t}$ ), que a su vez revierte a un nivel medio determinista ( $\theta$ ). Las fórmulas en tiempo continuo son:

$$dr_{1t} = \kappa_{r_1}(r_{2t} - r_{1t})dt + \sigma_{r_1}Z_{1t}$$

$$dr_{2t} = \kappa_{r_2}(\theta - r_{2t})dt + \sigma_{r_2}Z_{2t}$$

En tiempo discreto el modelo de Vasicek de dos factores toma la forma siguiente:

$$\Delta r_{1t} = a(r_{2t} - r_{1t-1}) + s_{r_1}\varepsilon_{1t}$$

$$\Delta r_{2t} = b(c - r_{2t-1}) + s_{r_2}\varepsilon_{2t}$$

Donde:

- $r_{1t}$  es el tipo de interés a corto plazo,
- $r_{2t}$  es la media a la que revierte el tipo a corto plazo,
- $a$  es la velocidad de reversión a la media del proceso del tipo a corto plazo  $r_{1t}$ ,
- $b$  es la velocidad de reversión a la media del proceso de reversión del tipo a largo plazo,
- $s_{r_1}$  es la volatilidad (desviación estándar) del tipo a corto plazo,
- $s_{r_2}$  es la volatilidad (desviación estándar) del largo plazo,
- $c$  es el nivel de reversión del tipo a largo plazo  $r_{2t}$ ,
- $\varepsilon_{1t}$  distribución normal estándar para el proceso del tipo de interés a corto plazo,
- $\varepsilon_{2t}$  distribución normal estándar para el proceso del tipo de interés a largo plazo.

Aunque los modelos bifactoriales son predominantes cabe mencionar la propuesta de un modelo con tres factores de Chen (1996). Los tres factores de este modelo son el tipo de interés a corto plazo, la media estocástica del tipo de interés a corto plazo y la volatilidad estocástica del tipo de interés a corto plazo. Mediante este modelo, es posible explicar los movimientos presentes en el nivel, pendiente y curvatura de la estructura temporal de los tipos de interés.

<sup>38</sup> Debe mencionarse que los modelos de Schaefer y Schwartz (1984), Longstaff y Schwartz (1992) y Moreno (1997) también disponen de expresiones analíticas para la valoración de títulos.

<sup>39</sup> Por tanto son el equivalente en tiempo continuo a dos procesos autorregresivos de primer orden.

En definitiva, los modelos de equilibrio presentan las siguientes características:

- Parten de la necesidad de utilizar más de una variable de estado para explicar los movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés. En general, se restringe a dos el número de factores utilizados. El objetivo de este tipo de modelos es evitar ciertos inconvenientes de los modelos unifactoriales e intentar explicar una mayor diversidad de movimientos de la estructura temporal de los tipos de interés. A pesar del mejor ajuste a la ETTI que se logra respecto al uso de modelos unifactoriales, siguen siendo inconsistentes con la curva de tipos del mercado.
- Ahlgrim (2001) compara la importancia de introducir modelos de dos factores frente a modelos de un factor para realizar un DFA de un asegurador no vida. Las comparaciones se realizan en base al excedente proyectado bajo diferentes modelos. El autor encuentra para la serie empleada que bajo un modelo de dos factores de Vasicek la variación del excedente es generalmente mayor que bajo un modelo de un factor, sin embargo los resultados no son significativos para el primer y quinto percentil. Esto le lleva a concluir que para un asegurador de no vida parece suficiente con emplear un modelo de un factor.
- El modelo de Vasicek de 2 factores introducido por Hibbert *et al.* (2001) en la literatura actuarial, y es incorporado por Ahlgrim *et al.* (2004b) en el proyecto de investigación patrocinado por la SOA y CAS americanas para la generación de escenarios económicos. Las principales razones que aconsejan su uso son la simplicidad para simular la curva de tipos de interés y la reversión a la media. Sin embargo, no evita la presencia de tipos de interés negativos.

### 3.2.3. Modelos de equilibrio con saltos

Los modelos de equilibrio de difusión “puros” unifactoriales y multifactoriales comentados hasta el momento suponen que los tipos de interés evolucionan a lo largo del tiempo de modo continuo. Sin embargo, diversas circunstancias o *shocks* producidos en la economía pueden provocar saltos en la evolución de los tipos de interés. De esta forma surgen los modelos con saltos, que en general tiene como ventaja la capacidad de reflejar la asimetría y el exceso de curtosis presente en los cambios en los tipos de interés de forma más adecuada que los procesos de difusión. Sin embargo, su implantación es más compleja.

Para analizar la forma de estos modelos explicaremos la forma funcional que emplea un modelo de un único factor. En estos modelos la expresión del tipo de interés instantáneo sin riesgo viene dada por un proceso de difusión con saltos. En el caso de que los saltos estuviesen normalmente distribuidos con una intensidad dada por un proceso de Poisson su expresión sería:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t + J(\mu, \sigma^2)d\pi(h)$$

Donde, como de forma habitual,  $r_t$  es el tipo de interés instantáneo sin riesgo,  $\kappa$  es el coeficiente de reversión a la media,  $\mu$  es el valor a largo plazo al cual revierte  $r_t$ ,  $\sigma$  es la desviación típica de volatilidad de los tipos de interés,  $\gamma$  es el coeficiente

de elasticidad,  $dW_t$  es un proceso de Wiener,  $J(\mu, \sigma^2)$  es la magnitud del salto en el tipo de interés instantáneo que sigue una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  y  $d\pi(h)$  es un proceso de Poisson con parámetro de intensidad constante  $h$ . Además se supone que los componentes de difusión y de salto del proceso que sigue el tipo de interés son independientes.

Dentro de este tipo de modelos destacan las propuestas unifactoriales de los modelos propuestos en Das y Foresi (1996)<sup>40</sup> y la propuesta de inclusión de saltos en el modelo CIR (1985b) realizada por Ahn y Tomphson (1988)<sup>41</sup>. En resumen, los modelos de equilibrio con saltos:

- Surgen con el objetivo de reflejar la posibilidad de cambios discretos en los tipos de interés. El tamaño de los saltos en este tipo de modelos puede ser fijo o estocástico.
- La principal ventaja de este tipo de modelos es que permite reflejar adecuadamente la asimetría y el exceso de curtosis presentes en los cambios en los tipos de interés. Además, para determinados casos existen fórmulas analíticas para los tipos a plazo.
- Este tipo de modelos no ha sido considerado tradicionalmente en el ámbito DFA.

### 3.2.4. Modelos libres de arbitraje

Los modelos libres de arbitraje parten de una estructura temporal de los tipos de interés determinada y generan curvas libres de arbitraje. Los principales modelos son los propuestos por Ho y Lee (1986), Hull y White (1990), Black *et al.* (1990), Black y Karasinski (1991) y Heath *et al.* (1990, 1992).

Ho y Lee (1986) propusieron el primer modelo que toma como dada la ETTI en un momento temporal a partir de los precios de bonos cupón cero y deriva los posibles movimientos subsiguientes empleando un árbol binomial libre de arbitraje. Las ventajas de este modelo se derivan de su enfoque práctico para realizar la valoración de activos derivados. Las principales desventajas de este modelo para la generación de escenarios económicos son: siempre genera curvas normales no pudiendo generar otras formas de curvas, no incorpora reversión a la media en los tipos de interés por lo que los tipos pueden alcanzar niveles poco realistas y los tipos de interés pueden alcanzar valores negativos.

Heath *et al.* (1990, 1992) han propuesto un modelo basado en los tipos de interés *forward* mediante un modelo multifactorial en tiempo continuo consistente con la

---

<sup>40</sup> Estos autores proponen dos modelos. En el primero los saltos producen cambios en los tipos de interés no afectando al valor a largo plazo al que tienden los tipos de interés, mientras que en el segundo si le afecta. Los autores encuentran fórmulas analíticas para la valoración de los títulos de renta fija.

<sup>41</sup> Los saltos que estos autores añaden a los movimientos de los tipos de interés son de tamaño constante. Cabe mencionar que bajo este supuesto los autores encuentran fórmulas analíticas de la ETTI.

curva de rendimientos observada. A partir del proceso supuesto para los tipos de interés *forward*, se determinan los tipos de interés al contado y los precios de los bonos. El modelo HJM para la dinámica de los tipos *forward* puede escribirse como:

$$df(t, T) = a(t, T, f(t, T))dt + \sigma(t, T, f(t, T)) dW_t$$

Donde los términos.  $a(t, T, f(t, T))$  y  $\sigma(t, T, f(t, T))$  son la deriva y la difusión del proceso respectivamente. Ésta especificación es muy general permitiendo que la deriva y las volatilidades puedan depender del movimiento Browniano  $W_t$  o de los tipos de interés *forward*. Por lo tanto, no se puede hablar directamente del modelo de HJM, sino más bien de un conjunto de modelos ya que no existe una forma funcional específica. El principal problema de este modelo es que, en general, la distribución de los tipos de interés no sólo depende de los tipos de interés pasados por lo que no es Markoviano, salvo algunos casos particulares como los modelos de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1993), por lo que su implementación es muy compleja.

### **El modelo BGM o Libor Market Model.**

Dentro del marco de modelos HJM, Brace *et al.* (1997), Jamshidian (1997) y Miltersen *et al.* (1997) sentaron las bases del modelo “BGM”<sup>42</sup> también conocido como *LIBOR market model*, “LMM” o “*lognormal forward Libor model*”. El modelo BGM fue derivado a partir del marco HJM pero tiene características especiales que han motivado su éxito en la valoración de instrumentos derivados. Además, el modelo BGM puede ser usado para medir y analizar el riesgo de interés, ya que cuando se discretiza el modelo, y a diferencia de otros modelos libres de arbitraje, los tipos *forward* no se disparan hacia infinito.

El modelo BGM se engloba dentro de los denominados *modelos de mercado* y modeliza el comportamiento de los tipos *forward*<sup>43</sup> siguiendo una distribución log-normal, lo que evita la generación de tipos negativos. De este modo, la variación del tipo forward  $f(t, T)$  sigue el siguiente proceso estocástico  $df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)$ , donde  $\mu(t, T)$  es la deriva y  $\sigma(t, T)$  la volatilidad.

Los tipos forward  $f(t, T)$  o  $L(t, T, T + \delta)$  son tipos simples que se obtienen directamente del mercado a partir de un conjunto de precios de bonos cupón cero:

$$L(t, T, T + \delta) = \left( \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} - 1 \right) / \delta$$

Donde  $P(t, T)$  es el precio de un bono cupón cero descontado en  $t$  con vencimiento en  $T$ , y  $\delta$ <sup>44</sup> (*accrual period*) o delta es el la diferencia o intervalo de tiempo entre

<sup>42</sup> En honor a los primeros autores que introdujeron el modelo rigurosamente.

<sup>43</sup> El BGM modeliza los tipos forward LIBOR que son directamente observables en el mercado, lo que contrasta con los anteriores modelos de equilibrio que empleaban los tipos a corto plazo que es una variable no observable directamente. Por lo tanto es un modelo de la curva cupón cero, pero expresada en función de los tipos simples forward.

<sup>44</sup> Habitualmente  $\delta$  es de 3 o 6 meses.

el período temporal  $T_{i+1}$  y  $T_i$ . Por lo que los tipos *forward* y los precios de los bonos están ligados por la siguiente relación:

$$1 + \delta L(t, T, T + \delta) = \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)}$$

Dado un periodo temporal  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N < T_{N-1}$  y bajo la hipótesis de que los tipos *forward* siguen una evolución lognormal a lo largo del tiempo, podemos describir la evolución de los tipos *forward* simples  $L_i(t) = L(t, T_i, T_{i+1})$ <sup>45</sup> visto en el periodo de tiempo  $t$  que se aplica en el intervalo  $[T_i, T_{i+1}]$  mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)$$

De este modo, será preciso disponer del vector  $\sigma_i(t)$ <sup>46</sup> de volatilidades de los diferentes tipos *forward*, de rendimientos esperados  $\mu_i$  en condiciones de no arbitraje y de un movimiento Browniano  $d$ -dimensional  $dW(t)$ . Dado que la evolución de los tipos *forward* presenta una estructura de correlaciones entre los vencimientos, será preciso disponer también de dicha estructura e incorporarla al modelo.

Si bien la volatilidad se puede obtener directamente del mercado, la deriva debe estimarse en condiciones de no arbitraje. De este modo, el cambio esperado de no arbitraje a cada plazo viene determinado por la siguiente expresión:

$$\mu_i = -\sigma_i \sum_{j=i+1}^N \frac{L_j(t)\sigma_j(t)_i}{1 + L_j}, \quad i = 1, \dots, N; i < N$$

En donde el término de deriva se hace cero para  $i = N$ .

### 3.3. Calibración de los modelos tipo CKLS, Vasicek de dos factores y BGM

De los anteriores apartados se desprende que los principales modelos para aplicar en un marco DFA son los modelos tipo CKLS en especial el modelo CIR-SR y el modelo de Vasicek, el modelo de Vasicek de dos factores y el modelo BGM. En este apartado describiremos el procedimiento de calibración de los modelos de tipos CKLS y del modelo BGM, ya que el modelo de Vasicek de dos factores se calibra tradicionalmente mediante una regresión lineal en dos etapas.

Las técnicas más empleadas para el ajuste de los parámetros de los modelos de tipos de interés estocásticos tipo CKLS son el empleo de máxima verosimilitud y el Método Generalizado de Momentos de Hansen (1982) (GMM de aquí en adelan-

<sup>45</sup> En  $L_i(t)$   $i$  denota el código del tipo *forward* y  $t$  denota el tiempo.

<sup>46</sup> La volatilidad es porcentual, es decir, mide desviación típica de variaciones porcentuales de los tipos.

te)<sup>47</sup>. El método de máxima verosimilitud supone una cierta distribución de la variable en estudio. Posteriormente a partir de la función de densidad se obtienen los parámetros que maximizan el valor de la función de verosimilitud o de log-verosimilitud. Nowman (1997) y Episcopos (2000) emplean este método utilizando una técnica gaussiana a partir del modelo exacto discretizado, lo que tiene como ventaja que se obtiene el estimador exacto de la función de verosimilitud. En el lado negativo, esta opción asume que la varianza de la variable estocástica es constante entre las observaciones discretas, lo que es otra simplificación.

El Método Generalizado de Momentos no presupone ninguna distribución a priori, por lo que los parámetros de los modelos son estimados mediante una serie de momentos que se deducen a partir del modelo. Este es el método empleado por Chan *et al.* (1992) entre otros. Siguiendo a Chan *et al.* (1992) el método GMM de Hansen (1982) ha mostrado buenas propiedades en las situaciones en las que se estiman modelos discretos que provienen de un marco continuo. Este método consiste en derivar las expresiones analíticas de los momentos e igualar estas expresiones a sus valores empíricos o muestrales resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. El método GMM no precisa que la distribución de las variaciones temporales de tipos de interés sea normal. Esto es importante en el caso de la estimación del modelo CIR-SR ya que este modelo asume que los cambios en las tasas de interés son proporcionales a una variable  $\chi^2$  no centrada. Finalmente, los estimadores GMM y sus respectivos errores estándar son consistentes aunque las perturbaciones sean condicionalmente heterocedásticas.

Para explicar la evolución temporal de los tipos de interés vamos a considerar los modelos utilizados en Chan *et al.* (1992), ya que como hemos visto a lo largo de este trabajo anida como casos particulares diversos modelos que han sido propuestos en la literatura. En Chan *et al.* (1992) se estiman los parámetros de los modelos en tiempo continuo a partir de su aproximación en tiempo discreto:  $r_{t+1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_{t+1}$ , con  $E(\varepsilon_{t+1}) = 0$  y  $E(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma^2 r_t^{2\gamma}$ .

El proceso de discretización de los modelos de tipo de interés es sólo una aproximación de la especificación en tiempo continuo, apareciendo lo que se conoce como el problema de la agregación temporal descrito en la literatura (véase múltiples referencias en Chan *et al.*, 1992). El error de dicha aproximación será menor cuando la discretización sea realizada sobre períodos cortos de tiempo<sup>48</sup>. Para estimar este tipo de modelos que han sido diseñados en tiempo continuo y se estiman en tiempo discreto Chan *et al.* (1992) emplean el método generalizado de los momentos. Sin embargo, en este trabajo, a diferencia de Chan *et al.* (1992) y a semejanza de Nowman (1997), la estimación de los modelos se puede realizar empleando métodos de estimación gaussianos basados en modelos de tiempo

---

<sup>47</sup> De forma más reciente se han estimado los parámetros de los modelos mediante quasi-máxima verosimilitud empleando el filtro de Kalman.

<sup>48</sup> En su artículo Chan *et al.* (1992) emplean los datos mensuales de los tipos de interés de las letras del Tesoro americanas a lo largo del período de Junio de 1964 a Diciembre de 1989.

continuos. Este método tiene la principal ventaja de que obtiene los verdaderos valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud.

En cuanto al modelo BGM, su calibración consiste en la obtención de las volatilidades instantáneas y las correlaciones de los tipos *forward*. Estos parámetros son elegidos de tal forma que el modelo BGM valore correctamente los principales títulos negociados en los mercados<sup>49</sup>. Cuando se utiliza BGM para el análisis del riesgo, una opción consistiría en calcular la volatilidad histórica y mantener dicha cuantía como predicción de la volatilidad futura. Otras opciones serían el cálculo de forma dinámica con el transcurso de tiempo, o el uso de volatilidades implícitas en el mercado en cada momento en el que se realice la simulación. En cuanto a la correlación existente entre las variaciones de los tipos *forward*, si cuando se simula se genera un browniano para todos los vencimientos, estaremos asumiendo una correlación plena. Lo más adecuado sería generar números aleatorios independientes para cada plazo y posteriormente correlacionarlos con la estructura observada en el mercado. Esto implica establecer una estructura de correlaciones sobre la distribución Normal-multivariante generalmente aplicando el método de Cholesky<sup>50</sup>.

#### **3.4. Modelización de la dinámica de la ETTI a partir de los modelos de Vasicek, CIR-SR, Vasicek de dos factores y BGM**

En la mayoría de los modelos DFA, el tipo de interés es la variable que constituye el elemento fundamental al cual se vinculan el resto de las variables. Dentro de los distintos modelos de tipos de interés el modelo CIR -SR es el más empleado en el marco DFA, ya que logra un mejor equilibrio entre complejidad y exactitud. Pero en este análisis se han incorporado otras alternativas: el modelo de Vasicek, un modelo de dos factores de Vasicek y el modelo BGM. Con ello queremos poner de relieve que el proceso adecuado para la evaluación de un modelo de tipos de interés pasa por la evaluación de diversas alternativas y la selección de la más adecuada.

---

<sup>49</sup> Existen tres valores/ mercados a los que el modelo BGM debe estar calibrado de forma razonable para efectuar la valoración de activos derivados: precios de los *caplets*, las correlaciones de los tipos *forward* y los precios de *swaptions*. Los *caplets* son opciones de compra sobre los tipos *forward* LIBOR. En la práctica los *caplets* no cotizan de forma individual sino en forma de *caps*, que es un producto que consiste en múltiples y diferentes *caplets*. Los *swaps* son acuerdos entre dos partes para intercambiar pagos referenciados a un tipo de interés variable por uno fijo o viceversa. Los *swaptions* son las opciones sobre el tipo *swap*.

<sup>50</sup> Por lo tanto es necesario establecer la matriz de correlaciones entre los rendimientos de los tipos *forward*. La matriz de correlaciones es cuadrada con una dimensión dada por el número de tipos *forward* de la curva cupón cero de partida menos uno. Habitualmente, la correlación entre tipos es positiva y va decreciendo según nos alejamos de la diagonal. Además independientemente de la forma en la que son calibradas las correlaciones (datos de mercado, precios de *swaption*) es recomendable simplificar la matriz dado que es generalmente inestable. En este sentido existen diversas técnicas como el ajuste funcional que consiste en simplificar la matriz mediante un pequeño número de parámetros mediante una función de tipo exponencial, el uso de componentes principales, etc.

## Modelo de Vasicek

La propuesta de Vasicek (1977) puede ser fácilmente implantada en DFA. El modelo sugiere que la volatilidad condicional de los cambios en el tipo de interés es constante, cuestión fuertemente criticada. El modelo de Vasicek asume que los cambios absolutos en los tipos de interés están distribuidos normalmente. Una debilidad del modelo es que la normalidad en los tipos de interés proporciona una probabilidad positiva de que los tipos de interés sean negativos. Sin embargo, esto puede ser interpretado de forma coherente si modelizamos los tipos de interés reales en el modelo, incorporando por otro lado la modelización de la inflación. La forma discreta empleada en el modelo DFA es la siguiente:

$$\Delta r_t = a(b - r_{t-1}) + s\varepsilon_t$$

Donde  $\Delta r_t$  es el cambio discreto en el tipo de interés a corto plazo y  $\varepsilon_t$  es una muestra de la distribución normal estándar.

La fórmula anterior nos determina el tipo de interés a corto plazo para cada período de simulación, pero para poder valorar los títulos de renta fija necesitamos descontar sus flujos a través de la ETTI. El tipo a  $T$  años en el momento  $t$  será  $R_{t,T}$ :

$$R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \log A_t}{T}$$

Donde  $A_t = e^{\left(\frac{1}{2a^2} \left( (2a^2 b - s^2)(B(t)-T) - \frac{s^2 a}{2} B^2(t) \right)\right)}$  y  $B_t = \frac{1 - e^{-aT}}{a}$

El proceso de simulación del modelo de Vasicek viene dado por: generar una Normal (0,1), simular el tipo de interés a corto plazo  $r_{1t}$  y, finalmente, emplear las expresiones analíticas para la ETTI. El modelo de Vasicek considera que la ETTI empieza en su nivel actual o tipo a corto plazo instantáneo y tiende al nivel de largo plazo infinito  $r_\infty = b - \frac{s^2}{2a^2}$ . Esto indica que el nivel a largo plazo de equilibrio (*long-term equilibrium rate*) y el tipo de interés a largo plazo infinito (*infinitely long rate*) no son iguales. Sin embargo, en la medida en que la velocidad de reversión a la media crezca, el segundo término de la expresión se vuelve más pequeño haciendo que ambos converjan<sup>51</sup>.

El modelo puede producir curvas con pendiente normal, invertida o con joroba. La curva tendrá pendiente positiva cuando  $r_t \leq r_\infty - \frac{s^2}{4a^2}$ , tendrá joroba cuando  $r_\infty + \frac{s^2}{2a^2} \geq r_t \geq r_\infty - \frac{s^2}{4a^2}$  y finalmente, tendrá pendiente negativa cuando  $r_t \geq r_\infty + \frac{s^2}{2a^2}$ .

<sup>51</sup> En el largo plazo, la distribución del tipo de interés es estacionaria y además se distribuye normalmente con media  $b$  y varianza  $\frac{s^2}{2a}$  (cuando la velocidad de reversión a la media es positiva). Por lo tanto la función de distribución a largo plazo de los tipos de interés (*Steady State Probability Density Function*) está distribuida  $N \sim (b, \frac{s}{\sqrt{2a}})$ .

### Modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985b)

La simulación de curvas a través del modelo CIR (1985b) presenta la ventaja de que los tipos de interés simulados no van a ser negativos, y al igual que el propuesto por Vasicek, permite curvas normales, invertidas y con joroba. Además, la incorporación de la raíz cuadrada en el proceso de difusión permite incorporar la heterocedasticidad en función del nivel de tipos de interés. No obstante, en la práctica se observa que la volatilidad del tipo de interés es más sensible al nivel de los tipos de interés (véanse CKLS, 1992 y Nowman, 1997). La simulación del modelo en el marco DFA precisa de la versión discreta que se aproxima a través de la siguiente expresión:

$$\Delta r_t = a(b - r_{t-1}) + s\sqrt{r_{t-1}}\varepsilon_t$$

La fórmula anterior determina el tipo de interés a corto plazo para cada período de simulación, pero para poder valorar los títulos de renta fija necesitamos descontar sus flujos a través de la ETTI. El tipo a  $T$  años en el momento  $t$  será  $R_{t,T}$ :

$$R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \log A_t}{T}$$

Donde:

$$A_t = \left( \frac{2Ge^{(a+G)T/2}}{(a+G)(e^{GT} - 1) + 2G} \right)^{2ab/s^2}$$
$$B_t = \frac{2(e^{GT} - 1)}{(a+G)(e^{GT} - 1) + 2G}$$
$$G = \sqrt{a^2 + 2s^2}$$

Por tanto el proceso de simulación del modelo CIR-SR, al igual que Vasicek, viene dado por: generar una Normal (0,1), simular el tipo de interés a corto plazo  $r_{1t}$  y, finalmente, emplear las expresiones analíticas para la ETTI.

La ETTI para el modelo CIR-SR comienza en su nivel actual (tipo a corto plazo instantáneo) y tiende a su nivel de largo plazo  $r_\infty = \frac{2ab}{G+a} = b \frac{2a}{a+\sqrt{a^2+2s^2}}$ . Por lo tanto, el nivel a largo plazo de equilibrio y el tipo de interés a largo plazo infinito pueden llegar a ser muy diferentes. Este modelo, al igual que Vasicek, puede producir curvas con pendiente normal ( $r_t < r_\infty$ ), invertida ( $r_t > b$ ) o con joroba ( $r_\infty < r_t < b$ )<sup>52</sup>.

<sup>52</sup> El cambio en el tipo de interés a corto plazo bajo CIR-SR se distribuye como una  $\chi^2$  no centrada. En el largo plazo la distribución del tipo de interés es estacionaria y además se distribuye como una gamma con media  $b$  y varianza  $s\sqrt{b/2a}$  (cuando la velocidad de reversión a la media y el tipo a largo plazo son positivos). Por lo tanto la función de probabilidad a largo plazo de los tipos de interés (Steady State Probability Density Function) está distribuida  $\text{Gamma} \sim (b, s\sqrt{b/2a})$ . Esta es la notación frecuentemente encontrada en los manuales, sin embargo, debe advertirse que en Excel la función adecuada es =DISTR.GAMMA() con  $\text{alfa} = 2ab/s^2$  y  $\text{beta} = s^2/2a$ .

### Modelo de Vasicek de dos factores.

Como ya hemos mencionado, Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004b) proponen el uso de un modelo de dos factores de Vasicek para modelizar el riesgo de tipos de interés en el contexto DFA. Respecto al modelo unifactorial, en esta ocasión se incorpora un segundo factor aleatorio para la media duradera a la cual los tipos a corto tienden a revertir. Por lo tanto, bajo este modelo, el tipo a corto plazo ( $r_{1t}$ ) revierte a un tipo a largo plazo estocástico ( $r_{2t}$ ), que a su vez revierte a un nivel medio determinista ( $\theta$ ). Este modelo, Las fórmulas específicas usadas son:

$$dr_{1t} = \kappa_{r_1}(r_{2t} - r_{1t})dt + \sigma_{r_1}Z_{1t}$$

$$dr_{2t} = \kappa_{r_2}(\theta - r_{2t})dt + \sigma_{r_2}Z_{2t}$$

En tiempo discreto toma la forma siguiente:

$$\Delta r_{1t} = a(r_{2t} - r_{1t-1}) + s_{r_1}\varepsilon_{1t}$$

$$\Delta r_{2t} = b(c - r_{2t-1}) + s_{r_2}\varepsilon_{2t}$$

Donde  $\varepsilon_{1t}$  es una muestra de la distribución  $N(0;1)$  para el proceso del tipo de interés a corto plazo y  $\varepsilon_{2t}$  otra muestra para el proceso del tipo de interés a largo plazo.

Se puede reajustar la última ecuación de este modelo para mostrar que este proceso es autorregresivo. De esta forma, se establece que:

$$r_{1t+1} - r_{1t} = a(r_{2t} - r_{1t})\Delta t + s_{r_1}\varepsilon_{1t+1}$$

$$r_{2t+1} - r_{2t} = b(c - r_{2t})\Delta t + s_{r_2}\varepsilon_{2t+1}$$

Por lo que operando obtenemos:

$$r_{1t+1} = r_{1t} + (ar_{2t} - ar_{1t})\Delta t + s_{r_1}\varepsilon_{1t+1}$$

$$r_{2t+1} = r_{2t} + (bc - br_{2t})\Delta t + s_{r_2}\varepsilon_{2t+1}$$

Y reordenando los términos:

$$r_{1t+1} = ar_{2t}\Delta t + (1 - ar_{1t})\Delta t + s_{r_1}\varepsilon_{1t+1}$$

$$r_{2t+1} = bc\Delta t + (1 - br_{2t})\Delta t + s_{r_2}\varepsilon_{2t+1}$$

Lo que muestra que el tipo de interés a corto plazo  $r_{1t+1}$  es una media ponderada entre su nivel actual  $r_{1t}$  y el tipo a largo plazo  $r_{2t}$ . El tipo a largo plazo  $r_{2t+1}$  es una media ponderada entre el mismo y su media a largo plazo  $c$ .

Este modelo también dispone de una forma cerrada para la valoración de los títulos de renta fija, a partir de la cual se puede derivar la ETTI. El precio de un bono cero cupón en el tiempo  $t$  que paga una unidad en términos reales en el tiempo  $T$  está dado por la siguiente ecuación:

$$P(t, T) = e^{[A(T-t) - B_1(T-t)r_{1t} - B_2(T-t)r_{2t}]}$$

Con

$$\begin{aligned}
 B_1(t) &= \left( \frac{1 - e^{-at}}{a} \right) \\
 B_2(t) &= \frac{a}{a-b} \left( \frac{1 - e^{-bt}}{b} - \frac{1 - e^{-at}}{a} \right) \\
 A(t) &= (B_1(t) - t) \left( c - \frac{s_{r_1}^2}{2a^2} \right) + B_2(t)c - \frac{s_{r_1}^2 B_1(t)^2}{4a} \\
 &\quad + \frac{s_{r_2}^2}{2} \left[ \frac{t}{b^2} - 2 \frac{(B_1(t) + B_2(t))}{b^2} + \frac{1}{(a-b)^2} \frac{(1 - e^{-2at})}{2a} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2a}{b(a-b)^2} \frac{(1 - e^{-(a+b)t})}{(a+b)} + \frac{a^2}{b^2(a-b)^2} \frac{(1 - e^{-2at})}{2b} \right]
 \end{aligned}$$

El proceso de simulación del modelo de Vasicek de dos factores viene dado por: generar dos normales estándar, simular el tipo de interés al que revierte el tipo a corto  $r_{2t}$ ; simular el tipo de interés a corto plazo  $r_{1t}$  y, finalmente, emplear las expresiones analíticas para la ETTI.

### Modelo BGM

La simulación de los tipos de interés futuros, en el marco BGM, se realiza a través de su versión discreta. Para ello supongamos que tenemos  $n$  tipos forward  $L(t, T_i, T_{i+1})$  para  $i = 1, \dots, n$  que cubren el periodo  $[T_i, T_{i+1}]$  y donde por simplicidad  $T_i - T_{i+1} = \delta$  para todos los períodos. La simulación puede hacerse a partir de las variaciones porcentuales compuestas o logarítmicas. En la siguiente tabla se recogen ambas opciones. Optar por una u otra opción también afecta al valor de la volatilidad y a los tipos de interés simulados que difieren ligeramente.

	<b>Variaciones compuestas</b>	<b>Variaciones logarítmicas</b>
Tipo forward	$R_i = \frac{L_i(t+1) - L_i(t)}{L_i(t)}$	$R_i = \ln \left( \frac{L_i(t+1)}{L_i(t)} \right)$

De este modo, considerado la primera opción, la variación del tipo *forward* para el período de tiempo considerado se determina como:

$$L_i(t + \Delta t) - L_i(t) = [L_i(t)\mu_i] \Delta t + \sigma_i(t)L_i(t)\sqrt{\Delta t}\varepsilon(t),$$

$$\text{siendo } \mu_i = -\sigma_i \sum_{j=i+1}^N \frac{L_j(t)\sigma_j(t)}{1+L_j}.$$

Por lo que el tipo *forward* de un periodo se obtiene a partir del tipo *forward* del periodo anterior mediante la siguiente ecuación:

$$L_i(t + \Delta t) = L_i(t) + [(L_i(t)\mu_i) \Delta t + \sigma_i(t)L_i(t)\sqrt{\Delta t}\varepsilon(t)].$$

Si trabajamos en términos logarítmicos, las ecuaciones que tendremos que utilizar son las siguientes:

$$dL_i(t) = \left( \mu_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i(t)^2 \right) dt + \sigma_i(t) dW(t).$$

Por lo que para el período temporal considerado, la evolución discreta de  $L_i(t)$  viene dada por:

$$L_i(t + \Delta t) = L_i(t) e^{\left[ \left( \mu_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i(t)^2 \right) \Delta t + \sigma_i(t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon(t) \right]}.$$

La curva cupón cero de mercado en el momento inicial expresada como tipos *forward* es la empleada como dato de partida para la calibración de nuestro modelo. Supongamos que tiene  $N + 1$  tipos, dado que todas las curvas simuladas tienen el mismo horizonte temporal que la inicial, en cada período temporal de simulación perdemos un tipo *forward* (el primero). De esta forma, en la última curva de tipos que podemos simular es la de tiempo  $N \Delta t$ , la cual tan sólo contendría el tipo *spot*. No cabe duda que esta es una limitación que presenta el modelo BGM cuando se utiliza para analizar el riesgo de tipos de interés.

En la siguiente tabla se muestra como se realizaría la simulación de los tipos *forward* mediante este modelo.

Tiempo	Tipos forward simples $L_i(t)$						
0	$L_0(0)$	$L_1(0)$	$L_2(0)$	$L_3(0)$	...	$L_j(0)$	...
1		$L_1(1)$	$L_2(1)$	$L_3(1)$	...	$L_j(1)$	...
2			$L_2(2)$	$L_3(2)$	...	$L_j(2)$	...
3				$L_3(3)$	...	$L_j(3)$	...

En la diagonal resultan los tipos *spot*  $L_0(0)$ ,  $L_1(1)$ ,  $L_2(2)$  y  $L_3(3)$ . Por ejemplo, en una simulación trimestral de los tipos *forward* ( $\Delta t = 3/12$ ) generados a partir de la curva de tipos *forward* para un delta de 3 meses ( $\delta = 0,25$ ) resultaría según lo mostrado a continuación:

Tiempo	Tipos forward simples $L(t, T_i, T_{i+1})$				
0	$L(0,0,0.25)$	$L(0,0.25,0.5)$	$L(0,0.5,0.75)$	$L(0,0.75,1)$	...
3/12		$L(3/12,0,0.25)$	$L(3/12,0.25,0.5)$	$L(3/12,0.5,0.75)$	...
6/12			$L(6/12,0,0.25)$	$L(6/12,0.25,0.5)$	...
9/12				$L(9/12,0,0.25)$	...

### 3.5. Determinación del capital necesario a través de modelos alternativos al estándar

En este apartado proponemos calcular el riesgo de tipos de interés de una compañía aseguradora en Solvencia II empleando el modelo estándar y diversos modelos estocásticos de tipos de interés analizados en este trabajo. Para ello vamos a replicar el ejercicio de determinación de la carga de capital en QIS4 y a comparar su resultado con el obtenido mediante la calibración y simulación de los modelos de Vasicek, CIR-SR y el modelo de Vasicek de dos factores.

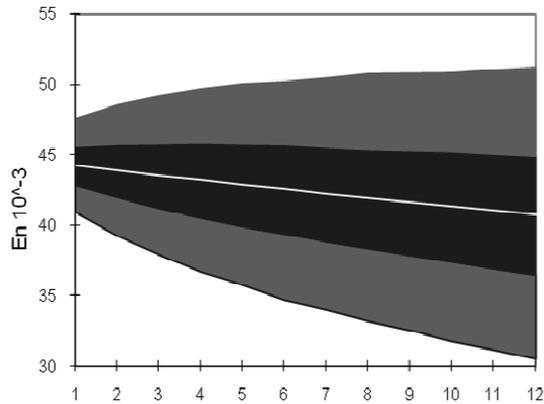
#### A. Análisis de los modelos estocásticos analizados

En este apartado analizaremos el comportamiento empírico de los modelos analizados: modelo de Vasicek, CIR-SR y Vasicek de dos factores. Para ello, se estimaron los modelos utilizando datos mensuales del Euribor del periodo Enero de 2001 a Junio de 2008<sup>53</sup>. En el apartado anterior hemos realizado la comparación de los distintos modelos para el riesgo de *equity* en base a los criterios económicos tradicionales: parsimonia y normalidad de los residuos. Si bien podríamos haber aplicado la misma metodología, hemos optado por emplear otro procedimiento que consiste en utilizar exclusivamente aquellos modelos que generan escenarios más ajustados al comportamiento empírico. Para ello los modelos estimados son simulados a lo largo de un horizonte temporal de 12 meses y posteriormente se procede a analizar los valores resultantes.

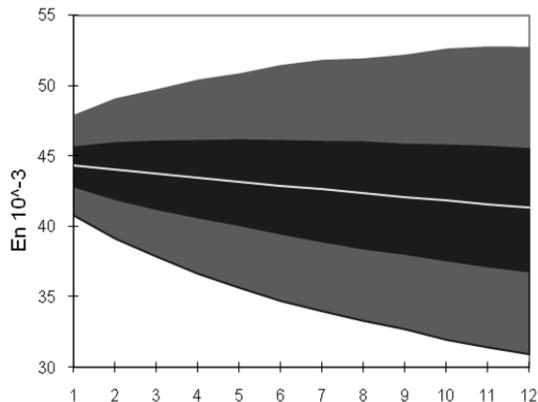
En los siguientes gráficos se muestra la evolución temporal de los tipos a corto plazo generados por los tres modelos evaluados. Para ello se han empleado 10.000 simulaciones de tipo Latino-Hipercúbico para cada uno de los 12 meses proyectados. Como se aprecia el modelo de Vasicek genera una tendencia decreciente para los tipos medios simulados. Esto es debido a que los parámetros del ajuste efectuado provocan que el tipo al cual los tipos de interés a corto reversion sea el 2,93% y su velocidad de reversión el 2,39%.

---

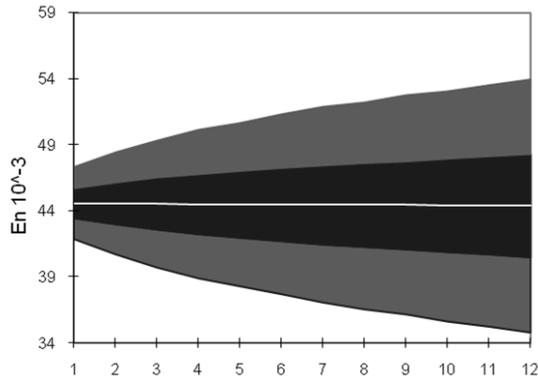
<sup>53</sup> Los modelos Vasicek y CIR-SR han sido estimados por máximo verosimilitud al tipo de interés a un mes, mientras que el modelo de Vasicek de dos factores ha sido estimado empleando mínimos cuadrados ordinarios en dos etapas. En una primera etapa se ajusta el proceso autorregresivo de los tipos de interés a largo plazo, para lo que se ha empleado el Euribor a 30 años. Posteriormente se ajusta el proceso a corto plazo empleando la serie anterior y la de tipos a un mes.



En siguiente gráfico se muestra el resultado de aplicar el modelo CIR que proporciona unos tipos medios a corto también decrecientes y una evolución temporal muy semejante a la del modelo de Vasicek. El tipo al cual los tipos de interés a corto plazo están revirtiendo en este modelo es el 2,88% y su velocidad de reversión es del 3,00%.



A continuación se muestra la evolución de los tipos a corto plazo del modelo de Vasicek de dos factores. El tipo a largo plazo al cual los tipos a largo plazo están revirtiendo en este modelo es el 4,73% y su velocidad de reversión es del 4,68%. Sin embargo, en el ajuste del modelo no se ha observado reversión de los tipos a corto plazo a los tipos a largo plazo, lo que puede ser debido al corto periodo muestral considerado. Debido a la ausencia de reversión a la media del tipo a corto, su evolución temporal no muestra ninguna tendencia media, por lo que sólo se observa el aumento de la incertidumbre a medida que la simulación se efectúa a plazos más lejanos.

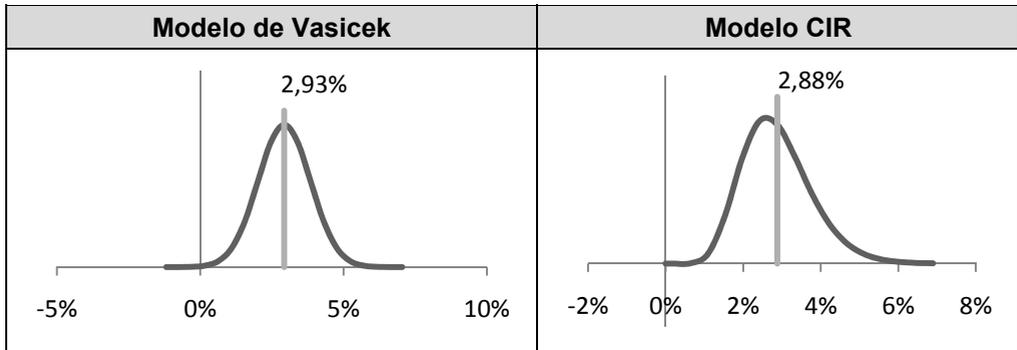


A continuación se realiza un análisis estadístico sobre el total de escenarios simulados para cada modelo en el mes 12, dado que nuestro horizonte temporal es de un año. En la siguiente tabla se muestran las principales medidas estadísticas históricas de los tipos de interés a corto, medio y largo plazo y las resultantes de la simulación de los tres modelos. El tipo a corto plazo considerado es el tipo mensual histórico, como tipo a medio plazo hemos considerado el tipo a 10 años y como tipo a largo plazo el tipo a 30 años. Estos tipos son comparados por sus tipos equivalentes generados por los modelos.

Estad.	Histórico			Vasicek			CIR-SR			Vasicek 2 Factores		
	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P
Mínimo	2,02%	3,26%	3,84%	1,52%	1,67%	1,89%	1,99%	2,06%	2,18%	2,26%	2,18%	2,00%
Media	3,13%	4,47%	4,94%	4,07%	3,94%	3,71%	4,14%	4,02%	3,80%	4,44%	4,42%	4,36%
Máximo	4,85%	5,68%	6,26%	6,48%	6,08%	5,43%	6,81%	6,45%	5,82%	6,62%	6,66%	6,74%
Desv Est.	0,93%	0,60%	0,61%	0,62%	0,55%	0,44%	0,66%	0,60%	0,50%	0,58%	0,60%	0,63%
Rango	2,83%	2,42%	2,42%	4,96%	4,41%	3,54%	4,82%	4,39%	3,64%	4,36%	4,48%	4,74%
Moda	2,10%	-	-	4,14%	4,00%	3,76%	3,99%	3,89%	3,69%	4,52%	4,44%	4,26%
Percentil 5	2,06%	3,41%	3,95%	3,05%	3,03%	2,98%	3,09%	3,07%	3,01%	3,48%	3,43%	3,32%
Percentil 10	2,08%	3,61%	4,05%	3,28%	3,24%	3,15%	3,31%	3,27%	3,17%	3,69%	3,65%	3,56%
Percentil 25	2,11%	4,04%	4,44%	3,65%	3,56%	3,41%	3,68%	3,60%	3,46%	4,05%	4,03%	3,94%
Percentil 75	3,86%	4,82%	5,29%	4,49%	4,31%	4,01%	4,56%	4,41%	4,12%	4,83%	4,83%	4,79%
Percentil 90	4,46%	5,37%	5,74%	4,87%	4,65%	4,28%	4,99%	4,80%	4,45%	5,18%	5,19%	5,17%
Percentil 95	4,72%	5,44%	5,96%	5,12%	4,87%	4,45%	5,27%	5,05%	4,66%	5,39%	5,41%	5,41%
Percentil 99	4,85%	5,64%	6,25%	5,53%	5,24%	4,75%	5,84%	5,57%	5,09%	5,78%	5,80%	5,82%
Percentil 99,5	4,85%	5,64%	6,25%	5,67%	5,36%	4,85%	6,00%	5,72%	5,21%	5,93%	5,95%	5,97%

En general, los tipos obtenidos por el modelo de Vasicek y CIR parecen ser semejantes en cuanto a los niveles generados. La distribución teórica a largo plazo de

los tipos de interés a corto plazo por estos modelos vienen dados por los gráficos inferiores. Como se aprecia el modelo de Vasicek proporciona una probabilidad de que los tipos de interés sean negativos, mientras que en el modelo CIR (1985) se evita esta posibilidad.



Además, se observa que para estos dos modelos el tipo de interés a corto plazo es generalmente superior a los tipos a medio y largo plazo generados dando lugar a ETTIs con pendiente negativa. Esto es una debilidad particular de estos modelos, ya que en base a nuestra calibración el tipo a corto plazo revierte a una media menor que el nivel de tipos actual, lo que provoca que el tipo a corto plazo esperado sea decreciente. Si a este hecho le añadimos que al ser modelos unifactoriales toda la ETTI viene dada por los parámetros que operan en el proceso del tipo a corto, observamos dicho comportamiento. El hecho de que las pendientes de las curvas de tipos a plazo sean en general negativas, conlleva que los tipos a plazos simulados sean menores que los históricos lo cual puede llevar a una subestimación del riesgo.

El modelo de Vasicek de 2 factores proporciona en general unos tipos a corto plazo más elevados que los dos modelos unifactoriales, esto es una debilidad de dicho modelo ya que los tipos mínimos simulados son superiores a los históricos. Este hecho subestimaría el riesgo de caída de tipos de interés. Por el contrario, este modelo proporciona unas curvas a plazo más realistas, a pesar de que no es capaz de recoger el hecho de que la mayor parte de las curvas históricas tengan pendiente positiva.

Los resultados obtenidos en este apartado muestran que los modelos evaluados recogen, en general, de forma satisfactoria los movimientos del tipo a corto históricos. Sin embargo fallan para describir los tipos a muy largo plazo y las pendientes de las curvas ETTI. Los modelos unifactoriales porque restringen toda la estructura de la ETTI al proceso a corto plazo, mientras que para el modelo de 2 factores es debido a las características particulares del período analizado<sup>54</sup>. Esto puede ser

<sup>54</sup> En el periodo analizado existe un 82,22% de ETTIs con pendiente positiva o curvas normales, no existe ninguna curva invertida o con pendiente negativa, un 11,11% de curvas con joroba y un 6,675%

una debilidad de este tipo de modelos en el caso de que la compañía tenga unos flujos esperados de entrada o salida a un horizonte temporal muy lejano (compañías de seguros de vida). Para solventar este problema podríamos haber empleado un modelo sin arbitraje como el modelo BGM ya que en vez de ajustarse al tipo a corto se calibraría a los tipos *forward* del último periodo muestral y a las correlaciones y volatilidades históricas. De esta forma es de esperar que las ETTIs generadas a lo largo del periodo de simulación sean más consistentes con las históricas.

### B. Cálculo de las cargas de capital

El riesgo de tipo de interés afecta a todos los activos y pasivos cuyo valor neto sea sensible a las variaciones en la estructura temporal y que no estén relacionados con pólizas en las que el tomador asuma el riesgo de inversión. En QIS4 el capital requerido se mide a través del impacto que tienen unas variaciones predeterminadas en la curva de tipos sobre la posición neta de los flujos de efectivo de entrada (renta fija) y salida (provisiones técnicas y préstamos). La estructura de tipos alterada se deriva de la multiplicación de la curva de tipos actuales por el factor de estrés superior  $s^{up}(t)$  y por el factor de estrés inferior  $s^{down}(t)$  para cada vencimiento. Por tanto, la carga de capital para el riesgo de tipos de interés es el resultado del mayor valor entre los dos escenarios de estrés siguientes:

$$Mkt_{int}^{subida} = \Delta VAN|_{shocksubida}$$

$$Mkt_{int}^{bajada} = \Delta VAN|_{shockbajada}$$

Siendo  $\Delta VAN$ , es el cambio en el valor neto de los activos y pasivos derivados de las modificaciones en los tipos de la ETTI.

En la siguiente tabla podemos ver el desglose de flujos de activo y pasivo de una hipotética compañía, necesario para poder estimar el efecto de las variaciones en la curva de tipos

Año (Final)	Flujos de Activo	Flujos de Pasivo	
1	300	100	
2	300	150	
3		175	
4		200	VAN Excedente
VAN	561,09	553,62	7,47

---

de otras formas. Dicha afirmación se desprende del análisis de la pendiente de las ETTIs históricas evaluando las pendientes en los siguientes plazos: tipo a corto, tipo a 5 años, tipo a 10 años, tipo a 15 años y tipo a 30 años.

A continuación recogemos las curvas y los factores de descuento aplicables según QIS4.

Año (Final)	ETTI			Factores de descuento		
	Estándar	Bajada	Subida	Estándar	Bajada	Subida
1	4,70%	2,30%	9,11%	0,955	0,978	0,917
2	4,53%	2,40%	8,01%	0,915	0,954	0,857
3	4,51%	2,53%	7,62%	0,876	0,928	0,802
4	4,53%	2,63%	7,34%	0,838	0,901	0,753

Como podemos comprobar en la siguiente tabla, el escenario que le perjudica a la compañía es el de bajada de tipos de interés, ya que la variación de capital es positiva, lo que significa que el valor actual de los activos respecto al de los pasivos disminuye ante ese escenario. La compañía analizada precisará de un capital de 11,56€.

Caída	VAN Activo	VAN Pasivo	VAN Activo-Pasivo	Variación VAN
	579,36	583,44	-4,08	11,56
Subida	VAN Activo	VAN Pasivo	VAN Activo-Pasivo	Variación VAN
	532,11	511,28	20,83	-13,35

Para calcular la carga de capital resultante de aplicar un modelo interno se han realizado 10.000 simulaciones de los tipos de interés a través de los distintos modelos. Mediante la simulación estocástica de curvas de tipos de interés se puede hacer un análisis más pormenorizado de los escenarios que afectan en mayor medida a la entidad. A continuación se presentan los resultados de analizar el efecto en el excedente de la compañía analizada:

- La variación que se produce en el excedente de la compañía B al 99,5% de confianza empleando el modelo de Vasicek (1977) se eleva a 12,98 € frente a los 11,56 € del modelo estándar.
- La carga de capital resultante de emplear el modelo CIR (1985) que toma un valor de 12,46 €, cifra muy similar a la proporcionada por el anterior modelo.
- Finalmente, el capital necesario resultante de emplear el modelo de Vasicek de dos factores, que proporciona una cifra de capital de 10,54 €.

Los resultados muestran que las cargas de capital para soportar dicho riesgo son diferentes para los distintos modelos empleados. Los modelos unifactoriales empleados aumentan los requisitos de capital del modelo estándar propuesto en

QIS4. De esta forma el modelo de Vasicek estima en 12,98 € el capital necesario para soportar el riesgo de tipos de interés, el modelo CIR estima dicha cifra en 12,46 € y la fórmula estándar en 11,56 €. Por otro lado el modelo multifactorial analizado, estima una cifra de capital necesario ligeramente inferior a la fórmula estándar al cifrar los fondos necesarios en 10,54 €. Los porcentajes de incremento/decremento de los distintos modelos frente a la propuesta estándar se muestran en la siguiente tabla. Estos resultados implican que aquellas compañías que deesen utilizar un modelo propio deben validar exhaustivamente su modelo para no subestimar o sobreestimar la cantidad de capital necesaria para cubrir el riesgo de tipos de interés.

Modelo de Vasicek	Modelo CIR	Modelo de Vasicek de 2 factores
+12,28%	+7,79%	-8,82%

#### 4. MODELIZACIÓN DEL RIESGO DE SPREAD

Los *spreads* de crédito constituyen un elemento básico para la valoración de la deuda con riesgo y de los productos vinculados a eventos de crédito. En el ámbito de la valoración del riesgo de crédito se han desarrollado fundamentalmente dos metodologías alternativas de valoración: los modelos estructurales y los modelos en forma reducida. Los modelos estructurales (*structural models*<sup>55</sup>) comienzan con el trabajo de Merton (1974) y continúan con Black y Cox (1976) y Longstaff y Schwartz (1995a), entre otros. Bajo este enfoque se asume que el valor de una empresa sigue un proceso estocástico, y el incumplimiento o *default* ocurre cuando dicho valor es menor que el de la deuda emitida o cuando cae por debajo de un límite especificado. Los modelos en forma reducida (*reduced-form models*<sup>56</sup>) como los propuestos en Jarrow y Turnbull (1995), Jarrow *et al.* (1997), Duffie y Kan (1996) y Duffie y Singleton (1999) describen el evento de crédito de forma separada al valor de la compañía (exógenamente). Los modelos estructurales tienen la ventaja de que vinculan el impago de una compañía con variables específicas a ésta (valor de los activos, valor de la deuda, etc.). Sin embargo, han sido criticados porque de ellos se derivan *spreads* de crédito menores que los observados en el mercado. Por otro lado, los *spreads* resultantes de los modelos en forma reducida se ajustan mejor a los *spreads* observados en el mercado. Estos trabajos representan el punto de partida a la hora de tratar de modelizar los diferenciales de crédito dentro de un modelo interno para una compañía aseguradora.

No obstante, el análisis del riesgo de *spread* con modelos internos se basa en la simulación de su dinámica y de la evaluación del impacto de su variación sobre el valor de los activos expuestos al riesgo. Un elemento básico que deben atender

<sup>55</sup> También conocidos como *diffusion-based models*, *asset-pricing models*, *firm-value based models* o *option pricing models*.

<sup>56</sup> Estos modelos también son conocidos como *intensity models*.

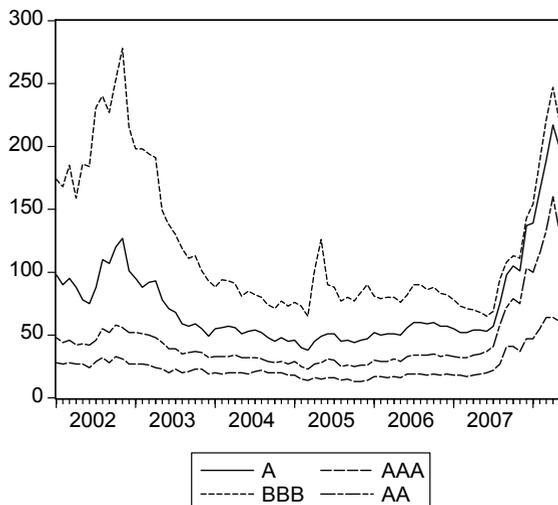
los modelos desarrollados es la adecuación al comportamiento empírico observado de la variable analizada. Por este motivo, en los siguientes apartados se analizan las características de los *spreads* y las alternativas para su modelización.

#### 4.1. Análisis empírico de los *spreads* de crédito y su reversión a la media

La lógica indica que los bonos con riesgo de crédito deben proporcionar un rendimiento superior a los bonos sin riesgo para compensar las posibles pérdidas del capital invertido. Por esta razón, un bono con riesgo crediticio con idéntico cupón y vencimiento al de un bono sin riesgo debe tener un precio inferior. La diferencia entre la rentabilidad que proporciona el bono con riesgo y el bono sin riesgo comparable es el diferencial o *spread* de crédito<sup>57</sup>. Además, en la medida en que los bonos sin riesgo no sean exactamente comparables a aquellos con riesgo, el *spread* recoge otros factores como son la liquidez, fiscalidad, etc.

##### A. Comportamiento empírico de los *spreads*

Dado que nuestro trabajo propone alternativas para la modelización de los *spreads* es necesario realizar un análisis de la serie histórica de los mismos. El gráfico inferior muestra la evolución temporal de las cuatro series analizadas en puntos básicos para el período temporal 31/12/2001-30/06/2008 para la serie de *spreads* de las categorías AAA, AA, A y BBB (79 observaciones mensuales para cada serie).



<sup>57</sup> De esta forma el diferencial o *spread* de crédito  $s(t, T)$  observado en un momento temporal  $t$  para una categoría de *rating* específica (*index credit spread*) y para un vencimiento  $T$  se calcula como la diferencia entre el tipo de interés libre de riesgo y el tipo de interés proporcionado por esa categoría de *rating*. Al mismo tiempo, se puede calcular la estructura temporal de los *spreads* o curva de diferenciales de crédito como la diferencia entre la estructura temporal de la clase de *rating* y la ETTI libre de riesgo.

En la siguiente tabla se resumen los principales estadísticos de las series analizadas. Al analizar los niveles de los *spreads* de crédito para cada categoría, apreciamos que tanto la media como la desviación típica aumentan a medida que empeora la calificación crediticia. El *spread* de crédito de un bono compensa a su poseedor por la pérdida esperada, de forma que a peor categoría de *rating* (indicador del riesgo de crédito) mayor será el *spread* requerido. Además, se observa como la volatilidad de los *spreads* aumenta para los bonos peor calificados. Este resultado es consistente con la evidencia empírica mostrada en Duffee (1998) e indica una mayor heterogeneidad a medida que empeora la calificación, es decir, no todos los bonos dentro de una misma categoría tienen el mismo riesgo de *spread*. Esta característica también es encontrada en la serie analizada en Longstaff y Schwartz (1995a)<sup>58</sup>. La ausencia de normalidad de los *spreads* se verifica a través del test de Jarque Bera. Para cada una de las series de la muestra la hipótesis nula de normalidad se rechaza al 1 por ciento. Las series, dentro de cada nivel poseen una asimetría distinta de cero y una curtosis mayor a tres. Finalmente se observa que el primer coeficiente de autocorrelación de las series de *spreads* es relativamente elevado. Todos estos aspectos observados deberán ser tenidos en cuenta a la hora de seleccionar el modelo que simule la dinámica de los *spreads*.

Si en lugar de analizar la evolución del valor de los *spreads* nos centramos en las variaciones absolutas, a nivel de cada categoría, apreciamos que la media es ligeramente positiva para todos los *ratings* analizados. Esto indica una leve tendencia al alza en los niveles de *spread*, en particular a partir de marzo de 2007. Asimismo, las autocorrelaciones son positivas pero de pequeña magnitud<sup>59</sup>. Observando los coeficientes de curtosis y asimetría, y el test de Jarque-Bera podemos concluir que los cambios en los *spreads* no están normalmente distribuidos.

Finalmente se analizan las variaciones logarítmicas dentro de cada categoría de *rating*. Los coeficientes de asimetría y curtosis difieren de los de una distribución normal y por tanto se rechaza la hipótesis de que los *spreads* estén distribuidos lognormalmente, hipótesis en la que se basa actualmente QIS 4 para el cálculo del capital asociado al riesgo de *spread* ( $MKT_{sp}$ )<sup>60</sup>.

---

<sup>58</sup> Los autores calculan los *spreads* mensuales para el periodo Abril 1977 a Diciembre 1992 (190 observaciones) para distintas calificaciones crediticias de tres industrias distintas (sector industrial, sector ferrocarril y utilities) empleando la fuente Moody's.

<sup>59</sup> Duffie (1998) encuentra autocorrelaciones positivas y negativas dentro de las distintas categorías de *rating* e industrias analizadas (sector financiero, sector industrial y sector utilities), sin embargo en la mayor parte son positivas. Para ello emplea series mensuales para el período Enero 1985 a Febrero 1995 y con fuente Lehman Brothers.

<sup>60</sup> La calibración del modelo lognormal se realizó en QIS3 empleando los *spreads* de Moody's para el periodo 1991-2006. Este modelo fue elegido al observarse que los mayores diferenciales estaban asociados con los mayores cambios absolutos.

Serie	Estadística	AAA	AA	A	BBB
Niveles de spreads (puntos básicos)	Media	25,18	46,73	77,03	123,48
	Desv. típica	12,62	29,38	42,07	57,81
	Mediana	20,00	34,00	57,00	93,00
	Máximo	64,00	160,00	217,00	278,00
	Mínimo	13,00	23,00	38,00	65,00
	Asimetría	1,91	2,22	1,88	0,97
	Curtosis	5,89	7,20	5,97	2,58
	Jarque-Bera	75,66	123,13	75,50	12,84
	Prob.	0,000000	0,000000	0,000000	0,001630
	$\rho(1)$	0,809	0,814	0,787	0,911
Cambios en los spreads ( $\Delta S_{t+1} = S_{t+1} - S_t$ )	Media	0,42	1,09	1,45	0,49
	Desv. típica	3,06	7,07	9,71	17,02
	Máximo	14,00	28,00	36,00	47,00
	Mínimo	-4,00	-28,00	-26,00	-63,00
	Asimetría	1,88	0,92	1,04	-0,24
	Curtosis	8,23	10,11	5,79	5,47
	Jarque-Bera	134,71	175,24	39,44	20,57
	Prob.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000034
	$\rho(1)$	0,035	0,048	0,225	0,104
Cambios en el logaritmo ( $\Delta S_{t+1} = \ln(S_{t+1}/S_t) * 100$ )	Media	0,0100	0,0131	0,0098	0,0025
	Desv. típica	0,105	0,097	0,099	0,119
	Asimetría	0,86	0,91	0,66	0,64
	Curtosis	4,80	4,77	3,94	5,31
	Máximo	0,42	0,35	0,30	0,44
	Mínimo	-0,19	-0,19	-0,23	-0,34
	Jarque-Bera	20,11	20,94	8,58	22,72
	Prob.	0,000043	0,000028	0,013729	0,000012
	$\rho(1)$	-0,040	0,106	0,253	0,114

### B. La reversión a la media de los spreads

Desde un punto de vista teórico, se asume que los diferenciales de crédito presentan reversión a la media a largo plazo debido a que dependen del entorno económico. Durante los periodos de desaceleración económica los *spreads* de crédito tienden a aumentar, mientras que en los periodos de crecimiento se reducen<sup>61</sup>.

<sup>61</sup> Arak y Corcoran (1996) encuentran evidencia empírica de que los *spreads* de crédito están negativamente correlacionados con la actividad económica y con su tendencia. De esta forma los *spreads* tienden a reducirse en las situaciones en las que la actividad económica es elevada o está expandiéndose.

Para comprender dicho razonamiento es útil tener en consideración los siguientes factores. Los factores más importantes son la probabilidad de impago y la pérdida esperada una vez que se produce el impago. Ambos factores afectan a la prima de riesgo que exigirá el inversor para ser compensado por la pérdida potencial. Además, otro factor que afecta al *spread* es la liquidez, en la medida en que las emisiones con riesgo tengan menor liquidez que las del Estado. De esta forma, el vínculo entre los *spreads* y el ciclo económico viene determinado por el aumento del riesgo de impago (*default risk*) en entornos económicos desfavorables que elevan la prima necesaria para asumir el riesgo de crédito y finalmente, los efectos de liquidez en la medida en que los inversores deseen mantener instrumentos más líquidos en periodos de recesión.

Desde un punto empírico las series temporales de *spreads* pueden tardar años en revertir a su media a largo plazo. A continuación vamos a investigar si las series analizadas muestran reversión a la media en el período temporal analizado<sup>62</sup>. Para ello realizamos la siguiente regresión de los cambios en los *spreads* ante su nivel<sup>63</sup>:

$$\Delta S_{t+1} = S_{t+1} - S_t = a + bS_t + \varepsilon_{t+1}$$

Donde  $s_t$  es el valor del spread en el período anterior y  $\varepsilon_{t+1}$  es el error de la regresión. Para que exista reversión a la media, el coeficiente  $b$  debe ser negativo, además el valor de  $-b$  indica la tasa o velocidad a la que el spread de crédito reierte a su media a largo plazo, siendo esta última  $-a/b$ . Los resultados de la estimación de la regresión para cada una de las categorías de rating se muestran en la siguiente tabla.

Rating	$a$	$T$	Prob.	$b$	$t$	Prob.	Velocidad ( $-b$ )	Media ( $-a/b$ )
AAA	-2,0E-05	-0,250	0,803	0,026	0,889	0,377		
AA	-2,6E-05	-0,167	0,868	0,031	1,070	0,288		
A	-1,9E-04	-0,787	0,434	0,046	1,642	0,105		
BBB	4,5E-04	0,985	0,328	-0,033	-0,951	0,345	3,36%	1,37%

<sup>62</sup> Los *spreads* de crédito recogen el riesgo de crédito y la prima por liquidez. Los cambios en el riesgo de crédito fluctúan con los cambios en las variables económicas reales como los ciclos económicos y son duraderos a largo plazo, mientras que los cambios en la prima por liquidez dependen de los sentimientos del mercado siendo más volátiles y su duración se mide en meses. Por eso es razonable pensar que la velocidad de reversión a la media del componente de liquidez es mayor que el de crédito. De esta forma si analizamos una serie temporal larga, dado que los bonos con mejor calidad crediticia tienen un mayor componente de liquidez en sus *spreads*, es de esperar intuitivamente que reiertan a su media a largo plazo antes que aquellos con peor calificación (Prigent *et al.* 2001). Este hecho no es encontrado en nuestra serie.

<sup>63</sup> Longstaff y Schwartz (1995b) encuentran reversión a la media en las variaciones logarítmicas de los *spreads* de crédito, por lo que proponen un proceso Ornstein-Uhlenbeck para su modelización.

Los resultados obtenidos al estudiar este breve período histórico, en el que además existe un importante incremento de los *spreads* desde Marzo de 2007, reflejan dos hechos importantes. Primero, que los coeficientes de las regresiones no sean muy significativos y, segundo, que los coeficientes de pendiente de las regresiones sean positivos excepto en el caso de la categoría BBB. Por eso nos vamos a centrar en dicha categoría, ya que es la única serie en la que se constata la reversión a la media. La velocidad de reversión mensual de los *spreads* BBB a su media a largo plazo (1,37%) es del 3,36% en términos mensuales. Sin embargo dicha regresión no se ajusta bien a las observaciones, en la medida en que la varianza explicada es del 1,19% (Coeficiente de determinación  $R^2$ ). Esto significa que domina el término de error o ruido sobre el efecto de reversión, lo que puede ser debido al reducido período de análisis, que dificulta reconocer el efecto de lenta reversión a la media, y al incremento notable en los niveles de los *spreads*.

#### 4.2. Modelización del riesgo de spread

Respecto al riesgo de *spread*, son muy pocos los estudios que han tratado de modelizar su dinámica. Siguiendo la propuesta de QIS4, una alternativa sería la aplicación del modelo lognormal para cada clase de *rating*. La distribución lognormal presenta la ventaja de generar *spreads* positivos, sin embargo una crítica frecuente es que asigna una baja probabilidad a grandes movimientos que se dan con relativa frecuencia en la realidad de los mercados de crédito. Los grandes cambios en los *spreads* son más comunes en los títulos individuales que en los índices, pero a nivel agregado todavía ocurren con una mayor frecuencia que la que predice la distribución lognormal. Por ello es conveniente emplear otras especificaciones diferentes a la utilizada en el modelo estándar. Al igual que ocurre para el comportamiento de los rendimientos de los activos de renta variable, si se desean captar ciertas características observadas a nivel empírico, como la leptocurtosis o la heterocedasticidad, será preciso recurrir a técnicas alternativas que provienen del análisis de series temporales. Así, Pedrosa y Roll (1998), en un intento de captar la leptocurtosis observada en los *spreads*, modelizan las variaciones logarítmicas a través de una mixtura de distribuciones normales. Los datos utilizados corresponden a los *spreads* diarios con datos procedentes de Bloomberg para bonos con grado de inversión entre Octubre de 1995 y Marzo de 1997. Posteriormente, Bierens *et al.* (2005) emplean un modelo autorregresivo con variables dependientes, heterocedasticidad condicional y saltos (*ARX(1)-ARCH(1)-Jump model*) para modelizar las variaciones logarítmicas diarias de los *spreads* en el período, diciembre de 1996 y Agosto de 2002. De este modo, tratan de recoger el comportamiento empírico observado, donde destaca la dependencia serial, el efecto de variables externas, la heterocedasticidad y la posibilidad de que se produzcan saltos en el nivel de *spreads*.

No obstante, teniendo en cuenta que los *spreads* son una parte integrante del tipo de interés, parece oportuno extender los modelos de tipos de interés al análisis del comportamiento de los *spreads*. De este modo, la proyección de los *spreads* se realizaría atendiendo a los principios considerados para los tipos de interés (rever-

sión a la media, no negatividad, heterocedasticidad, etc.). En este sentido, Prigent *et al.* (2001) emplean los datos de los niveles de *spreads* agregados de crédito de Moody's con observaciones diarias entre enero de 1986 a Marzo de 2000 (3561 observaciones) para estimar los parámetros de modelos del tipo CKLS (1992) y un modelo de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con saltos simétricos<sup>64</sup>. En el ámbito de generación de escenarios económicos para las compañías aseguradoras, Pauling (2002)<sup>65</sup> propone en base al análisis de los datos históricos emplear un modelo CIR (1985b) o proceso de la raíz cuadrada para simular los futuros caminos de los *spreads*. Por lo tanto, podemos concluir que aunque los modelos CKLS han sido originariamente creados para modelizar las dinámicas de los tipos a corto, también pueden ser empleados en la generación de escenarios de *spreads*. Esta será la alternativa que empleemos a continuación, comparándolo con la propuesta del modelo lognormal.

#### 4.3. Determinación del capital necesario a través de modelos alternativos al estándar

El riesgo de diferencial de crédito o *spread* mide la sensibilidad del valor de los activos, pasivos e instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los diferenciales de crédito en relación con la estructura temporal de tipos de interés sin riesgo. En este apartado vamos a comparar los resultados de simular los *spreads* de crédito mediante los modelos considerados en CKLS (1992), en relación al modelo lognormal, que es en el que está basado el estándar de Solvencia II. Los *spreads* simulados pueden ser utilizados para analizar el impacto sobre el valor de los instrumentos sometidos a riesgo de crédito, y consecuentemente, para determinar las necesidades de capital. La estimación de los parámetros de los diferentes modelos se ha obtenido a través del ajuste a la serie de *spreads* para la categorías de rating BBB durante el periodo temporal 31/12/2001 a 30/06/2008. Para realizar la estimación de los modelos empleamos la siguiente discretización aproximada<sup>66</sup> del modelo CKLS en tiempo continuo:

$$s_{t+1} - s_t = \alpha + \beta s_t + \varepsilon_{t+1}$$

Con  $E(\varepsilon_{t+1}) = 0$  y  $E(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma^2 s_t^{2\gamma}$ .

<sup>64</sup> Encuentran que para el spread Aaa el modelo de tipo CKLS que mejor se ajusta es el de Vasicek (1977), mientras que para el spread Baa es Brennan y Schwartz (1980). También encuentran evidencia empírica para el modelo con saltos.

<sup>65</sup> Emplea los datos mensuales de Moody's de Febrero de 1977 a Septiembre de 2002 para calibrar el modelo CIR (1985b) y generar los *spreads* en 100 escenarios para un horizonte temporal de 10 años (simulación mes a mes).

<sup>66</sup> El modelo discreto exacto es  $r_{t+1} = e^{\beta} r_t + \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta} - 1) + \varepsilon_{t+1}$  con  $E(\varepsilon_{t+1} \varepsilon_{s+1}) = 0, s \neq t$  y  $E(\varepsilon_{t+1}^2) = \frac{\alpha^2}{2\beta} (e^{\beta} - 1) r_t^{2\gamma}$ . La expresión aproximada se obtiene dado que la función  $e^{\beta}$  toma el valor  $e^{\beta} = 1 + \beta$  en valores próximos de  $\beta = 0$ . De esta forma la diferencia entre la discretización exacta y la aproximada será mayor cuanto mayor sea el valor absoluto del parámetro  $\beta$ . En general, el error de dicha aproximación será menor cuando la discretización sea realizada sobre periodos cortos de tiempo.

A partir de las restricciones anteriormente expuestas se estiman los parámetros de siete de los modelos expuestos anteriormente mediante máximo verosimilitud, obteniendo los resultados expuestos en la siguiente tabla.

Modelo	$\alpha$	$\beta$	$\sigma^2$	$\gamma$
Merton	0,000049	0	0,000003	0
Vasicek	0,000459	-0,033563	0,000003	0
CIR SR	0,000378	-0,026891	0,000191	0,5
Dothan	0	0	0,016070	1
GBM	0	0,009823	0,016070	1
Brennan-Schwartz	0,000448	-0,033721	0,015823	1
CIR VR	0	0	1,658125	1,5

Estos parámetros son empleados para la simulación de las trayectorias mensuales de los *spreads* a lo largo de un año, conjuntamente con los resultados obtenidos a través de un modelo lognormal. Recordemos que en este modelo, los parámetros necesarios para simularlo (media y volatilidad) coinciden con los calculados directamente a partir de las variaciones logarítmicas de los *spreads* históricos. El *spread* futuro del modelo lognormal se determina como:  $CS_1 = CS_0 \cdot e^X$ , donde  $X$  sigue una distribución  $N(\mu; \sigma^2)$ <sup>67</sup>.

En la siguiente tabla se muestran los estadísticos resumen de los *spreads* teóricos incluidos en la calificación BBB y los ocho modelos empleados en la simulación. Para ello se han realizado 10.000 simulaciones de tipo Latino-Hipercúbico para cada uno de los 12 meses simulados. Los modelos del tipo CKLS que se ajustan mejor al comportamiento histórico son aquellos que suponen que la volatilidad condicional de los cambios en los *spreads* es constante (Merton y Vasicek) o proporcional a la raíz cuadrada de su nivel (CIR-SR). El resto de los modelos, al suponer heterocedasticidad dan lugar a escenarios de *spread* más elevados, a pesar de que los valores medios y los percentiles 75 y 90 presentan niveles bastante ajustados a los históricos. Por otra parte, el modelo lognormal, en el que se basa la fórmula estándar de QIS4, al igual que ocurre con los modelos heterocedásticos, proporciona mayores valores de los *spreads* para los percentiles elevados.

<sup>67</sup> En nuestro caso se toman como valores la media histórica (0,0025) y su desviación típica (0,119). Siguiendo el modelo lognormal el *spread* de crédito a 12 meses se puede escribir como:  $CS_{12}(t) = CS_{11}(t)e^X$  siendo  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Por lo que:  $X = \ln\left(\frac{CS_{12}(t)}{CS_{11}(t)}\right) \approx \frac{CS_{12}(t) - CS_{11}(t)}{CS_{11}(t)}$  cuando  $\frac{CS_{12}(t) - CS_{11}(t)}{CS_{11}(t)} \approx 0$ . Por lo que el modelo lognormal relaciona el cambio absoluto en los *spreads* de crédito,  $CS_{12}(t) - CS_{11}(t)$  de forma lineal con el nivel actual del *spread* de crédito  $CS_{11}(t)$ .

Estadística	Histórico	Vasicek	CIR-SR	Merton	Brennan-Schwartz	Dothan	BGM	CIR-VR	Lognormal
Mínimo	0,65%	-0,14%	0,47%	0,03%	0,41%	0,36%	0,50%	0,34%	0,62%
Media	1,23%	1,97%	2,01%	2,15%	1,97%	2,12%	2,26%	2,12%	2,27%
Máximo	2,78%	3,41%	4,15%	3,93%	5,73%	7,46%	7,81%	25,47%	9,11%
Desv est.	0,58%	0,39%	0,46%	0,44%	0,60%	0,71%	0,78%	1,28%	0,76%
Rango	2,13%	3,55%	3,68%	3,90%	5,32%	7,10%	7,32%	25,13%	8,50%
Moda	0,80%	2,04%	2,35%	2,27%	2,14%	1,84%	1,82%	1,59%	1,85%
Percentil 5	0,68%	1,30%	1,26%	1,42%	1,10%	1,11%	1,23%	0,88%	1,28%
Percentil 10	0,71%	1,47%	1,43%	1,60%	1,25%	1,30%	1,42%	1,04%	1,46%
Percentil 25	0,80%	1,73%	1,71%	1,89%	1,55%	1,66%	1,77%	1,37%	1,79%
Percentil 75	1,68%	2,22%	2,28%	2,40%	2,31%	2,46%	2,60%	2,49%	2,59%
Percentil 90	2,15%	2,45%	2,58%	2,70%	2,71%	3,02%	3,23%	3,31%	3,20%
Percentil 95	2,31%	2,59%	2,79%	2,91%	3,02%	3,45%	3,72%	4,12%	3,67%
Percentil 99	2,53%	2,90%	3,20%	3,27%	3,74%	4,36%	4,90%	7,03%	4,86%
Percentil 99,5	2,53%	2,99%	3,33%	3,44%	4,01%	4,85%	5,42%	8,79%	5,36%

Centrándonos exclusivamente en los resultados del *spread* en el último período, que es el momento en el que hay que evaluar las necesidades de capital, los resultados obtenidos se mantienen, de modo que los *spreads* generados a partir de Merton, Vasicek y CIR-SR son los que logran unos niveles más realistas respecto a los históricos.

	Vasicek	CIR-SR	Merton	Brennan-Schwartz	Dothan	BGM	CIR-VR	Lognormal
Media	1,87%	1,92%	2,18%	1,86%	2,12%	2,40%	2,10%	2,40%
Percentil 95	2,67%	2,93%	3,15%	3,25%	3,99%	4,52%	5,35%	4,42%
Percentil 99	3,01%	3,39%	3,62%	4,24%	5,31%	5,55%	9,68%	5,70%
Percentil 99,5	3,14%	3,66%	3,71%	4,79%	5,60%	6,19%	13,75%	6,34%

### **Cálculo de la carga de capital**

A continuación se expone el cálculo del capital necesario para una obligación con valor de mercado de 100€ con calificación BBB y duración modificada de 4 años. Aplicando la fórmula estándar de QIS4, la carga de capital sería:

$$Mkt_{SP}^{RF} = \sum_t VM_i \cdot m(\text{dur}_i) \cdot F(\text{rating}_i) + \Delta \text{Pasivo}_{ul} = 100 \cdot 4 \cdot 0,0125 = 5€$$

Para calcular la carga de capital resultante de las distintas especificaciones a considerar en un modelo interno se han realizado 10.000 simulaciones de los *spreads* a través de los distintos modelos. Mediante los *spreads* generados se puede analizar la repercusión sobre el precio del bono analizado con anterioridad. De este modo, el efecto del riesgo de *spread* al cabo de 12 meses se estima a través de los cambios en el precio del bono para lo que se emplea la siguiente ecuación:

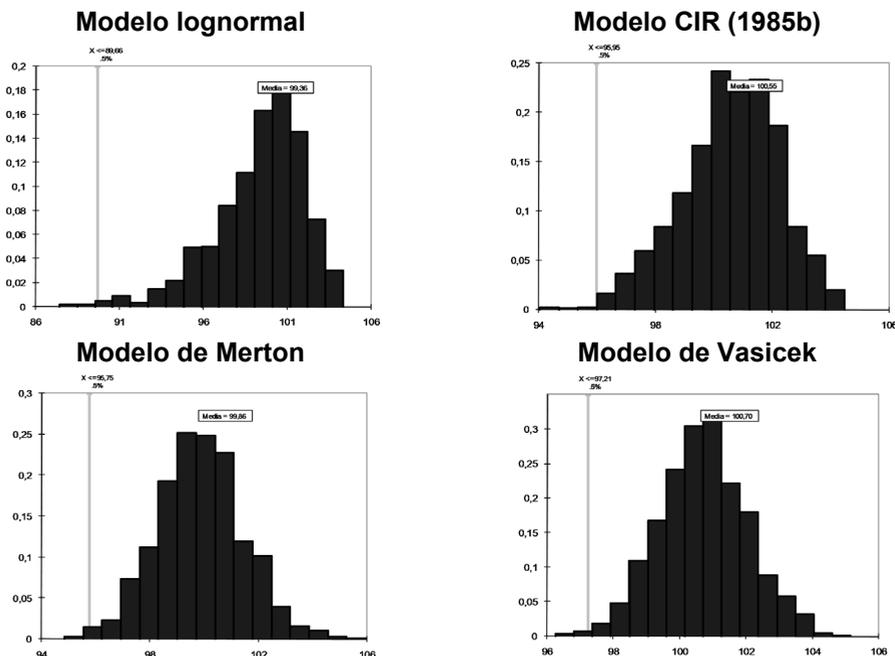
$$P_{12} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r+CS_{12})}$$

Donde:

- $P_{12}$  es el precio del bono en el mes 12
- $CF_f$  es el flujo de caja del bono
- $r$  es la tir libre de riesgo
- $CS_{12}$  es el spread simulado en el mes 12

En los gráficos inferiores se muestra el precio del bono para un nivel de confianza del 99,5% para los escenarios generados empleando el modelo lognormal, CIR-SR, Merton y Vasicek. En línea con los resultados obtenidos anteriormente el modelo lognormal es el que provoca una mayor pérdida en el valor del bono. El VaR (99,5%) empleando este modelo es de 10,34€. El siguiente modelo que asigna una mayor carga de capital es el modelo de Merton, que provoca una cantidad de capital asociada al riesgo de spread de 4,25€. El modelo CIR (1985b) determina el capital necesario en niveles similares al anterior al asociar una carga de capital de 4,05€. Finalmente el modelo de Vasicek es el que proporciona una menor cifra de recursos necesarios al estimar éstos en 2,71€.

Los resultados muestran que los niveles de *spreads* simulados y las cargas de capital para soportar dicho riesgo son muy dependientes del modelo empleado. Esto implica que aquellas compañías que deseen utilizar un modelo propio deben validar exhaustivamente su modelo para no subestimar o sobreestimar la cantidad de capital necesaria para cubrir el riesgo en el entorno actual de elevada volatilidad.



## 5. MODELIZACIÓN DEL RIESGO DE QUIEBRA DE LA CONTRAPARTE

El análisis del riesgo de quiebra de la contraparte ha sido abordado tanto en la regulación de los requerimientos de capital del sistema financiero como del sector asegurador (Basilea II y Solvencia II), mediante la distribución de Vasicek (véase Vasicek, 1897, 1991). Sin embargo, debe advertirse que si bien en Basilea II el modelo de Vasicek se considera una alternativa de modelos de rating internos (IRB o *Internal Rating Based*)<sup>68</sup>, en Solvencia II es el modelo estándar propuesto actualmente por el CEIOPS. El modelo de Vasicek posee dos características que han favorecido su adopción en ambas regulaciones. En primer lugar, el modelo considera que dado que en la realidad económica los incumplimientos entre distintas contrapartes no son independientes, es necesario incorporar la correlación entre los fallidos. Esto implica que si una compañía tiene un incumplimiento o *default*, probablemente el “estado de la economía” no es bueno, por lo que aumentará la probabilidad de incumplimiento para cualquier otra exposición. Además, la segunda característica importante es que el modelo tiene solución analítica para el riesgo de contraparte cuando el número de exposiciones tiende a infinito.

El análisis de riesgo de *default* o de contraparte de una exposición con un determinado horizonte temporal es una función dependiente de tres variables: probabilidad de incumplimiento o fallo (*PD* o probability of default), exposición (*EAD* o exposure at default) y severidad (*LGD* o loss given default). El producto de estas tres variables constituyen la distribución de pérdidas que en general no es conocida pero se sabe que es muy asimétrica. Por tanto, la distribución de pérdidas tiene un sesgo positivo indicando cierta probabilidad de experimentar pérdidas extremas. En general, para identificar la distribución y los percentiles de pérdida se pueden utilizar dos métodos: el método analítico y la simulación. El método analítico consiste en identificar la distribución de pérdida para calcular el percentil deseado (Valor en Riesgo). El método de simulación de Monte Carlo genera números aleatorios que determinan el cumplimiento o incumplimiento de cada exposición y posteriormente la pérdida de cada una de ellas. Posteriormente se agregan para obtener la distribución de pérdidas agregadas, sobre la cual se calcula el percentil deseado. En general los modelos de riesgo de crédito consideran a la exposición y severidad como fijas, por lo que la única fuente de aleatoriedad es el número de fallidos.

La probabilidad de *default* (*PD*)<sup>69</sup> es la probabilidad de que una exposición produzca un incumplimiento en el horizonte temporal analizado. Es decir, dada una variable aleatoria  $X_i$  definida como

$$X_i = 1, \text{ si hay incumplimiento}$$

$$X_i = 0, \text{ si no hay incumplimiento}$$

---

<sup>68</sup> El modelo estándar de Basilea II es un modelo que clasifica las exposiciones al riesgo crediticio en diversas categorías. Posteriormente calcula la carga crediticia como los activos ponderados por riesgo (que es el importe de la exposición por el peso de riesgo de esa categoría que evolucionan desde el 0% al 100%) por un factor de carga del 8%.

<sup>69</sup> Las fuentes de estimación de la probabilidad de *default* pueden provenir de fuentes externas, modelos estadísticos o de la experiencia de una compañía.

Entonces para una exposición dada<sup>70</sup>:

$$P(X_i = 1) = PD$$

$$P(X_i = 0) = 1 - PD$$

La variable  $X_i$  sólo recoge si una contraparte ha incumplido, pero no considera el impacto económico del incumplimiento. Dicho impacto viene dado por la pérdida en caso de incumplimiento (*loss at default*), que es el producto de la exposición y la severidad. Cuando se produce el incumplimiento de una contraparte no necesariamente se pierde la cantidad total expuesta sino que es frecuente perder sólo una fracción debido al proceso de recuperación. El porcentaje de la cantidad expuesta (saldo en *default* o *EAD*) que se pierde en caso de incumplimiento es la severidad (*LGD*). Por lo tanto, la severidad establece en tanto por ciento la pérdida estimada, siendo el complementario de la tasa de recuperación<sup>71</sup>.

$$LGD = 1 - \text{tasa de recuperación}$$

La exposición en el momento del incumplimiento (*EAD*) es la cantidad expuesta o máxima perdida en caso de que se produzca un incumplimiento, es decir, es el importe monetario perdido bajo una severidad del 100%. Por lo tanto, la pérdida efectiva en una exposición es la verdadera pérdida que se obtiene en caso de incumplimiento de la contraparte, calculándose como el producto del porcentaje perdido (severidad) y la cantidad expuesta (exposición). En principio, cada exposición tiene una probabilidad de default específica con su correspondiente variable aleatoria  $X_i$ , cantidad expuesta ( $EAD_i$ ) y severidad ( $LGD_i$ ). Por lo tanto, la pérdida asociada ( $L_i$ ) a una exposición *i-ésima* viene dada por el producto de las tres variables, es decir<sup>72</sup>:

$$L_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot X_i$$

Supongamos una cartera de exposiciones con riesgo de contraparte, donde el número de exposiciones lo denotamos por  $N$ . El número de incumplimientos totales,  $X_T$ , registra el número de incumplimientos de la cartera que se producen dentro del horizonte temporal fijado, es decir<sup>73</sup>:

$$X_T = \sum_{i=1}^N X_i$$

---

<sup>70</sup> Por lo que la variable aleatoria  $X_i$  es una variable Bernoulli con probabilidad de éxito (incumplimiento)  $PD$ .

<sup>71</sup> Por lo tanto es obvio que la suma de la tasa de recuperación más la severidad es igual a uno.

<sup>72</sup> Por lo que en caso de incumplimiento, la pérdida es  $L_i = EAD_i \cdot LGD_i$  y si no hay *default* la pérdida es cero.

<sup>73</sup> Dadas que las probabilidades de que se produzca incumplimiento de cada contraparte (las distintas  $X_i$ ) no tienen la misma probabilidad, y dado que dichas probabilidades no suelen ser variables independientes, aunque cada una de las variables  $X_i$  es Bernoulli, la variable  $X_T$  no es una variable binomial. Sin embargo, es frecuente agrupar las exposiciones en bloques homogéneos en los que cada una de las contrapartes tiene la misma *probabilidad de default*. En ese caso, las variables aleatorias  $X_i$  están idénticamente distribuidas pero, en general, no serán independientes.

La variable  $L_T$  representa la pérdida total por incumplimientos, calculándose como la suma de las pérdidas individuales,

$$L_T = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N EAD_i \cdot LGD_i \cdot X_i$$

Por lo tanto podemos simular la pérdida total de la cartera, simulando para las  $N$  exposiciones la situación de incumplimiento. En caso de que una exposición caiga en incumplimiento, la exposición se multiplicará por la severidad correspondiente para obtener el valor de la pérdida de dicha exposición. El valor total de pérdida para esa simulación se obtendrá sumando los valores de pérdida individuales de las  $N$  exposiciones. El anterior procedimiento debe ser realizado un número elevado de veces para obtener la distribución de pérdida total por incumplimiento.

Podemos definir la tasa de impago ( $M_r$ ) como la variable aleatoria que representa la ratio de incumplimientos medida como el número de impagos entre el número de exposiciones, es decir  $M_r = \frac{X_T}{N}$ . La morosidad es la variable aleatoria que representa el porcentaje de incumplimientos que pueden darse en una cartera en función de las unidades monetarias, es decir  $M_d = \frac{L_T}{EAD_i \cdot LGD_i \cdot N}$ .

### 5.1. Modelo de fallidos independientes

El modelo de Vasicek se ha convertido en una pieza esencial en la determinación del riesgo de crédito de contraparte en Basilea II y Solvencia II. Dada una cartera de  $N$  exposiciones, el riesgo de contraparte consiste en analizar probabilísticamente las pérdidas asociadas a los potenciales impagos de dichas contrapartes. Para ello, en el modelo de Vasicek se forman subcarteras homogéneas en donde se considera la interrelación entre los posibles incumplimientos. Pero antes de introducir la dependencia entre fallidos, es útil establecer inicialmente el modelo que se obtendría en el caso de que los fallidos fuesen independientes.

Supongamos una cartera homogénea con  $N$  exposiciones, todas con la misma probabilidad de incumplimiento ( $PD$ ), severidad ( $LGD$ ) y exposición ( $EAD$ ). El objetivo es comprender la distribución de probabilidad de la variable  $L_T$  o de forma equivalente de proporción de incumplimientos  $M_d$ , es decir:

$$P(L_T \leq x) \text{ para } x \geq 0$$

$$P(M_d \leq x) \text{ para } 1 \geq x \geq 0$$

Como hemos visto anteriormente podemos centrarnos en la distribución de probabilidad de la variable  $M_d$  que determina la proporción de incumplimientos, ya que a partir de ésta se obtiene fácilmente la distribución de de la variable  $L_T$ . Po-

demos definir el percentil  $\alpha$  de  $M_d$  como el  $VaR_\alpha$  de la distribución y por tanto:<sup>74</sup>  $P(M_d \geq VaR_\alpha) = 1 - \alpha$ . Lo que en términos económicos indica que existe una probabilidad de  $1 - \alpha$  de que las pérdidas por impago superen el nivel de  $VaR_\alpha$ . Asimismo, podemos definir el TailVar al nivel  $\alpha$  como la pérdida esperada condicionada a que su valor sea superior al  $VaR_\alpha$ , es decir  $TailVaR_\alpha = E(M_d | M_d \geq VaR_\alpha)$ .

Suponiendo que los incumplimientos entre las distintas contrapartes son independientes, entonces el número de incumplimientos totales  $X_T = \sum_{i=1}^N X_i$  es una variable binomial de  $N$  repeticiones y probabilidad de éxito (incumplimiento)  $PD$ , por lo que su distribución es  $X_T \sim Binomial(N, PD)$ . De esta forma la morosidad en función del número de incumplimientos ( $M_r = \frac{X_T}{N}$ ) es aproximadamente una variable normal con media  $PD$  y desviación  $\sqrt{\frac{PD(1-PD)}{N}}$ <sup>75</sup>. Esto se debe a que si los eventos de incumplimiento son independientes, la distribución de pérdidas converge por el teorema central del límite a una distribución normal a medida que  $N$  aumenta. Por lo tanto, la distribución de probabilidad de  $M_r$  vendrá dada por:

$$P(M_r \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - PD}{\sqrt{\frac{PD(1-PD)}{N}}}\right)$$

Siendo  $\Phi$  la función de distribución de la normal estándar, y por tanto podríamos aproximar el  $VaR_\alpha$  y el  $TailVaR_\alpha$  mediante las siguientes expresiones:

$$VaR_\alpha(M_r) \approx PD + \sqrt{\frac{PD(1-PD)}{N}} \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$TailVaR_\alpha(M_r) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)} \exp^{-\frac{1}{2}(var_\alpha^2)}$$

Por lo que a partir del  $VaR_\alpha(M_r)$  o el  $TailVaR_\alpha(M_r)$  obtendríamos fácilmente el  $VaR_\alpha(L_T)$  o el  $TailVaR_\alpha(L_T)$ . Sin embargo, en la práctica los incumplimientos no son independientes, por lo que las condiciones para el teorema central del límite no son satisfechas y la distribución de  $L_T$  no es asintóticamente normal. Sin embargo, como veremos a continuación bajo determinadas circunstancias converge a una determinada distribución que es la distribución de Vasicek.

## 5.2. Modelo de fallidos dependientes

El riesgo de crédito, a semejanza del riesgo de mercado, se puede descomponer en dos elementos: riesgo sistemático o no diversificable y riesgo individual o diver-

<sup>74</sup> Debe advertirse que no es un verdadero VaR ni TVaR ya que  $M_d$  no indica unidades monetarias sino porcentajes.

<sup>75</sup> La aproximación  $M_r \sim Normal\left(PD, \sqrt{\frac{PD(1-PD)}{N}}\right)$  sólo es válida para  $N$  elevado.

sificable. Para medir el riesgo sistemático se puede emplear la dependencia entre una exposición individual y el entorno económico, para lo que es habitual utilizar la correlación lineal. Por tanto, en vez de representar el incumplimiento en términos de  $PD$  nos va a ser útil representarlo en términos de una variable normal, lo que permitirá imponer una estructura de dependencia de forma sencilla. Por lo tanto, a cada variable aleatoria  $X_i$  le asociamos una variable normal estándar  $Z_i$  de manera que denotamos  $\beta = \Phi^{-1}(PD)$ , entonces<sup>76</sup>:

$$X_i = 1 \text{ si } Z_i \leq \beta \quad (\text{incumplimiento})$$

$$X_i = 0 \text{ si } Z_i > \beta \quad (\text{no hay incumplimiento})$$

De esta forma podemos establecer la dependencia entre los incumplimientos imponiendo una correlación positiva  $\rho$  entre cada par de variables  $Z_i$ . La estructura de las variables  $Z_i$  se puede escribir como:

$$Z_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1 - \rho}W_i^{77} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

Donde  $Y$  y  $W_i$  son variables normales independientes estándar. Este modelo es un modelo unifactorial, lo que equivale a suponer que los diferentes elementos comunes que inciden en la economía en lo referente al riesgo de crédito, están dirigidos por un mismo factor de riesgo  $Y$ . La variable  $Y$  (*systematic o idiosyncratic factor*) representa un factor común a todas las exposiciones, lo que se conoce como el “estado de la economía” en un momento temporal concreto<sup>78</sup>. Por lo tanto el término  $\sqrt{\rho}Y$  es la exposición de la compañía al factor común. Las variables  $W_i$  representan la incertidumbre intrínseca del incumplimiento de la exposición  $i$ -ésima, por lo que  $\sqrt{1 - \rho}W_i$  representa el riesgo específico de la compañía.

La simulación del modelo anterior para obtener muestras de la variable  $M_r$  se realizaría en el caso general ( $0 < \rho < 1$ ) como:

- Obtener una muestra de la normal estándar  $Y$ , que representa el estado de la economía.

<sup>76</sup> Es equivalente a simular el incumplimiento de la  $i$ -ésima contrapartida lanzando una Uniforme  $[0,1]$  y si su valor es inferior a  $PD$  entonces la contraparte incumpliría y si es superior no incumpliría, o podemos simular una muestra de una normal estándar y si su valor es inferior a  $\beta$  se provocaría un default. Por ejemplo, si la probabilidad de incumplimiento es un 5% debemos comparar dicho resultado con el valor de la uniforme generada o de forma alternativa compara el valor de  $-1,645$  con el valor de la normal estándar generada.

<sup>77</sup> Cuando  $\rho = 0$ , entonces estamos en la situación donde los incumplimientos son independientes, mientras que si  $\rho = 1$  entonces todas las variables  $Z_i$  coinciden con la variable de economía  $Y$ , existiendo en términos de cartera sólo dos posibilidades: o todas las exposiciones incumplen o ninguna exposición incumple.

<sup>78</sup> Debe advertirse que valores elevados de  $Y$  (estados favorables de la economía) hacen que las  $Z_i$  tengan valores elevados y por tanto que sea más difícil el incumplimiento, dado que menor es la probabilidad de que en una simulación concreta  $Z_i \leq \beta$ .

- Obtener muestras independientes de  $N$  normales estándar, los  $W_i$  para cada exposición.
- Calcular las  $Z_i$  para las exposiciones  $i = 1, 2, \dots, N$ , a través de la fórmula  $Z_i = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}W_i$ .
- Analizar si cada exposición  $i$ -ésima incumple o no incumple mediante la expresión  $Z_i \leq \beta$ .
- Finalmente, se calcula la proporción de  $Z_i \leq \beta$ , lo que proporciona una muestra de la variable  $M_r = \frac{X_T}{N}$ .
- A partir de la variable  $M_r$ , podemos calcular fácilmente la distribución de pérdidas por fallidos  $L_T$ . A dicha distribución le podríamos calcular los tradicionales indicadores de riesgo  $VaR_\alpha(L_T)$  y  $TailVaR_\alpha(L_T)$  para distintos niveles  $\alpha$ .

Cuando la correlación por riesgo sistemático es 1 ( $\rho = 1$ ), todo el riesgo de las exposiciones es no diversificable. Por lo tanto si la economía está en un mal momento, es decir valor de  $Y$  bajo, todas las variables aleatorias  $Z_i$  pueden ser menores o iguales que el punto crítico dado por  $\beta = \Phi^{-1}(PD)$ , cayendo todas las exposiciones en incumplimiento. En el caso opuesto de que  $Z_i = Y > \beta$  la economía estaría en un buen momento y ninguna de las exposiciones incumpliría. Si  $\rho = 0$ , los incumplimientos son independientes y dado que  $Z_i = W_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  podemos emplear para  $N$  elevado el teorema central del límite, como hemos mencionado anteriormente.

### 5.2.1. Modelo de Vasicek

El modelo de Vasicek deduce la distribución de  $M_r$  cuando hay correlación entre los incumplimientos y cuando el número de exposiciones tiende a infinito ( $N \rightarrow \infty$ ). Para ello, en primer lugar se observa la realización del factor de riesgo  $Y$  o estado de la economía. A continuación, aprovechamos el hecho de que condicionando sobre  $Y$  las  $Z_i$ , y por tanto las  $X_i$ , son independientes. De este modo obtenemos la distribución de cada  $X_i$  condicionando sobre  $Y$ , determinando la probabilidad de pérdida bajo cada escenario de la economía, para posteriormente ponderarlas por la probabilidad de ese escenario. Por tanto, podemos agrupar los resultados para obtener la distribución de  $M_r$  en conjunto.

La probabilidad de un evento individual de incumplimiento ( $X_i = 1$ ) condicionado sobre el estado de la economía  $Y$  se puede escribir como:

$$P(y) = P(X_i = 1|Y) = P(Z_i \leq \beta|Y) = P\left(W_i \leq \frac{\beta - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Por lo que sustituyendo  $\beta = \Phi^{-1}(PD)$  resulta que:

$$P(X_i = 1|Y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Es frecuente denotar  $\Pi(Y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}Y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$ . De esta forma  $\Pi(Y)$  representa la probabilidad de incumplimiento bajo un escenario dado. Cuando en vez de tener una exposición individual tenemos una cartera de exposiciones, y dado que al condicionar sobre el estado de la economía las  $X_i$  son variables *iid* y con varianza finita, la pérdida condicionada converge a su expectativa  $\Pi(Y)$  a medida que  $N$  tienda a infinito. Por tanto, podemos aproximar la distribución de  $M_r$  condicionada a la economía mediante una normal de media  $\Pi(Y)$  y desviación típica  $\sqrt{\frac{\Pi(Y)(1-\Pi(Y))}{N}}$ , es decir  $M_r|Y \approx \text{Normal}\left(\Pi(Y), \sqrt{\frac{\Pi(Y)(1-\Pi(Y))}{N}}\right)$ .

Supongamos que  $N = \infty$ , aplicando la ley de los grandes números  $M|Y \approx \Pi(Y)$ , y de esta forma se puede establecer la función de distribución de  $M$  como:

$$P(M_r \leq t) = E(P(M_r \leq t|Y)) = P(\Pi(Y) \leq t) = P(Y \geq \Pi^{-1}(t))$$

Y por lo tanto, la función de distribución acumulada de morosidad de una cartera de exposiciones muy elevada tiende en el límite a (Vasicek, 1991,2002):

$$F(t; PD; \rho) = P(M_r \leq t) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(t)\sqrt{1-\rho} - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)^{79}$$

La convergencia a la forma límite de distribución se sostiene para carteras con exposiciones con distintos pesos, siempre y cuando exista un número suficientemente elevado de exposiciones sin que ninguna de las exposiciones individuales sea mucho más elevada que el resto.

A la familia de distribuciones  $P(M_r \leq t) = F(t; PD; \rho)$  se le denominan familia de Vasicek ya que fueron descritas para el análisis de riesgos de contraparte dependientes. La distribución de Vasicek es por tanto una distribución continua de dos parámetros ( $0 < PD < 1$ ,  $0 < \rho < 1$ ) continua en  $(0, 1)$ . Cuando  $\rho \rightarrow 0$  converge a una distribución de un punto concentrada en  $M_r = PD$ . Cuando  $\rho \rightarrow 1$  converge a una distribución cero-uno con probabilidades  $PD$  y  $1 - PD$ . Cuando  $PD \rightarrow 0$  ó  $PD \rightarrow 1$  la distribución se concentra en  $M_r = 0$  y  $M_r = 1$  respectivamente. Además, la familia de Vasicek goza de ciertas propiedades de simetría muy útiles. La principal es que:

$$F(t; PD; \rho) = s \Leftrightarrow F(s; 1 - PD; 1 - \rho) = t$$

Por lo que para un número de exposiciones en la cartera  $N = \infty$  entonces por la propiedad de simetría el  $VaR_\alpha(M_r)$  se calcula mediante la siguiente expresión:

$$VaR_\alpha(M_r) = \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} + \Phi^{-1}(PD) \sqrt{\frac{1}{1-\rho}}\right)$$

<sup>79</sup> Además, debe observarse que:  $F(t; PD; \rho) = s \Leftrightarrow \Phi^{-1}(t)\sqrt{1-\rho} - \Phi^{-1}(s)\sqrt{\rho} = \Phi^{-1}(PD)$ .

De esta forma el  $VaR_\alpha(M_r)$  es una función creciente de  $\rho^{80}$  y  $PD$ .

Hemos mencionado al introducir el riesgo de crédito que la distribución de pérdidas es altamente asimétrica y leptocúrtica debido a que los incumplimientos entre las exposiciones están correlacionados. Estamos ahora en disposición de contrastar dicha afirmación aplicando la distribución de Vasicek. La media de la distribución  $F(t; PD; \rho)$  es  $PD$  y su varianza es  $\Phi_2(\Phi^{-1}(PD), \Phi^{-1}(PD), \rho)$  donde  $\Phi_2$  es la función de distribución normal bivalente. Por lo tanto, podemos representar en un cuadro distintos percentiles de la distribución de pérdidas, es decir  $VaR_\alpha(M_r)$  para distintos  $\alpha$ , y expresarlos respecto al número de desviaciones respecto a su media, es decir  $(VaR_\alpha(M_r) - PD)/\text{Desviación}$ . Estos percentiles podemos compararlos con los percentiles generados por la distribución normal estándar<sup>81</sup>.

$PD$	$\rho$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99,5\%$	$\alpha = 99,9\%$
1%	1%	1,8136	2,8421	3,2575	4,5738
1%	10%	1,9179	3,8228	4,7286	7,0122
1%	60%	0,9035	4,5915	6,8876	12,6315
0,1%	1%	1,8515	3,0142	3,5007	4,6199
0,1%	10%	1,7525	4,0862	5,3352	8,8342
0,1%	60%	0,1076	2,0473	4,2015	13,8735
Normal(0,1)		1,6449	2,3263	2,5758	3,0902

Los valores de la anterior tabla manifiestan la ausencia de normalidad de la distribución de fallidos, lo que se pone de manifiesto de forma más extrema para los percentiles de la distribución y las correlaciones más elevadas. Supongamos que el coeficiente de correlación es de  $\rho = 0,6$  y la probabilidad de *default* es de 0,1%. En este caso, las pérdidas esperadas de esta cartera de exposiciones son 0,001 y su varianza es de  $9,6857e-03$ . Si la compañía desea mantener cubiertos los riesgos con una probabilidad  $\alpha = 99,9\%$  necesita un capital de 13,87 para cubrir la desviación estándar de dicha cartera de exposiciones. En cambio, si la distribución de pérdidas fuese normal le bastaría con cubrir aproximadamente 3,1 veces su desviación estándar.

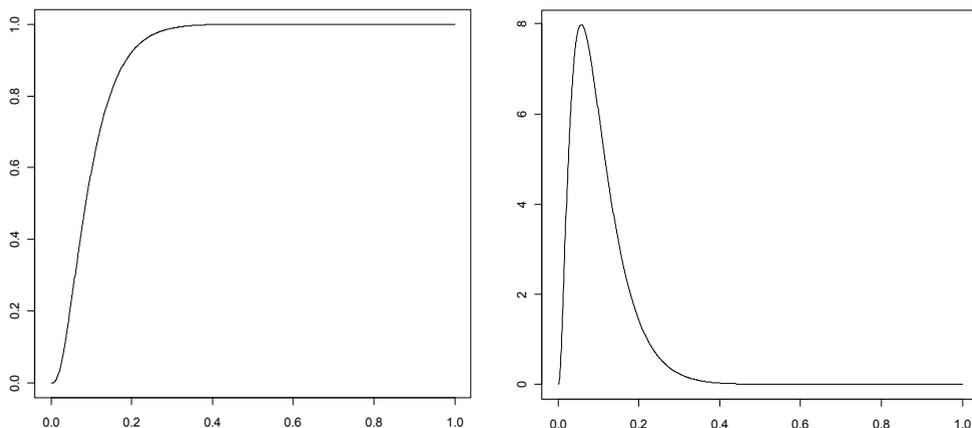
Como resumen a esta parte del trabajo se muestran las funciones de distribución, de densidad y cuantil de la distribución de Vasicek.

<sup>80</sup> Para  $\rho = 0$  el  $VaR$  es  $PD$  y para  $\rho = 100\%$  el  $VaR$  es 100 %.

<sup>81</sup> En el caso de colocarnos en percentiles más extremos, por ejemplo  $\alpha = 99,99\%$ , los resultados distan todavía más de los de una normal. A modo de ejemplo para  $PD = 0,1\%$  y  $\rho = 10\%$  el valor del percentil es 15,3673.

Funciones de la distribución de Vasicek	
Distribución	$F(t; PD; \rho) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(t)\sqrt{1-\rho} - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)$
Densidad <sup>82</sup>	$f(t; PD; \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho}}{\rho} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(t)^2 - \left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(t) - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right)^2\right)\right)$
Cuantil	$F^{-1}(\alpha; PD; \rho) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$

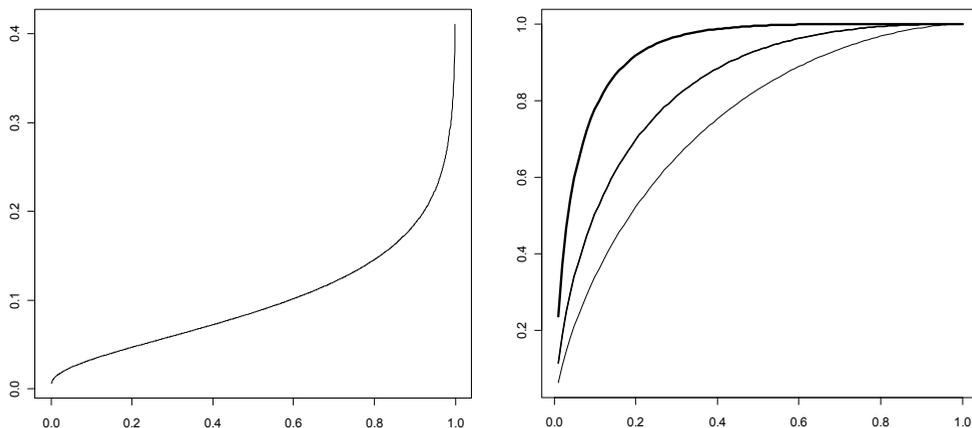
En los siguientes gráficos se representa la función de distribución de Vasicek (izquierda) y la función de densidad (derecha) para una probabilidad de incumplimiento del 10% y un coeficiente de correlación  $\rho = 12\%$ .



En los siguientes gráficos se representa a la izquierda la función cuantil para los anteriores valores y distintos valores de  $\alpha$ . En la derecha se representa la función  $VaR_{\alpha}(M_r)$  para  $\alpha = 99,5\%$  y distintos coeficiente de correlación ( $\rho = 12\%, 25\%, 50\%$ ). En el eje horizontal se representa la probabilidad de incumplimiento que varía desde 0 a 1, las líneas más gordas representan las curvas resultantes de los coeficientes de correlación mayores. A medida que aumenta la probabilidad de incumplimiento aumenta el VaR porcentual. De la misma forma a medida que au-

<sup>82</sup> La función de densidad es unimodal con moda  $\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho}\Phi^{-1}(PD)\right)$  cuando  $\rho < 0,5$ , es monótona cuando  $\rho = 0,5$  y tiene forma de U cuando  $\rho > 0,5$ .

menta el coeficiente de correlación aumenta el *VaR*, ya que se produce un menor beneficio por diversificación<sup>83</sup>.



El modelo de Vasicek tiene dos características importantes. Por un lado, es capaz de reproducir dependencia entre los incumplimientos basándose en un factor común a ellos, el estado general de la economía, y se implementa mediante una solución analítica. Además, el modelo de Vasicek es susceptible de simulación. Si  $u$  es una muestra de la Uniforme  $(0,1)$ , entonces  $f = F(u; 1 - PD, 1 - \rho)$  es una muestra de  $\Phi\left(\Phi^{-1}(u)\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} + \Phi^{-1}(PD)\sqrt{\frac{1}{1-\rho}}\right)$ .

### 5.3. Modelo de Basilea II y de Solvencia II para el riesgo de fallidos

Basilea II asume el modelo de Vasicek con  $N \rightarrow \infty$  para el porcentaje de pérdidas dentro de cada bloque homogéneo con la misma probabilidad de incumplimiento, pero supone que la correlación de las contrapartes está en función de la probabilidad de incumplimiento. Es decir, emplea una función de tipo  $f = F(\cdot; PD, \rho(PD))$ <sup>84</sup>. Por tanto el  $VaR_\alpha(M_r)$  viene dada por:

$$VaR_\alpha(M_r) = \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\rho(PD)}{1-\rho(PD)}} + \Phi^{-1}(PD)\sqrt{\frac{1}{1-\rho(PD)}}\right)$$

<sup>83</sup> Para un coeficiente de correlación nulo (independencia), simplemente tendríamos el *VaR* representado por una línea recta., ya que el *VaR* en este caso sería igual a la probabilidad de default.

<sup>84</sup> La función del coeficiente de correlación general en Basilea II es  $\rho(PD) = 12\% \lambda(PD) + 24\% (1 - \lambda(PD))$  donde  $\lambda(PD) = \frac{1 - \exp(-50PD)}{1 - \exp(-50)}$ . Por lo tanto, el coeficiente de correlación  $\rho(PD)$  varía entre 24% (cuando  $PD = 0$ ) y 12% (cuando  $PD = 1$ ).

Basilea II emplea un  $\alpha = 99,9\%$  por lo que el requisito de capital asociado a un bloque es igual al producto de la exposición total del bloque o suma de las exposiciones individuales, de la severidad que es común a todas ellas y la pérdida porcentual  $M_r$ . Por lo que toda la aleatoriedad viene recogida en la variable  $M_r$ . Además, el capital regulatorio se establece como el valor monetario de la diferencia entre el percentil de pérdida del 99,9% (pérdida inesperada o *unexpected loss*) menos la pérdida esperada o prevista (*expected loss*). Las pérdidas potenciales por riesgo de crédito se pueden dividir de esta forma en dos componentes: un componente correspondiente a la pérdida esperada, y otro por pérdida inesperada o fluctuaciones de las pérdidas que han excedido el promedio. Dado que la pérdida esperada debe provisionarse, sólo es preciso cubrir la pérdida inesperada con capital adicional. De esta forma, la carga de capital para soportar el riesgo de la contraparte en Basilea II viene dado por:<sup>85</sup>

$$\text{Carga} = VaR_{99,9\%}(L_T) - \text{Pérdida esperada}$$

$$\text{Carga} = EAD_T LGD \left[ \Phi \left( \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\frac{\rho(PD)}{1 - \rho(PD)}} + \Phi^{-1}(PD) \sqrt{\frac{1}{1 - \rho(PD)}} \right) - PD \right]$$

Así, la carga de capital depende de la exposición individual en el momento de *default*  $EAD_i$ , el número de exposiciones  $N$ , la severidad de cada bloque  $LGD$  y de la probabilidad de incumplimiento de ese bloque.

Solvencia II define el riesgo de contraparte como el riesgo derivado de las posibles pérdidas derivadas de la quiebra o del deterioro del crédito de la contraparte. Por lo tanto, este módulo recoge principalmente el riesgo derivado de la quiebra de los reaseguradores y de los emisores de derivados financieros. La fórmula estándar actual (QIS4) supone que para cada contraparte se debe considerar la exposición global al riesgo de la contraparte. La información necesaria para el cálculo del capital asociado al riesgo de la contraparte son: la probabilidad de impago de la contraparte ( $PD$ ) derivada a partir de una agencia de *rating* y la pérdida estimada dado el incumplimiento de la contraparte ( $LGD$ ). Debe resaltarse que el CEIOPS está denominando  $LGD$  a lo que formalmente es el producto de la exposición y la severidad. El  $LGD_i$  global en relación a la contraparte  $i$  es la suma de las pérdidas dado un impago derivadas de las exposiciones al crédito. Como se puede ver en la fórmula en la que se determina el  $LGD_i$ , implícitamente el CEIOPS considera una severidad y una tasa de recuperación del 50% para las pérdidas derivadas de quiebra de un reasegurador o emisor de derivados.

Como ya hemos mencionado en el apartado en el que se detalla la fórmula estándar del QIS 4, el capital necesario para soportar el riesgo de la contraparte se calcula en varias etapas. En la primera etapa se calcula el índice de concentración de

<sup>85</sup> Se han obviado los ajustes por plazo o duración y el ajuste por tamaño que incorpora Basilea II. El ajuste por plazo se introduce para capturar la idea de que las exposiciones tienen un mayor riesgo cuando mayor es su plazo de vencimiento. El ajuste por tamaño modifica la fórmula del cálculo del coeficiente de correlación lineal de forma que se tiene en cuenta el tamaño de la contrapartida.

Herfindahl del grupo al que pertenece (reaseguro, derivados financieros, etc.). Posteriormente se calcula a partir del anterior la correlación implícita, y para una correlación implícita menor a 1, se determina la exigencia de capital para una determinada contrapartida en base a la distribución de Vasicek para  $\alpha = 99,5\%$ . Posteriormente se suman las cargas individuales de cada contraparte  $i$ -ésima para obtener la carga de capital por riesgo de contraparte.

Por lo tanto, el procedimiento adoptado en el modelo estándar de Solvencia II es similar al adoptado en el modelo IRB de Basilea II. Las principales diferencias provienen del hecho de que Basilea II ignora el efecto de la diversificación en una cartera, por lo que en principio tiende a sobrevalorar el capital económico necesario, por lo que es visto como una fórmula prudente. Esto es debido a que en el cálculo de la correlación no considera el número de exposiciones de la cartera. Solvencia II recoge este efecto diversificador al considerar que la correlación implícita  $R$  (o  $\rho$  en la nomenclatura tradicional) es función del número de contrapartes. Sin embargo, como puede observarse la correlación implícita que asume Solvencia II va desde 0,5 a 1 por lo que es muy superior a la asumida por Basilea II, lo que en principio proporciona mayores cargas de capital. Además, una diferencia fundamental entre las dos regulaciones es que bajo Basilea II sólo las fluctuaciones desfavorables (aquellas que superan la media esperada) deben ser cubiertas con capital adicional, mientras que en Solvencia II toda la pérdida inesperada o percentil de la distribución de pérdidas es cubierto con capital, debido a que implícitamente asume que las compañías no cargan la pérdida esperada en la cuenta de resultados.

#### 5.4. Aplicación práctica a la modelización del riesgo de contraparte

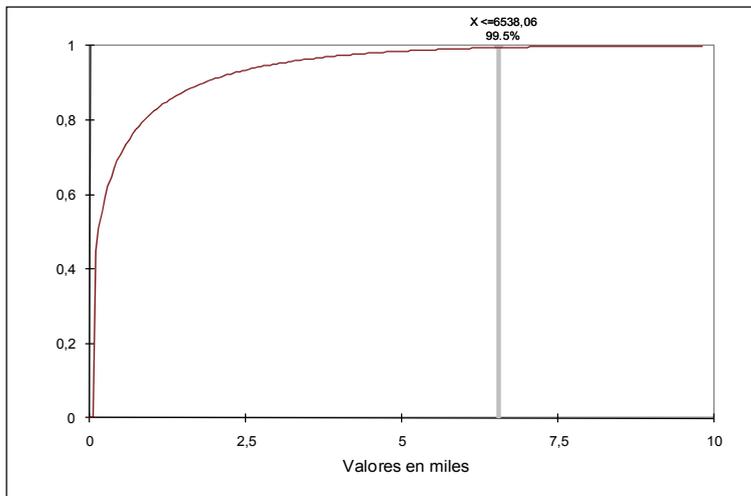
Solvencia II define el riesgo de contraparte como el riesgo derivado de las posibles pérdidas asociadas a la quiebra o deterioro del crédito de la contraparte o de deudores en contratos de mitigación de riesgo como el reaseguro, los derivados financieros, intermediarios, así como cualquier otra exposición al crédito no cubierta en el submódulo de riesgo de *spread*. La determinación del capital necesario para soportar el riesgo de la contraparte en la fórmula estándar de QIS4 se realiza en base a un cálculo en tres etapas: cálculo de la concentración a partir del índice de Herfindahl, cálculo de los requerimientos de capital para cada contraparte empleando la distribución de Vasicek, y finalmente, agregación.

En este apartado del trabajo vamos a realizar el cálculo del  $VaR$  para el modelo de fallidos de Vasicek mediante la fórmula analítica y mediante su simulación. Para ello vamos a suponer un asegurador que tiene 100 exposiciones al riesgo de contraparte idénticas derivadas de 100 reaseguradores con calificación B y con una pérdida estimada dado el impago de 100 u.m. Bajo el modelo estándar de QIS4 realizaríamos en primer lugar el cálculo de la concentración en la contraparte, lo que proporciona un valor de  $H = 10.000/1.000.000 = 0,01$ , por lo que la correlación entre contrapartes vendrá dada por  $R = 0,5 + 0,5 \cdot 0,01 = 0,505$ .

Posteriormente procederíamos a la determinación de la pérdida individual, sabiendo que la probabilidad de *default* de una contraparte con calificación B es del 6,04%:

$$Def_i = 100 \cdot N \left( \left( \frac{N^{-1} \cdot (6,04\%)}{\sqrt{1 - 0,505}} \right) + N^{-1}(0,995) \cdot \sqrt{\frac{0,505}{1 - 0,505}} \right) = 65,42$$

Dadas que tenemos 100 contrapartes idénticas la carga de capital por riesgo de contraparte será de 6.541,76 u.m. Dicho cálculo no debiera diferir en exceso del obtenido mediante la simulación de la distribución de Vasicek y posterior cálculo del percentil 99,5. En el gráfico inferior se muestra la distribución acumulada de la distribución de Vasicek simulada empleado 50.000 iteraciones mediante el método LH. Podemos apreciar como el VaR al 99,5% se corresponde con un valor de 6538,06 u.m.



Otra alternativa no tratada en este trabajo sería emplear modelos de más de un factor para la modelización del riesgo de crédito de contraparte. La distribución de Vasicek es un modelo unifactorial, lo que equivale a suponer que los diferentes elementos que inciden en la economía, en cuanto a riesgo de crédito se refiere, están dirigidos por un mismo factor de riesgo. Sin embargo, pueden ser considerados distintos factores sobre una cartera.

## 6. MODELIZACIÓN DEL RIESGO OPERATIVO

El riesgo operativo se considera un componente importante del riesgo de las instituciones financieras y aseguradoras, ya que su cobertura puede requerir una su-

ma cuantiosa de capital. Adicionalmente, las últimas tendencias parecen indicar que su importancia se va incrementando. Como resultado, debe realizarse una adecuada medición y gestión del riesgo operativo por parte de las compañías.

El Comité de Basilea introdujo el riesgo operativo (OR) dentro de Basilea II como una nueva clase de riesgo. Se definió como el riesgo de pérdidas directas o indirectas resultantes de la inadecuación o fallo de los procesos internos, de las personas y sistemas o de eventos externos. Basilea II propone tres métodos para la determinación de la carga de capital por riesgo operativo, de forma que se seleccionará el más adecuado a cada entidad. Los métodos son: la técnica del indicador básico o BIA (*basic indicator approach*), la técnica estándar o SA (*standardized approach*) y la técnica de cálculo avanzada o AMA (*advanced measurement approach*)<sup>86</sup>. Los dos primeros métodos son esencialmente métodos de cálculo basados en el volumen de las operaciones de la compañía y están destinados principalmente para bancos pequeños y medianos con moderada exposición al riesgo operativo<sup>87</sup>. Los bancos grandes y más expuestos al riesgo operativo, deben realizar una medición con técnicas más sofisticadas como es la metodología AMA<sup>88</sup>.

La industria aseguradora también reconoce la necesidad de considerar el riesgo operativo. El modelo alemán GDV (2005) requiere una carga de capital por riesgo operativo basada fundamentalmente en el volumen de las operaciones de la compañía aseguradora. De esta forma, en el modelo alemán el riesgo operacional se computa como la cantidad máxima que resulta de multiplicar un factor de riesgo por las primas brutas u otro factor por las provisiones. En Solvencia II (QIS4) se adopta una técnica semejante a la propuesta alemana. En este sentido el módulo de riesgo operacional se diseña para cubrir los riesgos operacionales en la medida en que no han sido explícitamente cubiertos en otros módulos. La carga de capital por riesgo operativo se calcula en función de parámetros de primas, provisiones técnicas y gastos en productos *unit-linked* estableciéndose un límite superior o máximo de un 30% del BSCR. Por lo que una empresa con mayores volúmenes de estas variables siempre tendrá una mayor carga de capital por riesgo operativo independientemente de la gestión y supervisión realizada, promovándose por consiguiente para estas empresas el desarrollo de un modelo interno.

---

<sup>86</sup> La técnica AMA es la empleada en los Estados Unidos ya que las dos primeras técnicas no están permitidas.

<sup>87</sup> Ambas son metodologías *top-down* y su principal diferencia reside en que en el método estándar el total de capital requerido se calcula como la suma de las necesidades de capital regulador de cada una de las líneas de negocio (SA) descritas por el Comité y no a nivel de la entidad (BIA). De esta forma, Basilea II aproxima la variable de ingresos brutos al nivel de la exposición al riesgo operacional. Mediante estos dos modelos una entidad con unos elevados ingresos brutos pero con mejores prácticas no puede tener menores riesgos operacionales que otra con peor gestión del riesgo operacional.

<sup>88</sup> Esta metodología es un enfoque *bottom-up* ya que calcula el capital necesario a partir de las pérdidas de cada unidad de negocio, computándose posteriormente para la entidad en su conjunto.

## A. Clasificación

A semejanza de Basilea II, en Solvencia II se podrá desarrollar un sistema de medición del riesgo operacional sofisticada. Para ello se emplea tradicionalmente la técnica o modelo de la distribución de pérdidas. Sin embargo, antes de introducir dicha técnica y de forma previa a realizar una correcta modelización del riesgo operativo es necesario establecer una clasificación de los eventos que se consideraran parte de este riesgo. Crouhy *et al.* (2000) proporcionan una lista de las típicas clases de riesgo operativo (véase la tabla inferior). Se pueden distinguir en dicha clasificación riesgos de difícil cuantificación de otros riesgos de fácil cuantificación. Obviamente, el análisis del capital necesario en el Pilar I de Solvencia II para soportar los riesgos operativos se realizará para aquellos riesgos que se pueden cuantificar. Los riesgos cualitativos operativos deben tener su reflejo en el Pilar II.

Riesgo de personas		Incompetencia
		Fraude
Riesgo de procesos	Riesgo de modelo	Error de modelo/metodología
		Error <i>markt-to-model</i>
	Riesgo de transacción	Error ejecutivo
		Complejidad de producto
		Error de registro
		Error de establecimiento ( <i>Settlement error</i> )
		Error de documentación/contrato
	Riesgo de control operativo	Exceso sobre el límite
		Riesgo de seguridad
		Riesgo de volumen
Riesgo tecnológico		Fallo de sistema
		Error de programación
		Riesgo de información
		Fallo de telecomunicaciones

Fuente: Crouhy *et al.* (2000)

Una de las principales diferencias y dificultades a la hora de modelizar el riesgo operativo, es que a diferencia de otro tipo de riesgos, suele haber una menor disponibilidad de datos. Además, este hecho se ve agravado por el frecuente agrupamiento en categorías, de forma que aún disponemos de menos observaciones. Estas categorías pueden ser la clase de riesgo operativo o distintos niveles. En este sentido se pueden agrupar las pérdidas por riesgo operativo en tres niveles: reducido, normal y extraordinario. Las pérdidas reducidas serían aquellas pérdidas muy repetitivas o que se dan muy frecuentemente. Las pérdidas normales son aquellas que son menos frecuentes pero de mayor tamaño, no poniendo en riesgo la supervivencia de una institución financiera. Y por último, las pérdidas extraordinarias son aquellas que se dan muy infrecuentemente pero que son de un elevado tamaño pudiendo poner en riesgo la supervivencia de la entidad, por lo que se les debe prestar una atención especial.

De cara a ver la similitud o paralelismo entre las pérdidas ocasionadas por el riesgo operativo y la siniestralidad de una compañía aseguradora, puede ser útil emplear la separación del riesgo operativo desarrollada por Samad-Khan (2005) en: causas, eventos y consecuencias. Como causas de riesgo operativo encontramos, entre otras, la falta de supervisión de la gerencia de la compañía, la formación insuficiente, la inadecuación de las medidas de seguridad o el fallo en los procesos de auditoría. Estas causas son el origen de eventos tales como el fraude interno, fraude externo o el daño a activos. Estos eventos pueden tener consecuencias que se pueden clasificar en pérdidas monetarias y pérdidas no monetarias. Dentro de las pérdidas monetarias se incluyen las pérdidas derivadas de la reposición de activos, las sanciones legales, la pérdida de recursos, etc. En las pérdidas de carácter no monetario se incluyen otro tipo de pérdidas que no son tan fácilmente cuantificables pero que suponen un coste para la compañía y que principalmente están formadas de pérdida de reputación o la interrupción del negocio.

<b>Separación de Samad-Khan (2005)</b>	<b>Similitud para actuarios</b>
Causas	Peligros+Exposiciones
Eventos	Reclamaciones
Consecuencias	Siniestralidad o pérdidas

Fuente: Samad-Khan (2005)

Esta separación entre causas, eventos y consecuencias permite establecer un paralelismo con la terminología actuarial. Las causas en la terminología de Samad-Khan (2005) es el equivalente a la conjunción de dos factores: los peligros y las exposiciones. Los peligros son las causas que originan un daño, mientras que las exposiciones son los intereses asegurados. Los eventos derivados del riesgo operativo tienen su contraparte en las reclamaciones. En el ámbito actuarial se distingue entre ocurrencias y reclamaciones. Las ocurrencias son los eventos que resultan en un daño para los asegurados. Cuando estos tratan de obtener una compensación por el daño sufrido bajo los términos de su póliza de contrato entonces recibe el término de reclamación.

Las reclamaciones efectuadas por los asegurados tienen que valorarse o ajustarse para determinar la cantidad final de daño<sup>89</sup> de forma que la cantidad final pagada está sujeta a negociación, decisiones judiciales, etc. Para predecir el valor último o cantidad final de las pérdidas<sup>90</sup>, ya que estos procesos suponen un período de tiempo entre que se realiza la reclamación hasta que se efectúan los pagos parciales o completos, se aplican técnicas conocidas como el desarrollo de los siniestros (*loss development*). Muchas pérdidas por riesgo operativo no tendrán esta dificultad de valoración ya que el reclamante y el asegurador son la misma persona (la propia compañía aseguradora), sin embargo, algunas pérdidas implican negociación o

<sup>89</sup> Este proceso se conoce por el nombre de *claim adjustment*.

<sup>90</sup> Lo que en terminología anglosajona se conoce como *ultimate loss*.

disputas judiciales con clientes, competidores, etc. por lo que pueden aplicarse las mismas técnicas que el campo actuarial para evaluar sus últimas cuantías.

### 6.1. Pasos en la modelización del riesgo operativo

Al igual que en el caso de la siniestralidad de una compañía, para la modelización del riesgo operativo tenemos que realizar los siguientes pasos:

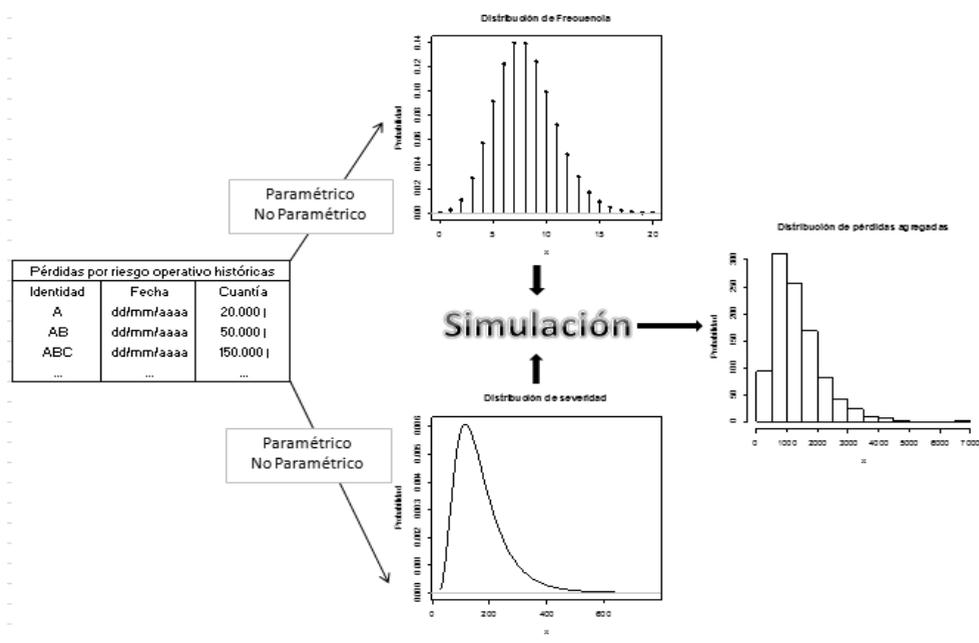
- Primero: Realizar un análisis exploratorio de los datos antes de decidir la técnica de modelización. En este sentido es útil representar los datos históricos en gráficos para ver sus cuantías y evolución o tendencias, además es útil el resumen en estadísticos como: media, varianza, asimetría o sesgo, curtosis, etc.
- Segundo: Emplear alguna técnica de ajuste paramétrico o no paramétrico<sup>91</sup>. Por el contrario también puede ser empleada una técnica determinística, como por ejemplo se puede estimar un porcentaje de capital como parte del capital global necesario por la compañía. Sin embargo, nos centraremos en el primer tipo de técnicas, que podemos englobar de forma amplia bajo técnicas de Distribución de Pérdidas (*Loss Distribution Approach*, LDA) también conocidas como técnicas de frecuencia-severidad. Como veremos posteriormente, el reto en la modelización del riesgo operacional es el comportamiento extremo de las colas de las distribuciones de severidad.
- Tercero. En el caso de utilizar una técnica de LDA se deben identificar bases de exposición (*exposure bases*) para cada tipo de riesgo operacional, unidad de negocio o para el riesgo operacional global si no se desea/puede realizar una desagregación. Posteriormente, se debe medir el nivel de exposición para cada tipo de riesgo, unidad de negocio o para el riesgo operacional global.
- Cuarto. En el caso de optar por distribuciones paramétricas, debe realizarse el ajuste de los parámetros de los modelos de frecuencia y severidad a emplear y evaluar la bondad de ajuste mediante las técnicas vistas en este trabajo.
- Quinto. Realizar la simulación de las pérdidas agregadas por riesgo operativo. Para ello debe simularse la frecuencia y la severidad de las pérdidas operativas para cada unidad de riesgo, siempre y cuando se hayan modelado a nivel desagregado, y posteriormente agregarlas.
- Sexto. Calcular el capital necesario por riesgo operativo. Dado que este riesgo se considera normalmente independiente de las otras categorías de riesgo (mercado, asegurador y contraparte), se agregará para calcular el capital necesario por la compañía aseguradora. De esta forma, en Solvencia II el SCR es la

---

<sup>91</sup> Un ajuste no paramétrico supone que los datos no proceden de ninguna distribución particular. Métodos de ajuste no paramétrico son las redes neuronales (*neural networks*), la estimación del núcleo (*kernel estimation*) o la simulación histórica (*empirical sampling*). La simulación histórica supone la proyección a futuro de las pérdidas por riesgo operativo a partir de los datos actuales mediante técnicas de extracción de muestras o *bootstrap*. El ajuste a una distribución paramétrica consiste en asumir que los datos siguen una determinada distribución y por lo tanto se debe estimar lo/s parámetro/s de las distribuciones.

suma del BSCR y la carga de capital por riesgo operativo una vez considerados los Ajustes. Sin embargo, en caso de haberse realizado una modelización por clases puede considerarse que el riesgo operativo de distintas clases puede tener una estructura de dependencia. Por ello, puede modelizarse la dependencia entre frecuencias, severidades, o incluso entre frecuencias y severidades mediante el empleo de cópulas (Shevchenko y Wüthrich, 2006<sup>92</sup>).

En el gráfico inferior se muestra el esquema de los anteriores pasos para simular el riesgo operativo a partir de una base de datos histórica empleando la técnica de la Distribución de Pérdidas. A continuación, describiremos de forma más detallada las principales fases en la modelización del riesgo operativo por parte de una compañía aseguradora que quiera desarrollar su modelo interno de medición y gestión del riesgo.



Fuente: Elaboración propia a partir de Wang (2005).

### A. Análisis exploratorio de los datos

Cualquier intento de modelización de las pérdidas por riesgo operativo debe tener en cuenta las características de los datos históricos, para lo que debe hacerse un

<sup>92</sup> Resulta además importante destacar que estos autores, dado el reducido nivel de datos internos disponibles para pérdidas operativas recomiendan aplicar inferencia bayesiana en la que se combinen datos internos, datos externos de la compañía y la opinión de los expertos.

análisis exploratorio de los datos. Moscadelli (2004) muestra para el sector financiero que las cuantías de pérdidas derivadas del riesgo operativo tienen colas muy gruesas. Por lo que se puede establecer que generalmente las pérdidas por riesgo operativo están formadas principalmente por eventos de baja frecuencia pero alta severidad (Dutta y Perry, 2006). Por lo tanto, un paso previo a cualquier intento de modelización de pérdidas por riesgo operativo es una buena base de datos históricos de pérdidas operacionales de la propia entidad (datos internos) complementados por datos externos y la opinión de expertos<sup>93</sup>, con el fin de reflejar adecuadamente el impacto de las pérdidas extremas pero poco frecuentes.

### *B. Modelización mediante LDA*

Una técnica no paramétrica básica para la modelización del riesgo operativo es la simulación histórica. Esta técnica supone remuestrear los valores de los datos empíricos acontecidos en el pasado. Sin embargo, el mayor inconveniente de esta técnica reside en que nunca podemos obtener en el futuro pérdidas superiores a las experimentadas en el pasado, por lo que podemos estar infravalorando el riesgo en nuestro modelo.

El método o técnica de la Distribución de Pérdidas (LDA) es empleado comúnmente por las entidades bancarias en los modelos avanzados (AMA), debiendo cuantificar distribuciones para la frecuencia y severidad de las pérdidas operativas para cada celda de riesgo (línea de negocio/tipo de evento) sobre el horizonte temporal de un año (Shevchenko y Wüthrich, 2006). Esta técnica es heredada del campo actuarial para la modelización de los siniestros, por lo que puede ser también empleada por las compañías aseguradoras en la modelización del riesgo operativo. La distribución de pérdidas se compone, al igual que la siniestralidad experimentada por una compañía aseguradora a lo largo de un período, de la distribución de frecuencia y la distribución de severidad. Mediante la agregación de la distribución de frecuencia y severidad obtenemos la distribución de pérdidas agregadas.

El método estadístico más tradicional para la modelización del riesgo operativo es el ajuste a distribuciones paramétricas, de esta forma se puede seleccionar una distribución de probabilidad cuyo/s parámetro/s se estiman a partir de los datos empíricos. La evidencia de que los datos de riesgo operativo siguen distribuciones con colas muy gordas podría conducir a que ninguna distribución de forma aislada se ajuste bien a los datos. Por lo que se podrían proponer un modelo separado para el cuerpo y la cola de la distribución, empleando para ello la teoría del valor extremo. De esta forma, la teoría EVT trata de realizar una estimación de las colas de la distribución original haciendo uso solamente de los valores extremos o máximos<sup>94</sup> de la serie de datos. Varios autores han propuesto el uso de la Teoría

---

<sup>93</sup> A modo de ejemplo, Basilea II permite completar la base de datos internos con datos externos convenientemente escalados. La opinión de expertos puede incorporar el análisis de escenarios para evaluar la exposición de una compañía a acontecimientos de alta severidad.

<sup>94</sup> Aunque en el contexto del riesgo operativo o de la siniestralidad operativa, la teoría del valor extremo se emplea para predecir cuales son los posibles valores máximos que pueden experimentar dichas

del Valor Extremo para la cuantificación del riesgo operativo (véase por ejemplo Moscadelli, 2004, Mignola y Ugocioni, 2005 o Chavez-Demoulin *et al.*, 2006).

La medición del riesgo operativo puede realizarse hipotéticamente a varios niveles, fundamentalmente: a nivel agregado o de empresa, por línea de negocio, y finalmente por tipo de evento. La principal ventaja de la modelización agregada es la disponibilidad de un mayor número de datos disponibles, sin embargo, tiene la desventaja de que se están agrupando eventos de naturaleza y consecuencias muy distintas. El modelador del riesgo operativo tendrá que analizar los datos históricos de la compañía, y en su caso los datos externos y las opiniones de expertos, para evaluar la homogeneidad o heterogeneidad de éstos y realizar un balance con el mayor esfuerzo que requiere una modelización más detallada y la mayor precisión<sup>95</sup>. Además, la no identificación de determinadas pérdidas operativas o *under-reporting* (por ejemplo pérdidas de baja severidad pero con alta frecuencia) implica que podemos estar empleando unos parámetros o mismo una distribución incorrecta, por lo que existirían pérdidas que no son computadas a la hora de calcular la carga de capital lo cual puede suponer una amenaza para la solvencia de la compañía (Guillen *et al.*, 2007),

### C. Ajuste a distribuciones paramétricas

El razonamiento para ajustar los datos de eventos operativos a una distribución paramétrica y no realizar un ajuste no paramétrico, reside en suponer que dichos datos pueden provenir de una distribución de probabilidad conocida. Existen en la práctica ciertas distribuciones adecuadas para la modelización de unos u otros tipos de eventos en función de si dicha distribución presenta colas ligeras o pesadas. El ajuste a distribuciones puede realizarse a funciones de distribución específicas (LogNormal, Pareto, etc.), mixturas de distribuciones, a clases generales de distribuciones (*Generalized parametric distributions*)<sup>96</sup> o aplicando la teoría del valor extremo a una distribución generalizada de Valor Extremo o a una distribución generalizada de Pareto.

Moscadelli (2004) afirma que, basándose en los datos del 2002 del Comité de Basilea, la teoría del valor extremo proporciona una estimación del capital razonable cuando los datos están organizados a nivel de línea de negocio. Dutta y Perry (2006) proponen emplear las distribuciones generales  $g$  y  $h$  para modelizar la severidad. Los autores destacan que las clases generales de distribuciones son muy flexibles ya que muchas de las distribuciones específicas emanan a partir de ellas, estando definidas por un mayor número de parámetros. De esta forma es típico

---

variables. La EVT también puede ser aplicada en contextos donde sea útil predecir los valores mínimos, como los precios de acciones, etc.

<sup>95</sup> Recuérdese que siempre se desea un modelo más realista, pero que esto lleva a un mayor esfuerzo pre-simulación (elección de distribuciones, especificación de los parámetros, relación entre las variables del modelo, etc.), simulación (generación de números aleatorios, dependencia, etc.) y post-simulación (resumen de los datos, interpretación de resultados, etc.).

<sup>96</sup> Como, por ejemplo, las distribuciones  $g$  y  $h$  y la GB2.

que tengan cuatro o más parámetros que suelen representar la localización (media o mediana), escala (desviación estándar o volatilidad), asimetría y curtosis. La ventaja de ajustar a una clase general de distribuciones es la mayor flexibilidad que éstas proporcionan y además, un pobre ajuste a una distribución de clase genérica imposibilita un buen ajuste a cualquiera de las distribuciones que emanan de éstas. Debe advertirse que puede haber distintas distribuciones que proporcionan un ajuste satisfactorio para los datos de severidad observados, pero lleven a cálculos de capital muy diferentes, en especial cuando se aplica la distribución de Pareto (Carrillo y Suárez, 2006). Degen *et al.* (2007) muestran como la convergencia de la función de distribución de exceso sobre un umbral a la distribución generalizada de Pareto es extremadamente lenta, por lo que la estimación de cuantiles empleando la Teoría del Valor Extremo puede conducir a resultados inadecuados si los datos son modelados empleando las distribuciones  $g$  y  $h$ .

#### D. Cálculo

Una base de datos típica de riesgo operativo está compuesta por un conjunto de realizaciones de variables aleatorias:

$$\{Y_k^{t,i} : t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, s \text{ y } k = 1, \dots, N^{t,i}\}$$

Donde  $T$  es el número de años,  $s$  es el número de tipos de pérdidas y  $N^{t,i}$  es el número de pérdidas en el año  $t$  del tipo  $i$ .

De esta forma la cantidad de pérdidas por riesgo operativo para un año  $t$ , a la que se denota  $L_t$ , será la suma de las pérdidas que se produzcan ese año para todos los tipos, clases de riesgo o unidades de negocio, calculándose según la siguiente expresión:

$$L_t = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{N^{t,i}} Y_k^{t,i}, t = 1, \dots, T$$

$$L_t = \sum_{i=1}^s L_{t,i}, t = 1, \dots, T$$

Formalmente, la exposición al riesgo operativo puede ser medida a través del cuantil de la función de distribución de  $L_t$  y que se obtiene generalmente como convolución de la distribución de frecuencia y de severidad de las pérdidas por riesgo operativo. Esta distribución de pérdidas agregadas es generalmente no manejable analíticamente, pero puede ser calculada o aproximada como en el caso de la distribución de siniestralidad agregada por múltiples técnicas: el método recursivo de Panjer, la Transformación Fast Fourier (FFT), aproximaciones basadas en otras distribuciones, etc. o el empleo del método de Monte Carlo. Bajo este último método, una vez realizado el número de simulaciones necesarias, calcularemos el capital por riesgo operativo (RO) con el nivel de confianza deseado por la compañía aseguradora o propuesto por el regulador. Por ejemplo, si empleamos como medida para establecer el capital el  $VaR$  al nivel de confianza al nivel de significación  $\alpha$  (por ejemplo 0,5%, lo que equivale a un nivel de confianza del

99,5%) entonces para la variable  $L_{T+1}$  que representa las pérdidas por riesgo operativo para el próximo año<sup>97</sup>:

$$VaR(RO)_{1-\alpha}^{T+1} = F_{L_{T+1}}^{-}(1 - \alpha)$$

Donde  $F_{L_{T+1}}^{-}$  denota la inversa de la función de distribución de  $F_{L_{T+1}}$  o función cuantil. De la misma forma podemos calcular el  $VaR$  al nivel de confianza al nivel de significación  $\alpha$  para cada una de las clases en las que se ha dividido el riesgo operativo (en caso de no haber realizado una modelización a nivel de la entidad), mediante la expresión:

$$VaR(RO)_{1-\alpha,i}^{T+1} = F_{L_{T+1,i}}^{-}(1 - \alpha), \quad i = 1, \dots, s$$

Otra medida de interés es el  $TVaR$  o  $CVaR$  que en este contexto son las pérdidas esperadas por riesgo operativo que superan al  $VaR$  dado un nivel de confianza, y que se calcula simplemente como el promedio de las pérdidas tales que su valor a superado al  $VaR$ , es decir:

$$CVaR(RO)_{1-\alpha}^{T+1} = E(L_{T+1} | L_{T+1} > VaR(RO)_{1-\alpha}^{T+1})$$

De igual manera que en el caso del  $VaR$ , también podemos estimar el  $CVaR$  en función de cada una de las clases de OR:

$$CVaR(RO)_{1-\alpha,i}^{T+1} = E(L_{T+1,i} | L_{T+1,i} > VaR(RO)_{1-\alpha,i}^{T+1}), \quad i = 1, \dots, s^{98}$$

Como hemos mencionado anteriormente también puede usarse una técnica determinista que estime el capital necesario como el producto un factor o porcentaje sobre una variable de volumen o *proxy*. Las principales variables candidatas serían la suma del resto de capital de la compañía, el volumen de actividad de la aseguradora medido a través de provisiones técnicas y/o primas, etc. Las entidades financieras bajo Basilea II deben calcular el requerimiento de capital como la pérdida inesperada, a menos que pueda demostrar que se ha recogido adecuadamente la pérdida esperada. Para las entidades aseguradoras el capital económico debiera cubrir toda la pérdida esperada, es decir el  $VaR$  al 99,5.

En este capítulo hemos analizado los riesgos de mercado, de quiebra de la contraparte y operativo. En el capítulo anterior habíamos analizado las distintas variables que le afectan a los pasivos de las compañías aseguradoras, y determinan por tanto el riesgo asegurador. Estamos en disposición de elaborar un modelo que abarque el activo y pasivo de una compañía aseguradora, teniendo en cuenta todos los riesgos a los que hace mención la Directiva de Solvencia II. Dicha tarea es abordada en el próximo capítulo, en el que se desarrolla un modelo interno completo basado en DFA.

<sup>97</sup> Estamos considerando que el capital económico debiera cubrir la pérdida inesperada y esperada.

<sup>98</sup> Además, si aplicamos la EVT podemos estimar la función de distribución de pérdidas condicionada o función de distribución de exceso en  $u$  para riesgo operativo, de forma conjunta o para cada una de las clases en las que este se ha dividido. La función de distribución de pérdidas condicionada es la función de distribución condicionada de los excesos por encima del valor de prioridad o umbral  $u$ .

$$F_{T+1,u_i}^i(u_i + x) = P(L_{T+1,i} - u_i \leq x | L_{T+1,i} > u_i), \quad x \geq 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

## CAPÍTULO 6

# DISEÑO DE UN MODELO INTERNO BASADO EN EL ANÁLISIS FINANCIERO DINÁMICO

### 1. INTRODUCCIÓN

Solvencia II otorga un papel importante a los modelos internos ya que se permitirá su aplicación para la determinación del SCR cuando hayan sido validados y aprobados por el regulador. Los modelos elaborados necesitarán tener medidas del riesgo, un horizonte temporal y un alcance de los riesgos, por lo menos tan prudentes como los subyacentes en el modelo estándar.

En este capítulo se elabora una propuesta de un modelo de análisis financiero dinámico en base a algunas de las alternativas abordadas a lo largo de este trabajo. El modelo DFA-USC v.1 es la primera versión de un modelo DFA estocástico diseñado especialmente para la cuantificación de las cargas de capital de una compañía aseguradora de no vida española en el marco de Solvencia II<sup>1</sup>. Para ello, el modelo incorpora distintas metodologías y herramientas que posibilitan el cálculo de los requerimientos de capital para los distintos riesgos considerados y los compara con los que resultan de aplicar el modelo estándar de QIS4. Las principales decisiones a la hora de elaborar el modelo fueron:

- *La elección del periodo de evaluación o un horizonte temporal del modelo.* El modelo DFA-USC v.1 opta, al igual que establece la Directiva de Solvencia II, por un periodo de evaluación de las necesidades de capital a 1 año<sup>2</sup>.
- *La definición del capital empleado.* Solvencia II emplea para la determinación de la solvencia de un asegurador un enfoque económico o consistente con el mercado, por lo tanto, nuestro modelo debe seguir la misma senda y emplear el capital económico frente al capital contable<sup>3</sup>.
- *La medida del riesgo empleada.* Las cargas de capital de solvencia regulatorio para cada uno de los riesgos se establecen a partir del Valor en riesgo con un

---

<sup>1</sup> Lo que en terminología anglosajona se conoce como *Own Risk Solvency and Capital Assessment*.

<sup>2</sup> Frente a esta alternativa se podrían haber empleado otros plazos: *N* años, *run off* de los pasivos, etc.

<sup>3</sup> Debe recordarse que la primera sección del QIS4 fija los requisitos de valoración de los activos y pasivos (provisiones técnicas y otros pasivos).

nivel de confianza del 99,5% (*VaR* 99,5%), de forma consistente con lo establecido en Solvencia II.

- *Los riesgos a incluir.* La estructura de los riesgos es idéntica la empleada en QIS4 para una compañía de seguros no vida<sup>4</sup>. El BSCR se calcula a partir de las cargas para los riesgos aseguradores no vida (prima, reserva y catastrófico), riesgos de mercado (tipo de interés, renta variable, inmuebles, *spread*, divisa y concentración) y riesgo de contraparte. A esta cantidad se le añade la carga de capital por riesgo operativo y los ajustes derivados por las diferencias de valoración entre el Balance Económico y el Contable, obteniendo finalmente el SCR final.
- *Metodología de cuantificación.* La metodología empleada es modular al igual que el modelo estándar, y los diferentes componentes del capital de solvencia regulatorio se establecen para un *VaR* al 99,5% y con un horizonte temporal de un año. Esto facilita la comparación del modelo estándar frente al modelo DFA-USC v.1, a nivel agregado y para cada riesgo analizado. Sin embargo, al calcular el *VaR* por simulación estocástica y no analíticamente<sup>5</sup>, se permite el cálculo de medidas de riesgo alternativas<sup>6</sup>.
- *Agregación.* La agregación de las cargas de capital de los distintos riesgos se ha realizado a través de la correlación de los modelos estocásticos y mediante la técnica de la matriz de correlación. En ambos casos se emplean los coeficientes de correlación estipulados en QIS4. Ello implica que todas las dependencias establecidas son lineales, no empleándose cópulas. Sin embargo, esta opción se incluirá en posteriores versiones.
- *Basado en el modelo propuesto en Solvencia II.* Al igual que en el modelo estándar de QIS4, se ha implantado un modelo en Excel intentando mantener una estructura semejante en la medida de lo posible. Así, la estructura de los riesgos es idéntica a la empleada en QIS4 y se deben realizar una serie de pasos o fases para el cálculo de los requisitos de capital como son: derivar un Balance Económico, cuantificar los riesgos, agregar los riesgos y calcular el SCR. De esta forma, las principales diferencias con el modelo estándar proceden de la calibración de los modelos utilizados para simular los distintos subriesgos y la agregación/correlación de los mismos.

---

<sup>4</sup> Por tanto es obviado alguno de los riesgos que le pueden afectar a las entidades financieras como el riesgo de liquidez.

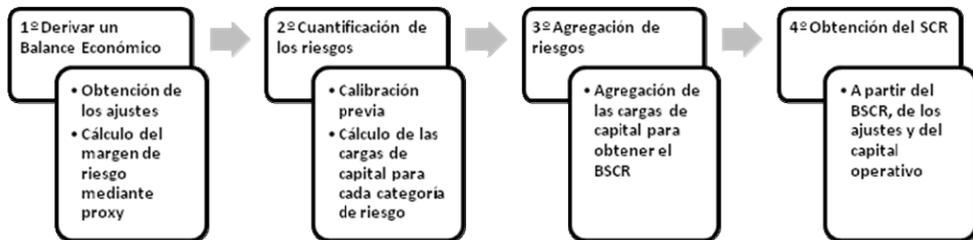
<sup>5</sup> La metodología empleada por el modelo estándar QIS4 es fundamentalmente una técnica basada en factores completada por escenarios de estrés (*Stress Testing*). Los factores se aplican, por ejemplo, para el riesgo de propiedades (20%), renta variable (fundamentalmente 32% o 45%), etc., mientras que los escenarios se aplican para el riesgo de tipo de interés (escenarios prefijados de subida y bajada de tipos) o para el riesgo catastrófico.

<sup>6</sup> Frente al *VaR* utilizado en la fórmula estándar de Solvencia II, los modelos DFA determinan esta medida a través de métodos de simulación basados en técnicas de Monte Carlo, lo cual aporta mayor flexibilidad al no tener que modelizar cada riesgo asumiendo la hipótesis de normalidad o lognormalidad. Por lo tanto, el *VaR* se calcula simplemente como el percentil deseado de la distribución de resultados simulada. Además, los modelos internos no se limitan a utilizar una única medida del riesgo, ya que pueden emplear la distribución simulada para calcular un grupo diverso de indicadores. Así, suele ser común, la determinación del *TailVaR* o *TVaR*.

El objetivo de esta parte del trabajo es documentar y describir las hipótesis empleadas y las metodologías seleccionadas en la configuración del modelo DFA-USC v.1. Para ello, este capítulo se estructura de la siguiente forma. En el apartado 2 se establece el proceso de determinación del capital en el modelo DFA desarrollado. En los epígrafes 3, 4, 5 y 6 se exponen brevemente los modelos seleccionados para la determinación de los requerimientos de capital asociados al riesgo asegurador, riesgo de mercado, riesgo de contraparte y riesgo operacional. Finalmente, en el apartado 7 se desarrolla un ejemplo práctico de cómo cuantifica el modelo la carga de capital de una hipotética compañía aseguradora no vida española.

## 2. PROCESO DE ANÁLISIS DEL RIESGO Y DETERMINACIÓN DE NECESIDADES DE CAPITAL EN EL MODELO DFA-USC V.1

El modelo DFA desarrollado permite obtener los requerimientos de capital de una aseguradora tras la realización de la secuencia que se recoge en el gráfico inferior. El primer paso consiste en derivar el Balance Económico a partir del Balance Contable mediante una serie de ajustes. El segundo paso consiste en la medición del impacto de los distintos riesgos (cuantificación). Finalmente, mediante la agregación de riesgos obtenemos el requerimiento de capital de solvencia (SCR).



A continuación describiremos los principales aspectos a considerar en cada una de las cuatro fases.

### 2.1. Derivar un Balance Económico

El primer paso consiste en derivar un Balance Económico a través de la realización de una serie de ajustes sobre los estados financieros contables, de forma que aparecerá una cuenta de Fondos Propios en el balance económico, denominada “Diferencias de valoración”. El resto de la diferencia de valor, es decir la debida al efecto impositivo, se cargará en la cuenta de Pasivo denominada “Pasivos por

impuestos diferidos”<sup>7</sup>. Las principales diferencias de valoración de un Balance económico respecto al Balance contable provendrá de:

- Los activos tangibles aparecen por su valor de mercado.
- Los activos intangibles no tendrán valor<sup>8</sup>.
- Las provisiones técnicas, son sustituidas por su valor actual esperado o *Best Estimate*. Además, para su valoración a mercado debe incluirse el margen de riesgo. Este margen de riesgo se calcula generalmente una vez obtenido el SCR mediante la metodología del Coste de Capital (CoC)<sup>9</sup>. Sin embargo, el modelo DFA desarrollado opta por aplicar una *proxy* consistente en aplicar un porcentaje estipulado sobre el valor de la mejor estimación de los pasivos. Este método también es contemplado en el QIS4, para aquellas compañías que tengan dificultades en aplicar el método del coste de capital.

## 2.2. Cuantificar los riesgos

Los riesgos que incorpora el modelo DFA-USC v.1 son evaluados para el horizonte de planificación de un año. El principal riesgo considerado es el riesgo de balance que consiste en el riesgo de activos (*asset risk*) y riesgo de pasivos (*liability risk*). El riesgo de activos proviene de un cambio en el valor de un activo existente. Ejemplos de este riesgo son, una caída del precio de los activos de renta variable, del valor de los inmuebles, o para los valores de renta fija, un cambio en los tipos de interés o en los *spreads*. El riesgo de pasivos está fundamentalmente relacionado con la adecuación de las provisiones de la compañía. Ejemplos de este riesgo son la posibilidad de que los pagos finales difieran de la estimación realizada en términos nominales o los efectos de los tipos de interés e inflación. Además, también es considerado el riesgo derivado de la cuenta de resultados. En este riesgo se incluye el efecto de que el resultado asegurador sea negativo en el año de análisis medido a través de la insuficiencia de las primas imputadas para hacer frente a la siniestralidad y otros gastos aseguradores de la compañía, así como las

---

<sup>7</sup> Estos ajustes son la diferencia entre el patrimonio neto económico y el patrimonio neto contable.

<sup>8</sup> De esta forma, tal y como se menciona en las especificaciones técnicas del QIS4, el valor de los activos intangibles incluyendo el valor del *goodwill* (Fondo de Comercio de Consolidación) para evaluar la solvencia de las compañías debe considerarse nulo, debido a que el valor económico de la mayoría de los activos intangibles es nulo o despreciable, ya que raramente tienen un valor convertible en efectivo.

<sup>9</sup> La razón de incorporar un margen de riesgo es que los pasivos relacionados con el riesgo de suscripción o asegurador no encuentran mercados en los que poder ser negociados, y por tanto se denominan riesgos no susceptibles de cobertura (*non-hedgeable risks*). De esta forma, y en línea con la teoría del coste del capital, para obtener el valor de mercado de las obligaciones se debe sumar a la mejor estimación dicho margen para obtener el valor de mercado. El margen de riesgo o RM se calcula como el valor actual del coste de oportunidad de mantener el capital requerido para riesgos no financieros y no susceptibles de cobertura durante todo el período que dure la liquidación total de los siniestros. Por tanto, los elementos que deberían ser estimados son el capital requerido (se considerara el riesgo soportado por la compañía y la duración y patrón de pagos de los pasivos) y el coste anual de soportar dicho capital (CoC).

pérdidas potenciales derivadas de eventos catastróficos y operativos. En concreto y a semejanza del QIS4 podemos hablar de los riesgos de mercado, de contraparte, riesgo asegurador o de suscripción no vida y operativo.

### 2.3. Agregar los riesgos

Las técnicas empleadas para la agregación de riesgos implantadas en este modelo son las matrices de correlación lineal y la generación de números aleatorios dependientes. La aplicación de este enfoque tiene el problema de que las dependencias entre riesgos sólo son lineales. A continuación, analizamos la alternativa empleada para la agregación de las distintas cargas de capital.

#### A. Riesgo de suscripción

Una vez realizado el cálculo del riesgo de primas y reservas para cada una de las dos líneas de negocio se procede a su agregación. Para ello, se agregan dentro de cada línea de negocio el riesgo de primas y de reservas estableciéndose un coeficiente de correlación lineal entre el valor de ambas cargas<sup>10</sup>. Finalmente el riesgo de primas y reservas de la compañía se considera independiente al riesgo catastrófico<sup>11</sup>.

#### B. Riesgo de mercado

Para la agregación de las cargas de capital de los distintos submódulos del riesgo de mercado se ha optado por la correlación de los factores de riesgo estocásticos mediante coeficientes de correlación lineal. Dado que todos los factores son generados a partir de la simulación de normales estandarizadas, se emplea el método de Cholesky. Para ello se utiliza la matriz de correlaciones estipulada en QIS4, sin embargo, ésta debiera ser calibrada a los residuos de los datos empleados en el ajuste de cada uno de los riesgos.

	$N(0,1)_{\text{interés}}$	$N(0,1)_{\text{rentavariabile}}$	$N(0,1)_{\text{inmuebles}}$	$N(0,1)_{\text{spread}}$	$N(0,1)_{\text{t.cambio}}$
$N(0,1)_{\text{interés}}$	1				
$N(0,1)_{\text{rentavariabile}}$	0	1			
$N(0,1)_{\text{inmuebles}}$	0,5	0,75	1		
$N(0,1)_{\text{spread}}$	0,25	0,25	0,25	1	
$N(0,1)_{\text{t.cambio}}$	0,25	0,25	0,25	0,25	1

<sup>10</sup> La metodología de agregación no es equivalente a la aplicada en QIS4. En QIS4 se supone que dicha correlación se establece entre el producto de la volatilidad y el volumen de cada ramo. Puede verse un desarrollo matemático de la fórmula de cálculo del riesgo asegurador y del método en el que se podrían calibrar a los datos internos los distintos coeficientes de correlación en Hürlimann (2008).

<sup>11</sup> La hipótesis de independencia implica que la agregación de las cargas se efectúa mediante la raíz de la suma de las cargas individuales al cuadrado.

Dado que los factores ya están correlacionados, la carga de capital de mercado será la simple suma de las cargas individuales. Alternativamente, se puede simular los riesgos de forma independiente para ver la carga de capital resultante, y de esta forma realizar la comparación con el modelo QIS4 y proceder al cálculo del beneficio por diversificación.

### C. Críticas

Al igual que la fórmula estándar de QIS4 hemos optado por emplear coeficientes de correlación para proceder a la agregación de los riesgos. Para la calibración de los coeficientes de correlación debiera emplearse los residuos de los modelos calibrados a las series de datos para los factores de riesgo durante el periodo y salto temporal para el que han sido calibrados. Frente a esta alternativa podrían calcularse los coeficientes de correlación por pares de factores de riesgo, es decir, dos a dos en periodos temporales comunes. El problema que se puede provocar es que la matriz de correlación no sea consistente<sup>12</sup>, por lo cual no se pueda proceder a la simulación para el riesgo de mercado<sup>13</sup>. Además, dado que la técnica de los coeficientes de correlación no mide adecuadamente la dependencia en los extremos o colas de los riesgos, la simulación estocástica debiera ser completada mediante el análisis de sensibilidad de las correlaciones empleadas y el análisis de escenarios de estrés. En futuras versiones del modelo DFA-USC v.1 será evaluada la necesidad de emplear cópulas para tratar diferentes tipos de dependencias.

## 2.4. Calcular el SCR y el MCR

El capital de solvencia obligatorio básico o BSCR para una compañía de seguros no vida es el requerimiento de capital de solvencia que combina las cargas de capital para las categorías de riesgo de mercado, contraparte y suscripción no vida. Para su estimación primero se realiza el cálculo del capital requerido para cada una de estas categorías de riesgo y, luego se agregan mediante la matriz de correlaciones mostrada en la siguiente tabla. Por lo tanto, la agregación de los riesgos es idéntica a la empleada por el QIS4.

---

<sup>12</sup> Formalmente semi-definida positiva. Una matriz de correlaciones inconsistente tiene relaciones simultáneas inválidas entre tres o más factores. Por ejemplo, si la correlación entre A y B es perfecta o de 1, y la correlación entre B y C es de 1, C y A no pueden tener un coeficiente de correlación de -1. Que la matriz sea semi-definida positiva implica que todos los auto valores son mayores o iguales que cero y, por lo menos, un auto valor es mayor que cero.

<sup>13</sup> Sin embargo, se podría calcular la matriz de correlaciones más próxima a una inválida. @Risk realiza este proceso automáticamente, sin embargo, la matriz obtenida debe revisarse para asegurar que establece las relaciones deseadas.

Una técnica comúnmente empleada consiste en establecer dichos coeficientes de correlación de forma subjetiva (por ejemplo: perfecta, muy alta, alta, media, baja, muy baja o nula) a los que se le asignan valores numéricos (por ejemplo: 1; 0,9; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1 y 0). Además, recuérdese que puede existir correlación negativa, por ejemplo entre los tipos de interés y la renta variable, en cuyo caso el beneficio por diversificación será mayor.

	$SCR_{\text{mercado}}$	$SCR_{\text{contraparte}}$	$SCR_{\text{no vida}}$
$SCR_{\text{mercado}}$	1		
$SCR_{\text{contraparte}}$	0,25	1	
$SCR_{\text{no vida}}$	0,25	0,5	1

Una vez obtenido el BSCR, y a semejanza del modelo estándar de QIS4, se procede al cálculo del SCR simplemente mediante la adicción de los ajustes y de la carga de capital por riesgo operativo. Por lo tanto se está asumiendo en la agregación entre el BSCR y el riesgo operativo la hipótesis de correlación perfecta<sup>14</sup>, al igual que en QIS4.

#### A. El ajuste por el efecto reductor del riesgo

Según la Directiva de Solvencia II debe considerarse en el SCR el ajuste destinado a tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos. De esta forma, en la fórmula para el cálculo del SCR a partir del BSCR para una compañía no vida, y además de la carga por riesgo operativo, se debe considerar el ajuste por el efecto de la reducción del riesgo derivado de los impuestos diferidos.

#### B. Cálculo del MCR

El cálculo del MCR se realiza en el modelo DFA- USC v.1 de igual manera que en la fórmula estándar de Solvencia II. Por ello se calcula el MCR lineal, el MCR combinado, y se considera el mínimo absoluto para una compañía aseguradora no vida.

### 3. MODELIZACIÓN REALIZADA DEL RIESGO ASEGURADOR

El riesgo de suscripción no vida se subdivide en: riesgo de insuficiencia de las provisiones técnicas, riesgo de primas y riesgo catastrófico.

#### 3.1. Riesgo de reserva

El riesgo de reserva (*reserve risk*) es el riesgo derivado de la incertidumbre de que éstas no sean suficientes para la liquidación de todos las prestaciones respecto a su valor esperado. En la literatura actuarial el riesgo de reserva hace referencia a la insuficiencia de las provisiones estimadas para cubrir los pagos de prestaciones durante el periodo de liquidación de los pasivos, es decir hasta su *run-off*. Sin embargo, bajo el proyecto de Solvencia II se debe calcular el riesgo de reserva a un

<sup>14</sup> La correlación perfecta implica la suma de todos los capitales.

año. En el informe de AISAM-ACME (2007)<sup>15</sup> se advierte de que para los ramos de negocio de cola larga el análisis del riesgo de reserva hasta el *run-off* es alrededor de dos o tres veces superior al efectuado al plazo de un año. Esto se debe a que el riesgo a 1 año puede ser bajo, ya que los movimientos adversos o infravaloraciones en la provisión por prestaciones sólo emergen al cabo de un número elevado de años. De esta forma, siguiendo a Ohlsson y Lauzenings (2008) y Diers (2009a), podemos establecer que:

- El análisis tradicional del riesgo de reserva se basa en el estudio de que la reserva estimada a comienzo del año (provisión por prestaciones en el momento inicial u *opening reserve*) sea insuficiente para afrontar los pagos totales durante la vida de los pasivos. Por lo tanto, sea  $R_0$  la provisión estimada a comienzo del año y  $S_\infty$  los pagos totales durante la vida de los pasivos, el riesgo de reserva es estimado estudiando la distribución de probabilidad de  $R_0 - S_\infty$ .
- El riesgo de reserva en Solvencia II debe basarse en el estudio de que la provisión por prestaciones en el momento inicial ( $R_0$  u *opening reserve*) sea insuficiente para afrontar la cantidad pagada en concepto de prestaciones durante el próximo año ( $S_1$ ) y  $R_0$  la estimación de las reservas realizada a final de año ( $R_1$  u *closing reserve*). De esta forma, el riesgo en el modelo estándar se obtiene a partir de la función de distribución de probabilidad de  $RR = R_0 - S_1 - R_1$  (*technical run-off result*).

#### A. Modelo empleado

El riesgo de reserva se calcula mediante un modelo estocástico de tipo Bootstrap que genera la distribución predictiva a través de una simulación de tipo Monte Carlo de la provisión para prestaciones. La variabilidad de las provisiones se obtiene mediante la realización del número de simulaciones aleatorias deseado a partir de la información histórica. El modelo DFA-USC v.1, permite calcular el riesgo de reserva a un año y por tanto establecer la carga de capital exigida en Solvencia II. A efectos comparativos también calcula el riesgo de reserva hasta la liquidación final de los pasivos. Por lo tanto:

- Se calcula el riesgo de la reserva *run-off* de cada ramo de negocio como la diferencia entre el VaR al 99,5% y la mejor estimación de la provisión de prestaciones (*best estimate*) para cada ramo, proyectadas hasta su liquidación a través de un patrón de pagos en el que se incluye el efecto de la inflación y se descuenta a la tasa libre de riesgo.
- Los cálculos efectuados para medir el riesgo de reserva a 1 año son más complejos, y están compuestos por los siguientes pasos (véase Ohlsson y Lauzenings, 2008 y Diers, 2009a):

---

<sup>15</sup> Cabe destacar además que en dicho estudio se advertía que eran pocas las compañías que se percibían de la inconsistencia entre el cálculo del riesgo de reservas tradicional y el requerido en Solvencia II.

- Paso 1: Estimar la reserva inicial. Se calcula el *best estimate* de la provisión por prestaciones al principio del periodo. Por lo tanto  $R_0$  es un valor determinista y dicho paso no difiere del empleado en el cálculo del riesgo hasta la liquidación de los pasivos.
- Paso 2: Generar el nuevo año. Se simulan las prestaciones pagadas a lo largo del próximo año para cada año de siniestro. Es decir, supongamos que tenemos un triángulo de desarrollo de prestaciones pagadas (sin acumular), con datos históricos de 10 años de desarrollo y de años de ocurrencia (véase el gráfico inferior). La siniestralidad pagada durante el próximo año ( $S_1$ ) se simula como suma de la nueva diagonal en el triángulo de desarrollo de prestaciones pagadas. Dicha simulación se realiza en el modelo DFA implantado mediante *bootstrapping*.
- Paso 3: Estimar la reserva al final del año analizado. Se calcula, para cada siniestralidad simulada en el paso anterior, la mejor estimación de la reserva  $R_1$ .
- Paso 4: Cálculo del riesgo de reserva a 1 año. A través de los pasos anteriores estamos en disposición de calcular la distribución del riesgo de reserva a 1 año. Para ello debemos realizar un número elevado de simulaciones de la siniestralidad a un año, para posteriormente calcular el *VaR* al 99,5% de la diferencia del valor actual de la siniestralidad del próximo año y de la mejor estimación actual de la provisión para prestaciones al final del año, menos la mejor estimación de la provisión realizada en el momento actual. En el modelo DFA desarrollado todas las cantidades son proyectadas hasta su liquidación a través de un patrón de pagos en el que se incluye el efecto de la inflación y se descuentan a la tasa libre de riesgo.

Año de ocurrencia	Año de desarrollo											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												

### B. Simplificaciones

Se ha establecido una serie de simplificaciones para calcular el riesgo de reserva de la compañía analizada:

- Se ha establecido un triángulo por cada línea de negocio. Por lo tanto, dentro de cada línea de negocio suponemos que los riesgos son homogéneos.
- El triángulo empleado está en términos nominales, por lo tanto se supone que las tasas de inflación pasadas son proyectadas al futuro, por lo que para obtener el valor actual de los flujos de caja sólo es necesario descontarlos a la tasa libre de riesgo. Alternativamente podríamos, como se ha explicado en este trabajo, actualizar todos los valores a términos reales y proyectar las tasas de inflación futuras mediante escenarios estocásticos o prefijados.
- Para el descuento de los flujos de caja ha sido empleada la curva estándar establecida en QIS4.
- Se incluye un factor de cola o *tail factor* calibrado en base a los datos del triángulo introducidos. El factor de cola es obtenido mediante una función exponencial calibrada a los últimos factores de desarrollo en base a una técnica de regresión log-lineal<sup>16</sup>.

Por lo tanto, el modelo implantado es similar al empleado en la herramienta para el cálculo de la mejor estimación de las provisiones por prestaciones puesta a disposición por el CEIOPS. La diferencia reside en que en nuestro modelo se genera la distribución de la reserva, por lo que se puede calcular el capital necesario para soportar el riesgo derivado de las desviaciones respecto a su valor esperado.

### C. Calibración

Para la calibración del riesgo de reserva se emplean los propios datos del triángulo de prestaciones liquidadas, no requiriéndose ningún parámetro adicional.

### D. Inputs del modelo

Se debe establecer el triángulo de prestaciones pagadas acumuladas para cada ramo de negocio. El modelo está pensado para una compañía con una historia de 10 ejercicios donde las columnas recogen los años de desarrollo y las filas los de ocurrencia. Adicionalmente, se debe introducir el año a partir del cual se quiere calcular el factor de cola.

### E. Debilidades y fortalezas del modelo empleado

El método *bootstrap* empleado tiene la ventaja, respecto a la fórmula de QIS4, que emplea la propia historia de la compañía para la estimación estocástica del riesgo de reserva. Al ser un método estocástico, permite realizar una estimación de la variabilidad de la provisión de prestaciones mediante el análisis de su distribución de probabilidad. Las principales fortalezas del método *bootstrap*, respecto a otros métodos estocásticos, son que: es relativamente fácil de entender por parte del

---

<sup>16</sup> Esta técnica ha sido elegida por ser la empleada en la herramienta de cálculo del BE de la provisión por prestaciones, puesta a disposición de las compañías aseguradoras no vida por el CEIOPS.

usuario, emplea a diferencia de otros métodos la distribución empírica<sup>17</sup> y puede ser aplicado a triángulos incompletos. El método propuesto tiene como principal debilidad, la sensibilidad a la presencia de *outliers* y la inadecuación cuando se aplica a datos con factores de desarrollo (LDF) inferiores a la unidad. Además, otra ventaja del modelo es que calcula el riesgo de reserva a un año, lo que es relativamente novedoso en la literatura actuarial.

### 3.2. Riesgo de prima

El riesgo de insuficiencia de primas es el riesgo de que la prima neta imputada para el año de análisis no sea suficiente para afrontar los siniestros netos que ocurran durante el periodo de cobertura (siniestros incurridos en el año y siniestros que están por incurrir y que deben estar recogidos en las provisiones) más los gastos necesarios para la gestión del negocio.

#### A. Modelo empleado

La modelización del riesgo de insuficiencia de prima se realiza empleando la ratio combinada (*combined ratio*) ajustada a la experiencia histórica de la compañía. La ratio combinada es una medida usada en el negocio asegurador que representa el porcentaje del importe de siniestralidad y los gastos operativos en relación al volumen de primas. Es por tanto, una medida de lo rentable que es el negocio asegurador y se puede obtener simplemente como la suma de la ratio de siniestralidad (*loss ratio*) y de la ratio de gastos (*expense ratio*). La ratio de siniestros expresa la relación entre los siniestros y las primas en términos de porcentaje. La ratio de gastos expresa la relación entre los gastos aseguradores y las primas. Cuando la ratio combinada supera el nivel de 100 la compañía experimenta una pérdida en el negocio asegurador, lo cual significa que los siniestros y gastos incurridos excedieron las primas ganadas.

La modelización de los siniestros se ha realizado a través de una simulación de tipo Monte Carlo empleando la ratio combinada ajustada a la experiencia histórica, lo que permite obtener la función de distribución del coste de los siniestros y de los gastos del negocio en relación a las primas. Ello permite derivar el capital económico como la diferencia entre el percentil 99,5% y el valor de 100%, que equivale a la igualdad entre primas y la suma de siniestralidad y gastos. Por lo tanto, calculamos el capital necesario con un nivel de confianza del 99,5% de que las primas netas imputadas a lo largo del próximo año sean inferiores a los siniestros netos y al conjunto de gastos aseguradores de la compañía.

---

<sup>17</sup> Piénsese por ejemplo el método de Mack que emplea la generalmente la lognormal o normal. Al emplear la distribución empírica se recomienda un triángulo con bastantes años para funcionar razonable bien. Los residuos remuestreados en el método actualmente implantado son los residuos de Pearson escalados.

## *B. Simplificaciones*

Se emplea la media y desviación históricas de la ratio combinada para el cálculo de los parámetros de una función lognormal, sin embargo, pueden ser empleadas fácilmente otras funciones.

## *C. Calibración*

El modelo es calibrado a los propios datos históricos de la ratio combinada, no requiriéndose parámetros adicionales.

## *D. Inputs del modelo*

Para cada ramo de negocio se deben introducir los datos históricos de la ratio combinada. A partir de estos valores se calculan los parámetros de la distribución lognormal.

Además, al igual que para el modelo estándar QIS4, deben ser introducidos los datos relativos a primas imputadas netas esperadas para el próximo año. En posteriores versiones del modelo DFA se tendrá en consideración el ciclo asegurador para modelizar su importe.

La ratio de siniestralidad que emplea QIS4, se calcula para cada año asegurador a partir de las primas imputadas y del coste estimado a finales del primer año de desarrollo. Es decir, el riesgo de primas corresponde a los pagos por prestaciones exclusivamente del ejercicio (pagos del primer año) y la provisión de prestaciones final constituida para el mismo año (*closing reserve* del año). En el modelo DFA, a dicha cantidad se debe añadir al coste estimado los gastos operativos para el cálculo del riesgo de primas.

## *E. Debilidades y fortalezas del modelo empleado.*

Las principales diferencias del modelo empleado frente al modelo estándar de QIS4 son las siguientes:

- En el modelo DFA sólo se tiene en cuenta en la calibración la experiencia histórica de la compañía. Por lo tanto, no se considera la credibilidad de dichos datos, lo que sería equivalente a emplear en el modelo QIS4 la volatilidad propia de la empresa y no ponderarla por la del mercado.
- El modelo estándar calcula la volatilidad de primas en base a la ratio de siniestralidad, y no en base a la ratio combinada. Este cambio fue ya adoptado en el QIS3, y la razón aportada es que es una base más objetiva para medir la volatilidad de las distintas empresas. Sin embargo, provoca que bajo la fórmula estándar dos compañías con distinto ratio de gastos tengan el mismo riesgo de primas.
- Para el cálculo de la volatilidad en el QIS4, los ratios de siniestralidad están ponderadas en función del volumen de primas imputadas de cada año, mientras

que el modelo propuesto, emplea los valores sin ponderar para la calibración de la distribución de la ratio combinada.

- La ratio combinada histórica empleada en el modelo DFA se basa en las primas imputadas. Por lo tanto, son las primas imputadas netas esperadas en el próximo año la medida de volumen seleccionada para evaluar el riesgo de primas. Esto contrasta con la alternativa empleada en QIS4 que puede utilizar otra medida. Esto se produce cuando bien las primas suscritas esperadas, bien las primas suscritas en el año actual multiplicadas por 105%, sean superiores a las primas ganadas esperadas.
- Otro aspecto no considerado en el modelo DFA-USC v.1 y si en QIS4 es la reducción de la carga de capital para las compañías que operan en varias áreas geográficas. Este problema se solucionaría fácilmente mediante la calibración de la ratio combinada por región geográfica y procediendo posteriormente a las agregaciones de las cargas de cada área. Actualmente, el modelo DFA-USC v.1 sólo considera una ratio combinada para todas las regiones.
- El modelo DFA estima el riesgo a partir de las desviaciones del coste de siniestralidad y gastos respecto a las primas imputadas, mientras que QIS 4 se calculan las desviaciones de siniestralidad respecto a su media<sup>18</sup>.

Cada alternativa tiene sus puntos fuertes y sus puntos débiles. Las principales ventajas del modelo DFA son:

- Las pérdidas o beneficios esperados del resultado asegurador no se computan en la fórmula estándar de QIS4 y si en el modelo DFA. Una compañía que a lo largo de la historia tenga una ratio combinada inferior a 100%, tendrá un riesgo de insuficiencia de primas reducido en nuestro modelo. Sin embargo, bajo QIS4, su riesgo sólo está en función de la variabilidad de la ratio de siniestralidad, por lo que tendrá más riesgo que una compañía que tenga una ratio más estable pero superior a 100%.
- En nuestro modelo es más fácil ajustar los parámetros de las distribuciones empleadas, de forma que se ponga en evidencia las últimas tendencias de la ratio combinada. Nos estamos refiriendo a tendencias alcistas o decrecientes de la ratio combinada, al mismo tiempo que se podría considerar la modelización del ciclo asegurador, ya que es bien sabido que cíclicamente se dan condiciones de mercado que llevan a las compañías a aumentar o disminuir las primas.

Las debilidades de la metodología empleada bajo el modelo DFA-USC v.1 provoca que pueda no ser adecuado para algunas aseguradoras, especialmente cuando tengan poca experiencia en alguna línea de negocio o hayan experimentado un

---

<sup>18</sup> Ello se debe a que sea  $P$  las primas de una cartera para el periodo considerado (primas de mercado netas),  $S$  la siniestralidad de la cartera para el periodo considerado (incluidos los gastos), y  $L$  el resultado asegurador al principio del periodo definido como la diferencia entre la siniestralidad y las primas, es decir,  $L = S - P$ . Por el principio de equivalencia  $E[L] = 0$ , lo que implica que el valor esperado de la ratio combinada es 1. Sin embargo, en la práctica esta equivalencia no se cumple.

crecimiento notable en los últimos años. Otras críticas a esta metodología pueden emanar de la modelización de la siniestralidad a través del uso del *loss ratio*, ya que como hemos mencionado a lo largo de este trabajo pueden ser empleadas otras metodologías: frecuencia y severidad de los siniestros, etc. Además, podría haberse realizado una modelización por tipología de siniestros en función de sus importes (por ejemplo, diferenciar los siniestros de bajo importe de los de importe más elevado), o modelizar de forma separada la ratio de siniestralidad y la ratio de gastos.

### 3.3. Riesgo catastrófico

El riesgo catastrófico contempla el riesgo derivado de eventos extremos o irregulares, y que no son capturados suficientemente por las cargas de capital asociadas a los riesgos de prima y reserva.

#### A. Modelo empleado

Las compañías aseguradoras no vida con exposición a riesgos catastróficos pueden tener que hacer frente a pérdidas catastróficas derivadas de terremotos, tormentas, huracanes, etc. Hemos supuesto que la modelización del riesgo, su calibración y por tanto la carga de capital, se produce en función de cada ramo de negocio, ya que los distintos ramos pueden tener distinta exposición. Diers (2008) discute distintas alternativas para la modelización del riesgo catastrófico en DFA.

En el modelo DFA-USC v.1 las pérdidas catastróficas se simulan a partir de una técnica frecuencia-severidad por región geográfica. El proceso de simulación para cada línea de negocio consiste en:

- El número de catástrofes, para cada ramo a nivel global (conjunto de compañías aseguradoras) y durante el próximo año, se determina en base a una distribución Poisson.
- Cada catástrofe originada es asignada a un área geográfica específica. El modelo está diseñado para cuatro regiones denominadas de forma genérica A, B, C y D.
- Una vez asignada a un área específica, el tamaño agregado a nivel global se determina en base a una distribución lognormal ajustada a la experiencia histórica.
- Se determina la distribución geográfica del evento en base a una matriz de correlación de frecuencia territorial. Es decir, se emplea una matriz de contagio para simular la correlación entre los eventos catastróficos entre regiones con proximidad geográfica, y distribuir las pérdidas simuladas por la catástrofe entre todas las regiones afectadas.
- Finalmente, las pérdidas son asignadas a la compañía en base a la cuota de mercado de las líneas expuestas en cada región a riesgo catastrófico.

## *B. Simplificaciones*

En este modelo se realizan una serie de simplificaciones:

- La modelización de las catástrofes ha sido diseñada para cada ramo a nivel global, para posteriormente imputársela a la compañía en función de la cuota de mercado y de la severidad de cada región. Esta alternativa se ha considerado más adecuada que la modelización de las catástrofes que le afecten exclusivamente a la compañía, dada la mayor disponibilidad de datos a nivel agregado.
- Las catástrofes originadas son las mismas para los distintos ramos, sin embargo, su severidad es distinta. De esta forma se intenta recoger que son los mismos eventos catastróficos los que le afectan a todos los ramos de negocio. Sin embargo, el impacto que tienen es específico de cada ramo (pudiendo ser incluso nulo), y por lo tanto los parámetros de la distribución de severidad son distintos.
- Se ha empleado de forma predefinida la distribución de Poisson y la lognormal, pero pudiera ser que otras distribuciones fueran más adecuadas.

## *C. Calibración*

No ha sido realizada calibración alguna de este riesgo, dada la no disponibilidad de datos. Sin embargo, el empleo de la distribución lognormal hace que la calibración de la función de distribución de los siniestros por parte de cualquier compañía resulte muy sencilla a partir de la media y la desviación histórica de las pérdidas a nivel de cada área geográfica. La calibración de la función de distribución de frecuencia también resulta muy sencilla al emplear una Poisson, dado que el parámetro para cada región viene determinado por la media histórica. La interdependencia entre los eventos catastróficos de las distintas regiones se establece en base a una matriz de correlación de frecuencia territorial derivada a partir de patrones históricos. Es de esperar que, cuanto más próximos estén las regiones, mayor probabilidad de contagio entre ellas.

## *D. Inputs del modelo*

Para cada uno de los ramos de negocio y las cuatro regiones geográficas estipuladas deben rellenarse los datos relativos a: frecuencia y severidad, matriz de contagio entre regiones y cuota de mercado de la empresa en la región. La frecuencia es idéntica para cada uno de los ramos ya que se simulan las catástrofes totales.

## *E. Debilidades y fortalezas del modelo empleado*

La alternativa u opción 1 empleada en la fórmula estándar de QIS 4 es una aproximación al riesgo catastrófico en base al volumen de primas esperado para el próximo año para cada ramo de la compañía. El sistema del modelo DFA-USC v.1 puede ser empleado en QIS4 bajo el método 3 opcional de escenarios personali-

zados, en los que cada compañía propone sus escenarios particulares en la modelización del riesgo. Sin embargo, el desafío particular de este sistema es la obtención de una base de datos histórica fiable para la calibración de los parámetros empleados. Otra alternativa contemplada bajo QIS4 y no abordada aquí es el cálculo de la carga por medio de escenarios prefijados.

#### 4. MODELIZACIÓN REALIZADA DEL RIESGO DE MERCADO

El riesgo de mercado proviene de los cambios en los precios de los instrumentos financieros. Se establecen los submódulos de tipos de interés, renta variable, propiedades inmobiliarias, tipos de cambio, *spread* y concentración.

##### 4.1. Riesgo de tipo de interés

El riesgo de tipos de interés se deriva de las variaciones en el valor de los activos y pasivos sensibles a los cambios en la estructura temporal de los tipos de interés.

###### A. Modelo

La alternativa empleada en el modelo DFA-USC v.1 consiste en emplear un generador de escenarios estocásticos para las curvas libres de riesgo. El modelo empleado es el modelo de Vasicek de 2 factores calibrado con información de mercado histórica, siendo empleado en el contexto de la generación de escenarios mediante DFA por Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004b) Dicho modelo se utiliza para proyectar la estructura temporal de tipos de interés a un año. Formalmente, bajo este modelo el tipo a corto plazo ( $r_{1t}$ ) revierte a un tipo a largo plazo estocástico ( $r_{2t}$ ), que a su vez revierte a un nivel medio determinista ( $\theta$ ). Las fórmulas específicas usadas son:

$$dr_{1t} = \kappa_{r_1}(r_{2t} - r_{1t})dt + \sigma_{r_1}Z_{1t}$$

$$dr_{2t} = \kappa_{r_2}(\theta - r_{2t})dt + \sigma_{r_2}Z_{2t}$$

En tiempo discreto toma la forma siguiente:

$$\Delta r_{1t} = a(r_{2t} - r_{1t-1}) + s_{r_1}\varepsilon_{1t}$$

$$\Delta r_{2t} = b(c - r_{2t-1}) + s_{r_2}\varepsilon_{2t}$$

Siendo:

- $r_{1t}$  el tipo de interés a corto plazo.
- $r_{2t}$  la media a la que revierte el tipo a corto plazo.
- $a$  la velocidad de reversión a la media del proceso de reversión del tipo a corto plazo  $r_{1t}$ .

- $b$  la velocidad de reversión a la media del proceso de reversión del tipo a largo plazo.
- $s_{r_1}$  la volatilidad (desviación estándar) del tipo a corto plazo.
- $s_{r_2}$  la volatilidad (desviación estándar) del tipo a largo plazo.
- $c$  el nivel de reversión del tipo a largo plazo  $r_{2t}$ .
- $\varepsilon_{1t}$  distribución normal estándar para el proceso del tipo de interés a corto plazo.
- $\varepsilon_{2t}$  distribución normal estándar para el proceso del tipo de interés a largo plazo.

El modelo dispone, como ya se ha descrito a lo largo de este trabajo, de una forma cerrada para la valoración de los títulos de renta fija, a partir de la cual se puede derivar la ETTI.

### B. Calibración

Para la simulación de los escenarios de tipos de interés deben establecerse los parámetros del modelo. Los datos prefijados han sido calibrados a la curva de tipos Euribor del periodo Enero de 2001 a Junio de 2008<sup>19</sup>.

Parámetros modelo Vasicek 2 factores mensual	
Tipo a corto plazo actual ( $r_{10}$ )	4,46%
Tipo a largo plazo actual ( $r_{20}$ )	4,85%
Velocidad de reversión tipo a corto ( $a$ )	-0,52%
Velocidad de reversión tipo a largo ( $b$ )	4,68%
Volatilidad tipo a corto ( $s_{r_1}$ )	0,17%
Volatilidad tipo a largo ( $s_{r_2}$ )	0,15%
Nivel de reversión a largo plazo ( $c$ )	4,73%
Correlación entre residuos	-5,75%

### C. Inputs del modelo

Al igual que en el modelo estándar de QIS4 se deben establecer los flujos de caja de activo (entrada) y de pasivo (salida) para los próximos años. Los flujos de pasivo derivado de las prestaciones son calculados automáticamente por el modelo a partir de los datos del triángulo histórico de prestaciones empleado para el cálculo del riesgo de reserva.

<sup>19</sup> Se han empleado los tipos EURIBOR a 1 mes y a 30 años como *proxys* de los tipos a corto y largo plazo respectivamente. Se ha estimado el modelo empleando distintos plazos de los tipos, no proporcionándose muy buen ajuste para ninguno de los plazos considerados.

#### D. Debilidades y fortalezas del modelo empleado

En el modelo DFA-USC v.1 se emplea un generador estocástico de tipos de interés lo que tiene como principal ventaja que evalúa los activos y pasivos de la compañía ante una amplia gama de movimientos de tipos. La principal desventaja de emplear un modelo estocástico frente a un modelo de escenarios predeterminados, como es el caso de QIS4, es que el modelo no sea capaz de generar los niveles o la forma de la curva de tipos a plazo que se desea estresar.

#### 4.2. Riesgo de renta variable

El riesgo derivado de la inversión en renta variable surge del nivel de volatilidad de los precios de mercado de las inversiones en activos de renta variable.

##### A. Modelo

El riesgo de renta variable se simula a través de un modelo de cambio de régimen lognormal (RSLN) de dos regímenes. El modelo RSLN propuesto por Hardy (2001) asume que en cada uno de los dos regímenes de la economía los rendimientos ( $y_t$ ) siguen un modelo normal independiente donde los parámetros son distintos para cada régimen  $p_t$ , es decir:

$$y_t = \mu_{p_t} + \sigma_{p_t} Z_t$$

Donde  $Z_t \sim N(0; 1)$  para  $t = 1, 2, \dots$  y  $p_t$  representa cada uno de los dos estados. Mediante la simulación del modelo RSLN se genera el número de escenarios deseados para los 12 rendimientos mensuales, obteniéndose la carga de capital porcentual como el valor del percentil 0,5 de la rentabilidad acumulada para un año. La elección de dicho modelo se ha basado en el buen ajuste que presenta a las colas de la distribución de los rendimientos de la renta variable y su relativa sencillez.

##### B. Calibración del modelo

Para la simulación de los escenarios de renta variable deben establecerse los parámetros del modelo RSLN: media y volatilidad de cada uno de los regímenes y la matriz de probabilidades de transición entre los regímenes. El modelo se ha calibrado a la información de mercado histórica de los rendimientos logarítmicos del IBEX 35 de Enero de 1992 a Diciembre de 2008.

Régimen 1	
Media ( $\mu_1$ )	-0,52%
Volatilidad ( $\sigma_1$ )	7,94%
Régimen 2	
Media ( $\mu_2$ )	1,92%
Volatilidad ( $\sigma_2$ )	3,70%

Inicial/Final	Régimen 1	Régimen 2	Total
Régimen 1	96,32%	3,68%	100%
Régimen 2	4,68%	95,32%	100%

Adicionalmente debe ser establecido el último régimen de la posición de mercado, ya que los regímenes no son independientes. Alternativamente el régimen del mes 1 de la simulación podría ser calculado a partir de las probabilidades incondicionales derivadas de la matriz de probabilidades de transición.

### *C. Simplificaciones*

Por simplicidad se han considerado exclusivamente carteras de IBEX 35. Esto significa que se modela el comportamiento de la cartera en conjunto. La inclusión de más índices es sencilla mediante la calibración del modelo RSLN u otro a los distintos índices. En este caso, se debe correlacionar la rentabilidad obtenida por los distintos índices en cada periodo, bien empleando modelos multivariantes bien correlacionando los residuos.

### *D. Input*

Al igual que en el modelo estándar de QIS4 se debe establecer el valor de mercado para la renta variable de la compañía.

### *E. Fortalezas del modelo empleado*

La principal fortaleza de aplicar un modelo generador de la rentabilidad como el modelo RSLN, es que permite una proyección del riesgo al plazo deseado de la cartera exacta de la compañía. De esta forma una compañía que replique índices de mercado, como es frecuente, puede calcular mediante este tipo de modelos el riesgo de invertir en esos índices y no el factor estipulado en QIS4. Al mismo tiempo, mediante este modelo se generan heterocedasticidad en la serie proporcionando un buen ajuste en general a distintos índices de mercado.

## **4.3. Riesgo de inmuebles**

Es el riesgo derivado de la variabilidad de los precios de mercado de la propiedad inmobiliaria.

### *A. Modelo*

Dado que no disponemos de datos válidos para la calibración del modelo y su validación, hemos optado por emplear un modelo autorregresivo tipo AR (1), a semejanza del empleado para la generación de escenarios para la CAS y SOA por

Ahlgrim *et al.* (2004b)<sup>20</sup>. Se dice que una serie de rendimientos ( $y_t$ ) sigue un proceso autorregresivo de primer orden o un AR(1) si ha sido generada por la siguiente ecuación:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde  $\phi_0$  o término independiente de la regresión y  $-1 < \phi_1 < 1$ <sup>21</sup> son las constantes a determinar<sup>22</sup>, y  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco de media cero y con varianza  $\sigma_\varepsilon^2$  constante.

El riesgo derivado de las propiedades inmobiliarias se calcula mediante simulación, a través de la generación del número de escenarios deseados de rendimientos mensuales. La carga de capital porcentual se obtiene como el valor del percentil 0,5 de la rentabilidad acumulada al cabo de un año.

### B. Calibración del modelo

Dicho modelo no ha sido calibrado<sup>23</sup>, siendo el usuario responsable de la calibración a aquel índice representativo de su cartera de inmuebles. Para la simulación de los escenarios de renta variable se han establecido los siguientes parámetros del modelo AR(1).

<b>Parámetros del modelo AR(1) mensual</b>	
Deriva ( $\phi_0$ )	15,0%
Parámetro autorregresivo ( $\phi_1$ )	2,6%
Varianza de la perturbación ( $\sigma_\varepsilon^2$ )	15,0%

Adicionalmente debe establecerse la rentabilidad inicial o del último periodo calibrado, ya que las rentabilidades simuladas no son independientes sino que están correlacionadas.

<b>Rentabilidad inicial</b>	<b>-2%</b>
-----------------------------	------------

<sup>20</sup> La principal diferencia entre nuestro modelo y el de los citados autores es que el salto temporal de la simulación del modelo, en nuestro caso es mensual mientras que ellos aplican un salto cuatrimestral, además del periodo de proyección (1 año frente a 50 años).

<sup>21</sup> Cuando  $-1 < \phi_1 < 1$  el valor de  $y_{t-1}$  es útil para modelizar el valor de  $x_t$ . Si  $\phi_1 = 0$  la serie de datos es ruido blanco, mientras que si  $\phi_1 = 1$  es un camino o paseo aleatorio.

<sup>22</sup> El valor de  $\phi_0$  representa el valor del incremento/decremento medio, mientras que la restricción  $-1 < \phi_1 < 1$  es necesaria para que el proceso sea estacionario.

<sup>23</sup> Debiéramos emplear en su calibración, índices con datos basados en precios de transacción y no en tasaciones, dado que las series temporales estarían suavizadas y podríamos subestimar los movimientos reales de mercado. Para ello una alternativa sería, al igual que se hace en la calibración del modelo estándar, "des-suavizar" el índice.

### C. Inputs

Al igual que en el modelo estándar de QIS4 se debe establecer el valor de mercado.

### D. Debilidad del modelo empleado

La principal debilidad del modelo empleado reside en que no ha sido calibrado ni validado.

## 4.4. Riesgo de tipo de cambio

El riesgo de divisa surge por el impacto que las variaciones de los tipos de cambio pueden tener sobre el valor de la empresa.

### A. Modelo

A partir del valor de mercado de los activos y pasivos en moneda extranjera, hemos aplicado un modelo GARCH (1,1) para un hipotético tipo de cambio. El modelo GARCH (1,1) para los rendimientos ( $y_t$ ) está formado por las siguientes ecuaciones:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Donde  $\mu$  es una constante,  $z_t$  es un ruido blanco, y  $\omega$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son coeficientes que cumplen la siguiente condición  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Mediante simulación se generan escenarios para los 12 rendimientos mensuales obteniéndose la carga de capital porcentual como el valor del VaR al 99,5% de las pérdidas derivadas a un año en euros.

### B. Simplificaciones

Hemos considerado exclusivamente que el activo y pasivo de la compañía aseguradora están expuestos a una única moneda.

### C. Calibración del modelo

Para la simulación de los escenarios de tipos de cambio deben establecerse los parámetros del modelo GARCH (1,1). Adicionalmente debe introducirse la rentabilidad inicial o del último periodo calibrado y su correspondiente volatilidad, ya que las volatilidades simuladas son dependientes de sus valores pasados (heterocedasticidad). Dicho modelo ha sido calibrado al tipo de cambio dólar/euro desde Enero de 1999 a Diciembre de 2008.

Parámetros del modelo GARCH(1,1) mensual	
$\mu$	0,37%
$\omega$	0,01%
$\alpha_1$	15,71%
$\beta_1$	73,60%

Rentabilidad inicial	Volatilidad inicial
9,17%	4,66%

#### D. Inputs

Al igual que en el modelo estándar de QIS4 se debe introducir el valor de mercado en euros de los activos y pasivos expuestos a riesgo de tipo de cambio.

#### E. Fortalezas del modelo empleado

El modelo GARCH(1,1) ha proporcionado en múltiples estudios muy buenos resultados para la modelización de los tipos de cambio. Este tipo de modelos permite una proyección del riesgo mantenido en las distintas divisas generando un conjunto amplio de escenarios para medir la solvencia de la compañía. Sin embargo, una compañía aseguradora puede tener activos y pasivos nominados en distintas monedas, por lo que puede ser necesario emplear modelos multivariantes, modelos univariantes correlacionados o calibrar el modelo a una cesta de divisas.

### 4.5. Riesgo de *spread*

El riesgo de *spread* surge como consecuencia del impacto de las variaciones de los diferenciales de crédito en el valor de los activos de renta fija. Por tanto, refleja el cambio en el valor de los activos debido al movimiento de la curva de tipos en relación a la curva de tipos sin riesgo.

#### A. Modelo empleado

El modelo empleado para calcular el riesgo de *spread* se basa en un modelo log-normal, que toma como punto de partida el *spread* inicial, sobre el que se calcula la variación máxima que se puede producir en el valor de mercado de cada clase de *rating* a un año, con un nivel de confianza del 99,5%. Para ello se calcula la tasa interna de rentabilidad (TIR) sin riesgo actual de los títulos, y se procede a su nueva valoración en base a la adicción a dicha tasa de los niveles de *spreads* simulados para cada categoría.

## B. Calibración del modelo

Dicho modelo ha sido calibrado a la serie de *spread* para las categorías de rating AAA, AA, A y BBB durante el periodo temporal 31/12/2001 a 30/06/2008. Los parámetros que emplea el modelo lognormal DFA son la media, desviación, *spread* inicial y correlación entre ratings. De manera formal, podemos decir que estamos empleando una distribución normal multivariante para los rendimientos logarítmicos de los *spreads*.

	<b>AAA</b>	<b>AA</b>	<b>A</b>	<b>BBB</b>
Media	1,00%	1,31%	0,98%	0,25%
Volatilidad	10,47%	9,66%	9,92%	11,95%
Último <i>spread</i>	0,61%	1,33%	2,11%	2,12%

<b>Corr. spreads</b>	<b>AAA</b>	<b>AA</b>	<b>A</b>	<b>BBB</b>
AAA	100%	80%	76%	49%
AA	80%	100%	89%	65%
A	76%	89%	100%	73%
BBB	49%	65%	73%	100%

## C. Inputs

Para calcular el riesgo de *spread* de cada rating se debe establecer, a semejanza del modelo estándar QIS4, el valor de mercado<sup>24</sup>

## D. Simplificaciones

La principal simplificación del modelo empleado reside en que supone una estructura temporal plana de *spreads*, cuando en realidad los *spreads* pueden ser distintos para diferentes vencimientos<sup>25</sup>.

<sup>24</sup> Debe mencionarse que los flujos de caja de cada clase de rating ya se han introducido en el modelo, en los datos correspondientes a los flujos de caja de activo para el riesgo de tipos de interés.

<sup>25</sup> Además, dada la serie de tiempo que se ha utilizado para realizar el ajuste, donde los *spreads* A han experimentado un incremento brusco, se aprecia que en varias de las simulaciones los *spreads* de clase BBB son inferiores a los de clase A.

#### **4.6. Riesgo de concentración**

El riesgo de mercado por concentración surge como consecuencia de la volatilidad adicional existente en carteras concentradas de activos y de la posible pérdida total o parcial de valor por *default* o incumplimiento del emisor.

##### *A. Modelo empleado*

Hemos optado por emplear el modelo estándar de QIS4.

#### **5. MODELIZACIÓN REALIZADA DEL RIESGO DE CONTRAPARTE**

El riesgo de contraparte es el riesgo derivado de las posibles pérdidas derivadas de la quiebra o del deterioro del crédito de la contraparte o deudores en contratos de mitigaciones de riesgo como el reaseguro.

##### *A. Modelo empleado*

No se ha desarrollado ningún modelo específico, optándose por el empleo del estándar de QIS4.

#### **6. MODELIZACIÓN REALIZADA DEL RIESGO OPERATIVO**

El riesgo operativo es el riesgo de pérdida derivado de procesos internos inadecuados, personal, sistemas o sucesos externos.

##### *A. Modelo empleado*

La carga de capital para el riesgo operacional ha sido calculada modelizando la frecuencia y la severidad de los siniestros de severidad normal, de forma separada a los de severidad elevada. Los siniestros de severidad normal se simulan mediante una distribución de Poisson para la frecuencia y una distribución lognormal para la severidad, mientras que para los siniestros de alta severidad se ha empleado una distribución Poisson para la frecuencia y una distribución de Pareto para la severidad.

##### *B. Calibración del modelo*

Los parámetros de dicho modelo no han sido estimados, siendo el usuario responsable de la calibración del mismo a partir de la base de datos interna de la compañía aseguradora. En caso de que dicha base de datos sea insuficiente debe ser completada con bases de datos externas y/o opiniones expertas.

### C. Inputs

Para calcular el riesgo operativo se han establecido los siguientes parámetros de las distribuciones de frecuencia y severidad de los eventos normales y graves

### D. Simplificaciones

La principal simplificación del modelo empleado reside en que supone que existen dos clases bien diferenciadas de eventos, para los cuales se emplean unas distribuciones que se espera proporcionen buenos ajustes. Sin embargo, el modelo es fácilmente adaptable a otras distribuciones o a otra técnica de simulación.

### E. Debilidades y fortalezas del modelo empleado

La principal dificultad del modelo empleado reside en la obtención de datos fiables, condición necesaria para la correcta calibración del mismo. Dada la no disponibilidad de datos no se ha podido realizar la validación de la técnica de modelización implantada.

## 7. EJEMPLO DE LA UTILIZACIÓN DEL MODELO DFA-USC V.1

En este apartado del trabajo mostramos los resultados de aplicar el modelo DFA-USC v.1 a un caso hipotético de una compañía aseguradora no vida. A continuación se exponen las principales hipótesis empleadas en el funcionamiento del modelo:

- Solvencia II considera que las provisiones técnicas están constituidas por la provisión de primas y la provisión para prestaciones. De esta forma la provisión para primas recogería el valor de mercado de la provisión para primas no consumidas y la provisión para riesgos en curso al cierre del ejercicio. La provisión para prestaciones que utilizamos incluye las prestaciones pendientes de liquidación o pago, la provisión de gastos internos de liquidación de siniestros, la provisión de siniestros pendientes de declaración y otras provisiones técnicas. El modelo DFA- USC v.1, al igual que realiza el modelo estándar QIS4, presupone que para cada una de las líneas de negocio la compañía calcula el *best estimate* (BE) de la provisión de primas por algún método actuarial estadístico. Sin embargo, el modelo DFA-USC v.1 contempla una hoja en la que se calcula la mejor estimación de la provisión para prestaciones en base a los datos de siniestralidad introducidos.
- Solvencia II considera que los activos deben estar valorados a precios de mercado. Suponemos que la compañía conoce para sus activos su valor de mercado al cierre, y por lo tanto lo detalla en el Balance económico.

## 7.1. Hipótesis realizadas sobre la compañía

En este apartado se muestran las principales hipótesis realizadas sobre la compañía aseguradora no vida a la cual se le aplica el modelo DFA-USC v.1:

- La compañía analizada es una aseguradora española no vida que opera en el ramo de autos (responsabilidad civil), y en un área geográfica (A). Sin embargo, el modelo puede emplearse para una compañía que opere hasta en cuatro regiones geográficas distintas (A, B, C y D). Por otra parte, asumimos que la compañía retiene todo el negocio captado.
- Por el lado inversor también se han establecido simplificaciones. La cartera mantenida por el asegurador está bien diversificada<sup>26</sup> e invierte en renta variable nacional (Fondo de inversión que replica el IBEX 35), en renta fija privada y soberana y en propiedades inmobiliarias. Parte de su activo está invertido en el mercado internacional (Estados Unidos), estando expuesto al riesgo de tipo de cambio (dólar/euro).

En la siguiente tabla recogemos el Activo contable de la compañía.

<b>Activo</b>	<b>Balance Contable</b>
Accionistas, por desembolsos no exigidos	
Intangibles	500.000,00
Reaseguro	
Inversiones	41.000.000,00
<i>Terrenos y construcciones</i>	10.000.000,00
<i>Inversiones en empresas vinculadas</i>	
<i>Valores de renta fija</i>	21.000.000,00
<i>Acciones</i>	10.000.000,00
<i>Depósitos relativos al reaseguro</i>	
<i>Otros</i>	
Efectivo y cuentas corrientes	2.000.000,00
Activo por impuestos diferidos	
Costes de adquisición diferidos	
Otros activos	
<b>Total</b>	<b>43.500.000,00</b>

<sup>26</sup> Como veremos posteriormente, no tiene riesgo de concentración.

En la siguiente tabla recogemos Pasivo contable de la compañía.

<b>Pasivo</b>	<b>Balance Contable</b>
Capital social	7.000.000,00
Diferencias de valoración	
Pasivos subordinados	
Otros pasivos financieros	
Provisiones Técnicas (BE)	35.500.000,00
Provisiones Técnicas – Margen de riesgo (neto de reaseguro)	
Depósitos de los reaseguradores	
Impuestos diferidos	
Provisión para riesgos y gastos	
Otros pasivos	1.000.000,00
<b>Total</b>	<b>43.500.000,00</b>

A partir de los datos del Balance Contable de la compañía procedemos a realizar los siguientes ajustes:

- Los activos intangibles toman valor 0 frente a su valor contable anterior.
- Los terrenos y construcciones aparecen a su valor de mercado, que suponemos superior a su valor contable.
- Las provisiones técnicas deben mostrarse a su valor económico. Para ello se realiza la mejor estimación a partir del triángulo de prestaciones introducido, y se calcula el margen de riesgo mediante la técnica *proxy*.
- Fruto de estos ajustes y suponiendo que el tipo impositivo es del 30%, aparece una nueva cuenta de impuestos diferidos (tipo impositivo por el valor de los ajustes) y diferencias de valoración (complementario del tipo impositivo por el valor de los ajustes).

A continuación se muestra el Activo y Pasivo económico de la hipotética compañía.

<b>Activo</b>	<b>Balance Económico QIS4</b>
Accionistas, por desembolsos no exigidos	
Intangibles	0,00
Reaseguro	0,00
Inversiones	42.000.000,00
<i>Terrenos y construcciones</i>	11.000.000,00
<i>Inversiones en empresas vinculadas</i>	
<i>Valores de renta fija</i>	21.000.000,00
<i>Acciones</i>	10.000.000,00
<i>Depósitos relativos al reaseguro</i>	
<i>Otros</i>	
Efectivo y cuentas corrientes	2.000.000,00
Activo por impuestos diferidos	
Costes de adquisición diferidos	
Otros activos	
<b>Total</b>	<b>44.000.000,00</b>

<b>Pasivo</b>	<b>Balance Económico QIS4</b>
Capital social	7.000.000,00
Diferencias de valoración	966.471,10
Pasivos subordinados	
Otros pasivos financieros	
Provisiones Técnicas (BE)	30.636.565,57
Provisiones Técnicas – Margen de riesgo (neto de reaseguro)	3.982.761,39
Depósitos de los reaseguradores	
Impuestos diferidos	414.201,90
Provisión para riesgos y gastos	
Otros pasivos	1.000.000,00
<b>Total</b>	<b>44.000.000,00</b>

A continuación se muestran los datos aseguradores de nuestra hipotética compañía<sup>27</sup>:

Los datos sobre primas brutas y netas en el año t y las previstas para el próximo año empleados son:

Ramo	Primas Devengadas t (Brutas y Netas)	Primas Imputadas t (Brutas y Netas)	Primas Devengadas t+1 (Brutas y Netas)	Primas imputadas t+1 (Brutas y Netas)
Auto RC	11.000.000	11.000.000	11.000.000	11.000.000

Los datos sobre las ratios de siniestralidad históricos de la compañía:

Ratios	N	N-1	N-2	N-3	N-4	N-5	N-6	N-7	N-8	N-9
Auto RC	85,0%	91,0%	87,5%	84,5%	86,0%	85,0%	92,0%	94,0%	95,0%	96,0%

Las primas imputadas netas históricas empleadas son las siguientes (datos en millones):

Primas	N	N-1	N-2	N-3	N-4	N-5	N-6	N-7	N-8	N-9
Auto RC	11	10,9	10,5	10,1	9,7	9,3	8,9	8,5	8,1	7,7

A partir de los datos anteriores, y dado que la compañía sólo opera en un área geográfica, podemos calcular el riesgo asegurador bajo el modelo estándar QIS4. Para emplear el modelo DFA hemos empleado los datos de la ratio combinada que se muestran a continuación:

Ratios	N	N-1	N-2	N-3	N-4	N-5	N-6	N-7	N-8	N-9
Auto RC	97%	103%	97,5%	95,5%	95,0%	95,0%	101,0%	104,5%	105,2%	104,0%

Hemos empleado como hipotéticos datos sobre pagos acumulados por prestaciones el triángulo de Mack (1993).

Para el riesgo catastrófico asumimos que la compañía tienen un 35% de la cuota de mercado de la región A y que la frecuencia y severidad de los eventos se distribuyen como:

Región geográfica	Frecuencia: Poisson		Severidad: Lognormal	
	lambda	mu	sigma	
A	0,5000	11	2	

<sup>27</sup> Dichos datos deben ser introducidos en la Hoja: Datos riesgo asegurador.

A continuación se muestran los datos de mercado de nuestra hipotética compañía<sup>28</sup>.

El valor de mercado de la renta fija (partida de Balance Inversiones – Valores de renta fija) se descompone en: soberana<sup>29</sup> 11.000.000 u.m., AAA 5.000.000 u.m., AA 3.000.000 u.m. y A 2.000.000 u.m. Los datos sobre los flujos de activo clasificados por rating<sup>30</sup> en: y otros pasivos<sup>31</sup> previstos para los próximos años son los siguientes:

Plazo	Activo				Pasivo
	RF Soberana	RF AAA	RF AA	RF A	Otros
1	4.250.000	1.625.000	975.000	250.000	100.000
2	2.000.000	1.000.000	600.000	250.000	100.000
3	2.000.000	1.000.000	600.000	250.000	100.000
4	1.000.000	500.000	300.000	250.000	100.000
5	1.000.000	450.000	270.000	250.000	100.000
6	700.000	350.000	210.000	250.000	100.000
7	500.000	250.000	150.000	250.000	100.000
8	400.000	200.000	120.000	250.000	100.000
9	230.000	115.000	100.000	250.000	100.000
10	180.000	100.000	100.000	250.000	100.000
11	125.000	100.000	100.000	250.000	100.000
12	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000
13	100.000	100.000	60.000	60.000	100.000
14	100.000	90.000	54.000	60.000	100.000
15	50.000	90.000	30.000	60.000	100.000
16	50.000	50.000	30.000		100.000
17	50.000				100.000
18	50.000				100.000

Para el cálculo del riesgo de concentración debemos disponer de datos sobre el valor de mercado de activos derivados de la exposición en renta fija y renta varia-

<sup>28</sup> Dichos datos deben ser introducidos en la Hoja: Datos riesgo mercado.

<sup>29</sup> Bonos emitidos por el Gobierno de España.

<sup>30</sup> A partir de dichos valores se puede calcular la TIR de cada categoría.

<sup>31</sup> Los datos sobre los flujos de las provisiones por prestaciones son calculados automáticamente.

ble, y sus correspondientes emisores. Dado que la partida de Balance Inversiones-Acciones hace referencia a un Fondo de inversión que replica el IBEX-35, el total de activos expuestos (10.000.000 u.m) corresponde a la renta fija corporativa. El desglose de dicha cuantía es el siguiente:

Emisor	Rating	Total exposición
1	AAA	1.000.000,00
2	AAA	1.000.000,00
3	AAA	1.000.000,00
4	AAA	1.000.000,00
5	AAA	1.000.000,00
6	AA	1.000.000,00
7	AA	1.000.000,00
8	AA	1.000.000,00
9	BBB	1.000.000,00
10	BBB	1.000.000,00

Finalmente debemos citar que la compañía tiene parte de su activo (5.000.000 u.m.) expuesto al riesgo de tipo de cambio frente al dólar, quedando por tanto expuesta a una depreciación del dólar.

Para calcular el riesgo operativo los siguientes datos.

Para calcular el riesgo operativo deben establecerse los parámetros de las distribuciones de frecuencia y severidad de los eventos normales y graves. Los eventos normales de nuestra compañía vienen ajustados por los siguientes valores.

Frecuencia: Poisson	Severidad: Lognormal	
lambda	mu	sigma
5	8	2

Para los eventos graves empleamos los siguientes datos.

Frecuencia: Poisson	Severidad: Pareto	
lambda	alfa	beta
0,2	10	250.000

## 7.2. Resultados obtenidos

Una vez establecido el Balance de nuestra compañía, los datos técnicos, los datos de mercado y los datos del riesgo operativo<sup>32</sup> podemos realizar el cálculo de las distintas cargas de capital. A partir de los datos técnicos de partida, se determina la carga de capital de primas y reservas resultante.

$\sigma$ Primas	$\sigma$ Reservas	$\sigma_{lob}$	$V_{lob}$	$V_{lob} \cdot \sigma_{lob}$	$\rho(\sigma)$ Lob	Carga capital
5,89%	12,00%	8,76%	30.186.626	2.643.050	24,81%	7.490.242

Al riesgo de primas y reservas debe añadirse el riesgo catastrófico para obtener la carga de capital por riesgo asegurador. Dicho cálculo se muestra a continuación.

Línea de negocio	$P^{t,suscritas}$	Factor	Componente	Resultado
Automóviles RC	11.000.000	15,0%	1.650.000,00	1.650.000

En la siguiente tabla se muestra el resultado del capital necesario por riesgo asegurador de nuestra compañía en el modelo estándar de QIS4, desglosado en las distintas cargas intermedias. De dicho cuadro se desprende que el beneficio por diversificación entre el riesgo de primas y el riesgo de reservas es de 934.358 u.m., y entre el riesgo de primas y reservas y el riesgo catastrófico de 1.470.416 u.m. De esta forma, el beneficio por diversificación total, recuérdese que no existe diversificación geográfica, asciende a 2.404.774 u.m., cantidad que supone un 31,35% de la carga de capital resultante.

Concepto	Importe
Riesgo de prima	1.870.543
Riesgo de reserva	6.554.056
Riesgo de prima y reserva	7.490.242
Riesgo catastrófico	1.650.000
Riesgo asegurador no vida	7.669.825

En el modelo DFA la carga de capital por riesgo de primas se determina analíticamente<sup>33</sup> a partir de los datos de la ratio combinada, ascendiendo para nuestra

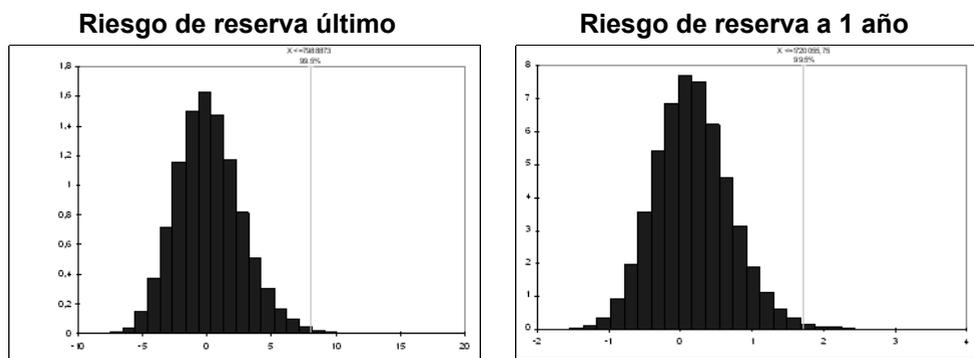
<sup>32</sup> Además de la calibración de los modelos. Sin embargo el modelo DFA-USC v.1 viene con los parámetros prefijados. Dichos valores han sido obtenidos a las series temporales empleadas, sin embargo, se permite que el usuario emplee otros valores.

<sup>33</sup> Se calcula fácilmente como la inversa de la función de distribución lognormal menos uno, multiplicado por el volumen de Primas imputadas esperadas para el próximo periodo.

compañía a un valor de 1.255.365 u.m. El riesgo de reserva se calcula mediante simulación de Monte Carlo<sup>34</sup>, tanto para el horizonte de un año como hasta la liquidación de los pasivos. De esta forma, para nuestra compañía la carga de capital al plazo de un año asciende a 1.720.056 u.m., dicha carga es aproximadamente un 78% inferior de la que resultaría de emplear un horizonte *run-off* (7.988.873 u.m.). La diferencia entre ambas cargas proviene de que la siniestralidad pagada durante el primer año de desarrollo es reducida (véanse los porcentajes de pago esperado en la siguiente tabla), por lo que los desarrollos adversos en la provisión para prestaciones a un año son de baja cuantía.

Año de desarrollo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Factor seleccionado	3,4906	1,7473	1,4574	1,1739	1,1038	1,0863	1,0539	1,0766	1,0177	1,0478
Pago esperado acumulado %	6,61%	23,06%	40,29%	58,72%	68,93%	76,09%	82,65%	87,11%	93,77%	6,61%

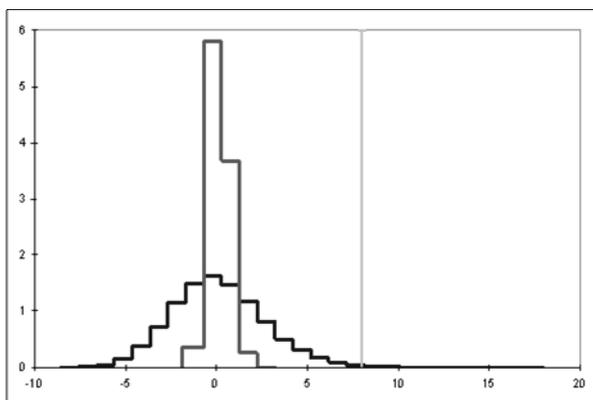
A continuación se representa el histograma del riesgo de reserva a 1 año (derecha) y al plazo de liquidación de los pasivos (izquierda)<sup>35</sup>.



La reducción del riesgo a un año respecto al riesgo de reservas hasta el vencimiento se aprecia mejor en la superposición de los dos histogramas.

<sup>34</sup> Para todos los riesgos calculados en el modelo DFA se realiza un muestreo de tipo Latino Hipercúbico, realizándose 100.000 iteraciones.

<sup>35</sup> La escala horizontal es en millones de u.m.



En la siguiente tabla se muestra los estadísticos del riesgo de reserva hasta el vencimiento de los pasivos y del riesgo de reserva a un año.

Riesgo de reservas	Riesgo último	Riesgo a 1 año
Mínimo	-8.530.002	-1.926.775
Media	170.787	170.787
Máximo	17.947.090	3.202.620
Desviación Estándar	2.561.027	529.368
Percentil 90%	3.483.130	853.666
Percentil 95%	4.638.900	1.083.740
Percentil 99,5%	7.988.873	1.720.056
Percentil 99,9%	9.982.530	2.129.030

Finalmente, la carga de capital por riesgo catastrófico asciende a 3.779.217 u.m. A continuación se muestra el resultado del capital necesario por riesgo asegurador de nuestra compañía en el modelo DFA, desglosado en las distintas cargas intermedias.

Concepto	Importe	Variación (respecto QIS4)
Riesgo de prima	1.255.365	-33%
Riesgo de reserva	1.720.056	-74%
Riesgo de prima y reserva	2.587.244	-65%
Riesgo catastrófico	3.779.217	129%
Riesgo asegurador no vida	4.579.990	-40%

De los resultados alcanzados se desprende que el beneficio por diversificación entre el riesgo de primas y el riesgo de reservas es de 388.177 u.m., y entre el riesgo primas y reservas y el riesgo catastrófico de 1.786.471 u.m. De esta forma, el beneficio por diversificación total supone 2.174.647 u.m., cantidad que representa un 32% de la carga de capital resultante. En la tabla inferior también se realiza una comparación de la carga resultante de aplicar el DFA frente al modelo estándar QIS4. Así, podemos afirmar que riesgo de primas en DFA es un 33% inferior al calculado mediante el modelo estándar. La diferencia proviene fundamentalmente de la ponderación de la volatilidad de la empresa con la desviación estándar de mercado<sup>36</sup>. El riesgo de reservas a un año calculado mediante el modelo DFA es un 74% inferior al del modelo QIS4. Sin embargo, si empleáramos el riesgo hasta el vencimiento el resultado sería opuesto, ya que en dicho caso el riesgo resultaría un 22% superior. El riesgo catastrófico hipotético de nuestra compañía bajo el modelo DFA, es un 129% superior a la cantidad obtenida aplicando la fórmula estándar. Fruto de las anteriores diferencias la carga de capital necesario para soportar el riesgo asegurador no vida bajo el modelo DFA es 3.089.835 u.m. inferior que la correspondiente a la fórmula estándar, lo que equivale en términos porcentuales a un 40% menos de capital.

A partir de los valores del Balance económico y de los datos de mercado, se determina la carga de capital derivada del riesgo de tipos interés (MKTint)<sup>37</sup>, del riesgo de renta variable (MKTeq), del riesgo de inmuebles (MKTprop), del riesgo de *spread* (MKTsp), del riesgo de concentración (MKTconc) y del riesgo de tipo de cambio (MKTfx) resultante de aplicar el modelo QIS4 y el modelo DFA. Al mismo tiempo, también se muestra la carga de capital de mercado (SCRmkt) que resulta de la agregación de los valores anteriores, bien mediante la matriz de correlación estipulada (QIS4), bien mediante la correlación de los modelos individuales (DFA)<sup>38</sup>. En general se observa como las cargas de capital del modelo DFA superan las obtenidas mediante el modelo estándar.

Modelo	MKTint.	MKTeq	MKTprop	MKTsp	MKTconc	MKTfx	SCRmkt
QIS4	214.132	3.200.000	2.200.000	162.400	-	1.000.000	5.525.165
DFA	65.314	4.074.919	2.502.278	700.847	-	1.742.138	6.288.090

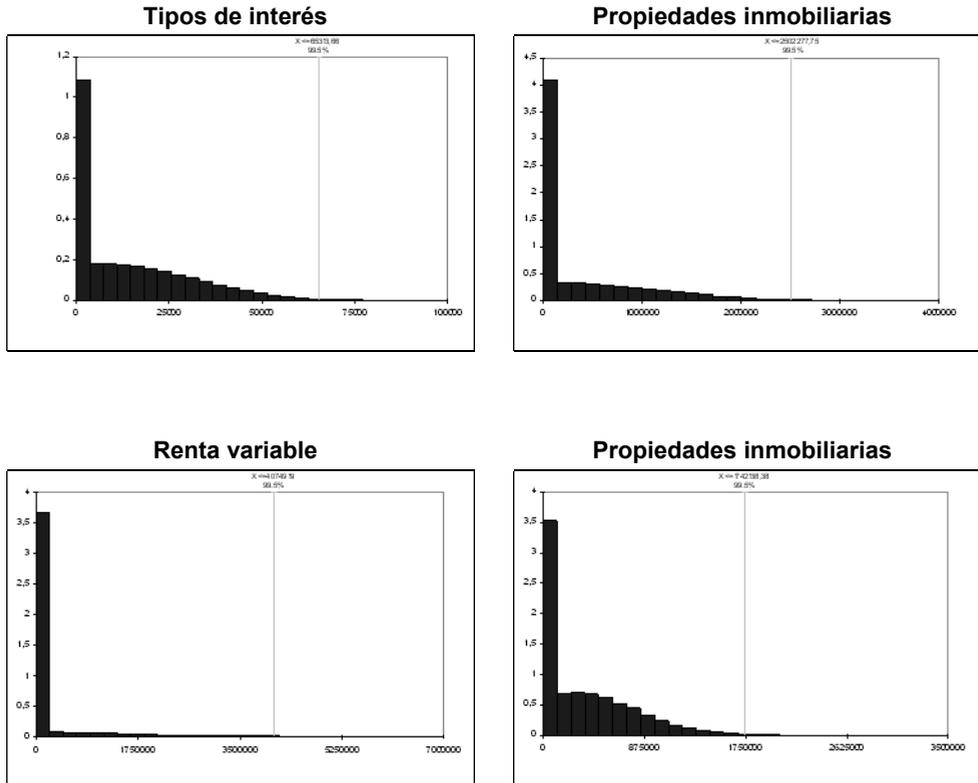
En el modelo DFA dichas cargas son obtenidas por simulación de Monte Carlo al horizonte de un año. En los siguientes gráficos se representa el histograma de las

<sup>36</sup> El factor de credibilidad para ese ramo y número de años es del 71%. La volatilidad de mercado para el riesgo de primas de ese ramo es del 9% frente a la volatilidad de 3,97% del *loss ratio*. Por la contra la volatilidad de la ratio combinada es del 4,38%.

<sup>37</sup> Debe mencionarse que el modelo de tipos empleado calibrado a los datos de partida es incapaz de reproducir valores de las curvas tan extremos como las que estresa QIS4.

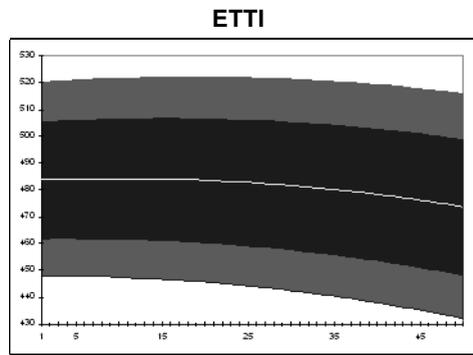
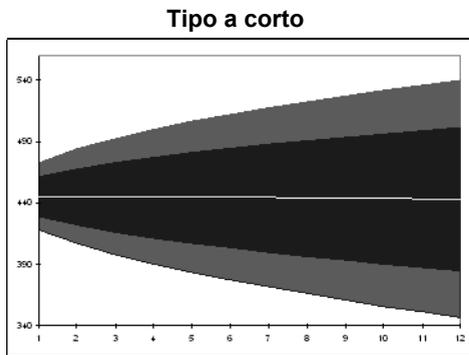
<sup>38</sup> Para la obtención del riesgo de spreads cuando existan diversas categorías de rating y para el riesgo de mercado debe realizarse la simulación con los factores de riesgo correlacionados. Véase la Hoja Datos correlaciones.

cargas asociadas a tipos de interés, inmuebles, renta variable y tipos de cambio computándose a un VaR 99,5%.

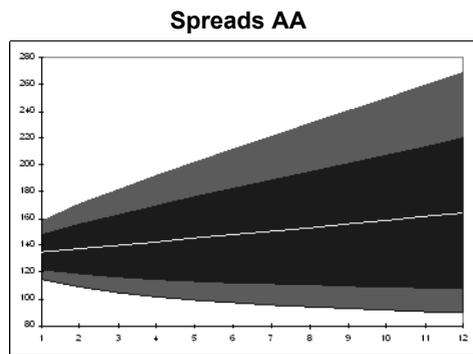
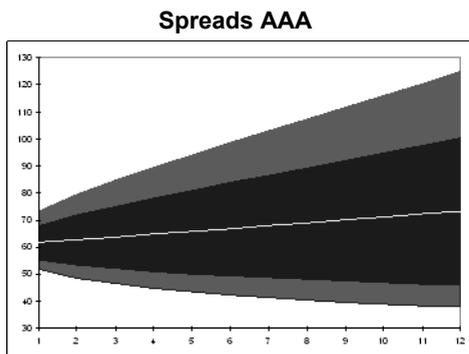


Dichas cargas son obtenidas gracias al generador económico de escenarios implantado en el modelo DFA-USC v.1. A continuación se muestran distintos gráficos obtenidos mediante dicho modelo, que resumen la evolución de los principales factores de riesgo simulados. En el gráfico inferior se muestra la evolución temporal<sup>39</sup> del tipo a corto plazo (izquierda) para los 12 meses simulados y la estructura temporal de tipos de interés (ETTI) dentro de 1 año (derecha) para los próximos 50 años en puntos básicos (p.b.). Se aprecia una tendencia de la curva a plazo a tener pendiente negativa, lo que indica una expectativa futura de caídas de los tipos de interés al contado.

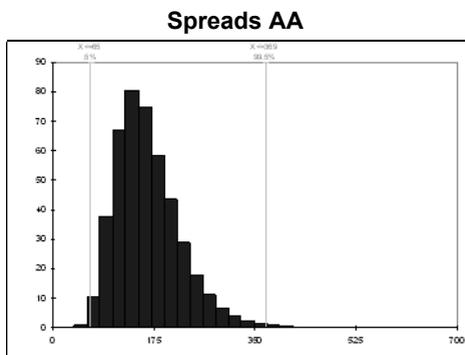
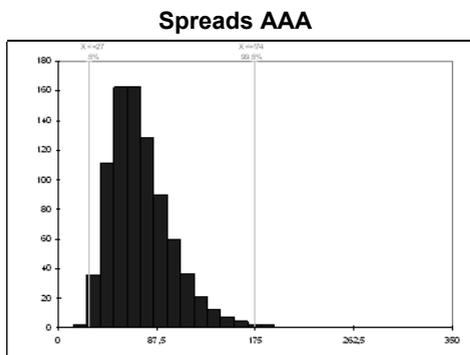
<sup>39</sup> La línea central representa el valor medio. También se muestra los valores obtenidos de sumar y restar 1 desviaciones estándar y los valores de los percentiles 5% y 95%.



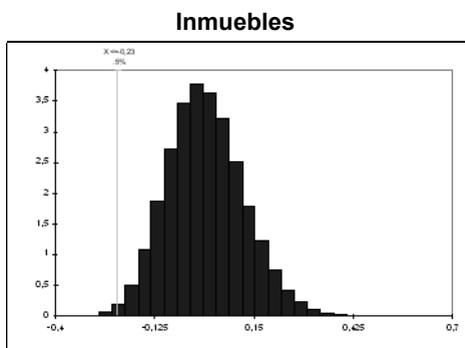
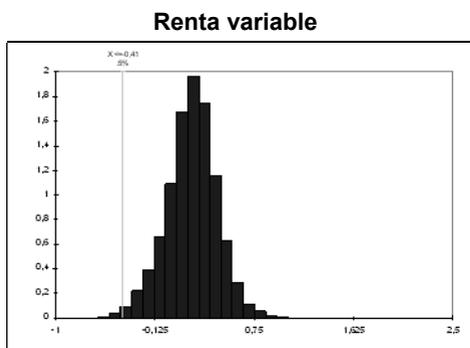
A continuación se muestra la evolución temporal de los diferenciales de crédito de rating AAA (izquierda) y rating AA (derecha) en puntos básicos (p.b.). Dado que empleamos una distribución multivariante para los rendimientos con valores de la media positivos para todas las categorías de *rating*, se observa una tendencia media creciente en los diferenciales a lo largo del horizonte temporal analizado.



A continuación se muestra el histograma de los niveles de *spreads* de crédito de rating AAA (izquierda) y rating AA (derecha) simulados al plazo de un año (p.b.). Los niveles de *spreads* simulados para la categoría AAA se encuentran con un 99% de probabilidad entre el nivel de 27 p.b. (valor al 0,5% de probabilidad) y 174 p.b. (valor al 99,5% de probabilidad), con un valor esperado de 73 p.b. Por la contra los niveles de *spreads* simulados para la categoría AA se encuentran con un 99% de probabilidad entre el nivel de 65 p.b. (valor al 0,5% de probabilidad) y 369 p.b. (valor al 99,5% de probabilidad), con un valor esperado de 164 p.b.



En los gráficos inferiores se muestra el histograma de los rendimientos acumulados para la renta variable (izquierda) y los inmuebles (derecha). Se aprecia como el VaR 99,5% para la renta variable resulta de aplicar una carga del 40,75% y para los inmuebles del 22,75%.



Dado que la compañía no tiene riesgo de contraparte (al no hacer uso del reaseguro, derivados, intermediarios u otras exposiciones) podemos realizar la agregación del riesgo de mercado y asegurador no vida, obteniendo así la cifra de BSCR bajo el modelo QIS4 y DFA. Se aprecia que la cifra de capital BSCR en el modelo DFA es un 18% inferior a la resultante de aplicar el modelo estándar.

	QIS4	DFA	Variación (respecto QIS4)
Riesgo de Mercado	5.525.165	6.288.090	14%
Riesgo de Contraparte	-	-	-
Riesgo asegurador	7.669.825	4.579.990	-40%
BSCR	10.513.905	8.655.407	-18%

Para calcular el requerimiento del capital de solvencia (SCR) bajo los modelos QIS4 y DFA debemos simular la carga por riesgo operativo (SCRop) resultante de aplicar el modelo DFA<sup>40</sup>, que asciende a 500.002 u.m. Como se observa el SCR obtenido mediante el modelo DFA es un 18% inferior al obtenido mediante el modelo QIS4.

	<b>QIS4</b>	<b>DFA</b>	<b>Variación (respecto QIS4)</b>
BSCR	10.513.905	8.655.407	-18%
SCRop	612.731	500.002	-18%
Adj	414.202	414.202	
SCR	10.712.434	8.741.208	-18%

La tabla inferior muestra el excedente, bajo el modelo DFA y QIS4, calculado como la diferencia entre los Fondos propios totales y el requisito de capital SCR. Se aprecia como el excedente es negativo bajo ambos modelos, pero más acusado para el modelo QIS4.

	<b>QIS4</b>	<b>DFA</b>
Requisito de capital SCR	10.712.434	8.741.208
Fondos propios totales	7.966.471	7.966.471
Excedente (Surplus)	-2.745.963	-774.736

Finalmente, se muestra los valores del requisito mínimo de capital calculado mediante el modelo DFA y QIS4, así como la ratio de cobertura del SCR (Fondos propios totales/SCR) y la ratio de cobertura del MCR (Fondos propios totales/MCR). Destaca el hecho de que bajo ambos modelos, el capital mínimo viene marcado por su límite inferior (20% del capital de solvencia).

	<b>QIS4</b>	<b>DFA</b>
SCR	10.712.434	8.741.208
Ratio de cobertura del SCR	74%	91%
MCR	2.142.487	1.748.242
Ratio de cobertura del MCR	372%	456%
MCR Combinado	2.142.487	1.748.242
MCR <i>Cap</i>	5.356.217	4.370.604
MCR <i>Floor</i>	2.142.487	1.748.242

<sup>40</sup> Dicha carga es obtenida por simulación empleando el límite máximo fijado que equivale a un 30% de la cifra de BSCR del modelo DFA.

### 7.3. Conclusiones

Empleando el modelo estándar QIS4 nuestra compañía de Solvencia II tiene unos fondos propios insuficientes para afrontar los riesgos a los que se enfrenta. De esta forma, la ratio de cobertura del SCR se encuentra en valores inferiores a la unidad (74%), lo que implica que el excedente de la compañía es negativo (-2.745.963 u.m.). Por tanto, los Fondos propios totales (7.966.471 u.m.) no son suficientes para hacer frente al requerimiento del capital de solvencia o SCR (10.712.434 u.m.). Esto supone que la compañía se sitúa en una zona de intervención, de forma que la situación actual debe ser rectificada. Sin embargo, la compañía cuenta con unos fondos propios suficientes para el requerimiento del capital mínimo o MCR (2.142.487 u.m.), por lo que la ratio de cobertura del MCR es claramente superior a la unidad (372%). Dado que los efectos del capital requerido por riesgo operativo y los ajustes derivados del Balance casi compensan sus efectos, el requisito del capital de solvencia (SCR) es similar al SCR básico (10.513.905 u.m.). Dentro del BSCR, debe resaltarse que la carga por capital por riesgo asegurador (7.669.825 u.m.) es superior a la carga por riesgo de mercado (5.525.165 u.m.).

En caso de emplear el modelo DFA-USC v.1, y al igual que bajo el modelo estándar QIS4, nuestra compañía tiene unos fondos propios no suficientes. La ratio de cobertura del SCR se encuentra por debajo de la unidad (91%), lo que implica que la situación de solvencia de la compañía mejora respecto al modelo estándar pero que todavía el excedente de la compañía es negativo (-774.736 u.m.). Los Fondos propios totales (7.966.471 u.m.) no son suficientes para hacer frente al requerimiento del capital de solvencia o SCR (8.741.208 u.m.), situándose nuevamente la compañía en una zona de intervención. Por otro lado, la compañía cuenta con unos fondos propios suficientes para hacer frente al requerimiento del capital mínimo o MCR (1.748.242 u.m.), ya que la ratio de cobertura del MCR es superior a la unidad (456%). Dado que de nuevo los efectos del capital requerido por riesgo operativo y los ajustes derivados del Balance casi compensan sus efectos, el requisito del capital de solvencia (SCR) es similar al SCR básico (8.655.407 u.m.). Dentro de esta última partida (BSCR) la carga por capital por riesgo asegurador (4.579.990 u.m.) es inferior a la carga por riesgo de mercado (6.288.090 u.m.).

A lo largo de este apartado del trabajo hemos comparado, para una hipotética compañía aseguradora no vida española, las cargas de capital resultantes de aplicar el modelo estándar QIS4 con el modelo DFA-USC v.1. Hemos visto que cada modelo produce distintas cargas de capital para cada módulo, si bien en conjunto el modelo DFA proporciona unos menores requisitos de capital. Este es uno de los múltiples usos de un modelo DFA y esperamos, que pese a la relativa sencillez del modelo elaborado y a las simplificaciones efectuadas, se aprecien las potencialidades y virtudes de esta nueva técnica. Sin embargo, el desarrollo y empleo de un modelo DFA no está exento de dificultades. Dejando a un lado los necesarios recursos necesarios (tiempo, personal cualificado, datos, etc.), debe recordarse que cualquier modelo DFA presenta los típicos inconvenientes de emplear un modelo interno, entre los que destacamos: cierto grado de subjetividad en la elección entre

distintos modelos, dificultad de análisis de la calidad/credibilidad de la información y dificultad de validar los resultados obtenidos por el modelo. Nosotros creemos que las ventajas de la técnica superan sus contras, por lo que es de esperar un rápido desarrollo de esta disciplina y de sus ámbitos de aplicación. Por eso pronosticamos que DFA se convertirá en un futuro no lejano en una de las herramientas de gestión indispensables de las aseguradoras.

## BIBLIOGRAFÍA

- ACERBI, C. AND TASCHE, D. (2002): "Expected Shortfall: a Natural Coherent Alternative to Value at Risk". *Economic Notes*, 31(2): 379-388.
- AHLGRIM, K.C. (1999): "Investigating the Use of Value at Risk in Insurance", Working Paper. Disponible en <http://www.gloriamundi.org/picsresources/hlgrim.pdf> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- AHLGRIM, K.C. (2000): "Multifactor Interest Rate Models and Dynamic Financial Analysis", Working Paper. Disponible en <http://www.business.uiuc.edu/ahlgrim/ARIA2000/intdfa.pdf> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- AHLGRIM, K.C. (2001): *The Effects of Multifactor Term Structure Models on the Valuation of Insurance*. Tesis Doctoral, University of Illinois.
- AHLGRIM, K.C., D'ARCY, S.P. and GORVETT, R.W. (1999): "Parameterizing Interest Rate Models". *CAS Forum*, Summer: 1-50.
- AHLGRIM, K.C., D'ARCY, S.P. and GORVETT, R.W. (2004a): "Asset-liability modeling for insurers: Incorporating a regime-switching process for equity returns into a Dynamic Financial Analysis model", Presentado a Astin Colloquium 2004, Bruselas (Bélgica).
- AHLGRIM, K.C., D'ARCY, S.P. and GORVETT, R.W. (2004b): "Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios". Proyecto de investigación. Disponible en <http://casact.org/research/econ/> [consultado el 1 de Febrero de 2009]
- AHLGRIM, K.C., D'ARCY, S.P. and GORVETT, R.W. (2004c): "A Comparison of Actuarial Financial Scenario Generators". Presentado a AFIR Colloquium 2004, Boston (Estados Unidos).
- AHLGRIM, K.C., D'ARCY, S.P. and GORVETT, R.W. (2005): "Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 92(177): 177-238.
- AHLGRIM, K. C., D'ARCY, S.P. and GORVETT, R.W. (2008): "A Comparison of Actuarial Financial Scenario Generators". *Variance*, 2(1): 111-134.
- AHN, C.M. and THOMPSON, H.E. (1988): "Jump-Diffusion Processes and Term Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, 43(1): 155-174.

- AISAM-ACME (2007): *AISAM-ACME study on non-life long tail liabilities*.  
 Disponible en [http://www.aisam.org/upload/documents/AISAM-ACME\\_Study\\_non-life\\_long\\_tail\\_2007-10-17.pdf](http://www.aisam.org/upload/documents/AISAM-ACME_Study_non-life_long_tail_2007-10-17.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- AÏT-SAHALIA, Y. (1996): "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate". *Review of Financial Studies*, 9(2): 385-426.
- ALMAGRO, M., and SONLIN, S.M. (1995): "An Approach to Evaluating Asset Allocation Strategies for Property/Casualty Insurance Companies", *CAS Discussion Paper Program*: 55-80.
- ALONSO, P. and ALBARRÁN, I. (2007): *Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping*. Cuadernos de la Fundación Mapfre, 119, Madrid.
- ANDERSON, S.C. (1998): "The Balancing of Ratemaking Assumptions and Annual Financial Planning Asswizptions". *CAS Forum*, Winter, pp 1-21.
- ANG, A. and CHEN, J. (2002): "Aymmetric Correlations of Equity Portfolios". *Journal of Financial Economics*, 63(3): 443-494.
- APPEL, D., MULVANEY, M.W. and WITCRAFT, S.E. (1997): "Dynamic Financial Analysis of a Workers' Compensation Insurer". *CAS Forum*, Summer: 89-114.
- AKAIKE, H. (1973): "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle", en N. Petrov and F. Csake (eds.) *The Second International Symposium on Information Theory*, Hungría: Akademiai Kiado, 267-281.
- ARAK, M. and CORCORAN, P.J. (1996): "Yields on privately placed debt: examining the behavior". *Journal of Portfolio Management*, 22(3): 88-96.
- ARAQUE, J. C. (2008): "Solvencia 2. Presentación de los resultados del Quantitative Impact Study (QIS) 4 en España". *Jornada sobre los resultados del QIS4 en España*, Madrid.  
 Disponible en: [http://www.dgsfp.meh.es/sector/Sol2\\_Qis4/Ponencias/Ponencias201108/presentacion%20rdos%20cuantitativos%20qis4%2020-11-08.pdf](http://www.dgsfp.meh.es/sector/Sol2_Qis4/Ponencias/Ponencias201108/presentacion%20rdos%20cuantitativos%20qis4%2020-11-08.pdf) [consultado el 2 de Junio de 2009].
- ARTZNER, P. (1999): "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance". *North American Actuarial Journal*, 3(2): 11-25.
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.M. and HEATH, D. (1999): "Coherent Measures of Risk". *Mathematical Finance*, 9(3): 203-228.
- BABCOCK, N. and ISAAC, D.B. (2001): "Beyond the Frontier: Using a DFA Model to Derive the Cost of Capital". Presentado a Astin Colloquium 2001, Washington (Estados Unidos).
- BACHELIER, L. (1900): "Theorie de la Speculation". *Annales de l'Ecole Normal Superieure*, 17: 21-86.
- BALL, C.A. and TOROUS, W.N. (1983): "A simplified jump process for common stock returns". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1): 53-65.

- BARCELÓ, J. (1996): *Simulación de sistemas discretos*. Isdefe, Madrid.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. (1977): "Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size". *Proceedings of the Royal Society of London*, 353: 401-419.
- BARNETT, J., KREPS, R. E., MAJOR, J. A. y. VENTER, G. G. (2007) "Multivariate Copulas for Financial Modeling". *Variance*, 1(1): 103-119.
- BARTH, M.M. (2000): "A Comparison of Risk-Based Capital Standards Under the Expected Policyholder Deficit and the Probability of Ruin Approaches". *Journal of Risk and Insurance*, 67(3): 397-414.
- BEIRLANT, J., GOEGBEUR, Y., SEGERS, J. and TEUGELS, J. (2004): *Statistics of Extremes Theory and Applications*. Chichester: Wiley.
- BEIRLANT, J., TEUGELS, J.L. and VYNCKIER, P. (1996): *Practical Analysis of Extreme Values*. Leuven: Leuven University Press.
- BELGUISE, O. and LEVI, C. (2002): "Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Automobile et Incendie à l'aide de la théorie des copulas", *Bulletin Français d'Actuariat*, 5: 135-174.
- BERGBAUER, A., CHAVEZ, V., FISCHER, T., PERERA, R., ROEHL, A. and SCHMIEDL, S. (2004): "Back to the future: Dynamic Financial Analysis (DFA) for decision making", *Working Paper*.  
Disponible en [http://www.approximity.com/papers/dfa\\_wp4\\_en.pdf](http://www.approximity.com/papers/dfa_wp4_en.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- BERGER, A.J. and MADSEN, C.K (1999): "Comprehensive System for Selecting and Evaluating DFA Model Parameters", *CAS Forum*, Summer: 51-68.
- BERGSTROM, A.R. (1984): "Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time", en Z. Griliches and M.D. Intriligator (eds.) *Handbook of Econometrics*, II, Elsevier Science, Amsterdam.
- BERLIET, J.P. and LOWE, S. (1999): "Managing the Volatility Link: Better financial modeling may hold the key to better management of insurance risk". *Best's review life health insurance edition*, 99(10): 63-66.
- BERQUIST, J. R. and SHERMAN, R. E. (1977): "Loss Reserve Adequacy Testing: A Comprehensive, Systematic Approach". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 64: 123-184.
- BERMÚDEZ, L. (2009): "Métodos estocásticos para el cálculo de la Provisión Técnica de Prestaciones Pendientes en Solvencia II". *Cuadernos Actuariales*, 13: 1-15.
- BERNALDO DE QUIRÓS, J. (2002): "Solvencia II: Un reto común para las aseguradoras and los Supervisores", Conferencia impartida en ICEA, Mayo de 2002.  
Disponible en <http://intranet.icea.es>
- BERNALDO DE QUIRÓS, J. (2003): "Visión global del proyecto Solvencia II". Conferencia impartida en ICEA, Junio de 2003.  
Disponible en <http://intranet.icea.es/>

- BIERENS, H., HUANG, J. and KONG, W. (2005): "Time-Series Estimation of Aggregate Corporate Bond Credit Spreads". Presentado a International Conference in Finance, Kunming (China).  
Disponible en <http://www.ccf.org.cn/cicf2005/paper/20050126063455.PDF> [consultado 1 de marzo de 2009].
- BLACK, F., DERMAND, E. and TOY, W. (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options". *Financial Analysts Journal*, 46(1): 33-39.
- BLACK, F. and KARASINSKI, P. (1991): "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal". *Financial Analysts Journal*, 47(4): 52-59.
- BLACK, F. and COX, J. (1976): "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions". *Journal of Finance*, 31(2): 351-367.
- BLACK, F. and SCHOLES, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.
- BLATTBERG, R.C. and GONEDES, N.J. (1974): "A Comparison of the Stable and Student Distribution as Statistical Models for Stock Prices". *Journal of Business*, 47(2): 244-280.
- BLUM, L., BLUM, M. and SHUB, M. (1986): "A Simple Unpredictable Pseudo-Random Number Generator", *SIAM Journal on Computing*, 15(2): 364-383.
- BLUM, P. (2005): *On some mathematical aspects of Dynamic Financial Analysis*. Tesis Doctoral, University of Zurich.
- BLUM, P. and DACOROGNA, M. (2004): "Dynamic Financial Analysis, Understanding Risk and Value Creation in Insurance", en Teugels, J. and Sundt, B. (eds.): *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons, 1: 505-519.
- BLUM, P., DACOROGNA, M., EMBRECHTS, P., NEGHAWI, T. and NIGGLI, H. (2001): "Using DFA for Modelling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions". *CAS Forum*, Summer: 49-93.
- BOHRA, R. (2003): "Reinsurance Presentation Example". CAS Research Working Party: Executive Level Decision Making using DFA.
- BOHRA, R. and WEIST, T. (2001): "Preliminary Due Diligence of DFA Insurance Company". *CAS Forum*, Spring: 25-58.
- BOLLERSLEV, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31(3): 307-327.
- BOLLERSLEV, T. (1990): "Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model". *Review of Economics and Statistics*, 72(3): 498-505.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F. y WOOLDRIDGE, J. (1988): "A capital asset pricing model with time-varying covariance". *Journal of Political Economy*, 96(1): 116-123.

- BORNHUEFTER, R. L., and FERGUSON, R. E. (1972): "The Actuary and IBNR". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 59: 181-195.
- BOUDREAU and PANNETON (2009): "Multivariate Models of Equity Returns for Investment Guarantees Valuation". *North American Actuarial Journal*, 13(1): 36-53.
- BOUYÉ, E., DURRLEMAN, V., NIKEGBALI, A., RIBOULET, G. and RONCALLI, T. (2000): "Copulas for finance-a reading guide and some applications", Working Paper.  
Disponible en <http://www.thierry-roncalli.com/download/copula-survey.pdf> [consultado 1 de marzo de 2009].
- BOYER, B., GIBSON, M. and LORETAN, M. (1999): "Pitfalls in tests for changes in correlations", Working Paper.  
Disponible en <http://www.federalreserve.gov/pubs/ifdp/1997/597/ifdp597.pdf> [consultado 1 de marzo de 2009].
- BRACE, A., GATAREK, D. and MUSIELA, M. (1997): "The market model of interest rate dynamics". *Mathematical Finance*, 7(2): 127-155.
- BRATLEY, P., FOX, B.L. and SCHRAGE, L.E. (1987): *A Guide to Simulation*. Nueva York: Springer-Verlag.
- BRENNAN, M.J. and SCHWARTZ, E.S. (1979): "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3(2): 133-155.
- BRENNAN, M.J. and SCHWARTZ, E.S. (1980): "Analyzing convertible bonds". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15(4): 907-929.
- BRENNAN, M.J. and SCHWARTZ, E.S. (1982): "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(3): 301-329.
- BREYMAN, W., DIAS, A. and EMBRECHTS, P. (2003): "Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance". *Quantitative Finance*, 3(1): 1-14.
- BRITT, S. and JOHNSTONE, D. (2001): "The ABC's of DFA". Presentado a The Institute of Actuaries of Australia, General Insurance Seminar.  
Disponible en [www.aon.com.au/pdf/reinsurance/GI\\_Seminar\\_XIII\\_DFA\\_Paper.pdf](http://www.aon.com.au/pdf/reinsurance/GI_Seminar_XIII_DFA_Paper.pdf) [consultado 1 de marzo de 2009].
- BROOKE, T. (2003): "Dynamic Financial Analysis: Making Use Of Your Simulations". Presentado a la Society of Actuaries of Ireland.  
Disponible en [http://web.actuaries.ie/Events%20and%20Papers/Events%202003/2003-04-02\\_DFA%20Modelling/2003-04-02\\_Tony\\_Brooke\\_Taylor.PDF](http://web.actuaries.ie/Events%20and%20Papers/Events%202003/2003-04-02_DFA%20Modelling/2003-04-02_Tony_Brooke_Taylor.PDF) [consultado 1 de marzo de 2009].
- BROWNE, M.J., CARSON, J.M. y HOYT, R.E. (2001): "Dynamic financial models of life insurers". *North American Actuarial Journal*, 5(2): 11-26.
- BULMER, J.R., BYRNE, P., GREEN, P. and RODRÍGUEZ, R. (1996): "Correlations between asset variables and liability variables". Presentado a General Insurance Convention, Stratford (Inglaterra).

- BURKETT, J.C., MCINTYRE, T.S. and SONLIN, S.M. (2001): "DFA Insurance Company Case Study, Part I: Reinsurance and Asset Allocation", *CAS Forum*, Summer: 59-98.
- BUTSIC, R.P. (1994): "Solvency Measurement for Property-Liability Risk-Based Capital Applications". *Journal of Risk and Insurance*, 4(61): 656-690.
- CAMPBELL, J. Y. and HENTSCHELL, L. (1992): "No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns". *Journal of Financial Economics*, 31(3): 281-318.
- CAMPBELL, J. Y., LO, A. W. and MACKINLAY, A.C. (1997): *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, Princeton.
- CARRILLO, S. and SUÁREZ, C. (2006): "Medición efectiva del riesgo operacional", *Estabilidad Financiera*, 11: 61-90.
- CARTER, J. (1991): "The derivation and application of an Australian stochastic investment model", *Transactions of the Institute of Actuaries of Australia*, 1: 315-428.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1995a): *Dynamic financial analysis handbook*, Dynamic Financial Analysis Committee.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1995b): *Dynamic Financial Models of Property/Casualty Insurers*, Dynamic Financial Analysis Committee.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1999a): *Overview of Dynamic Financial Analysis*, Dynamic Financial Analysis Committee.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1999b): *DFA Research Handbook*, Dynamic Financial Analysis Committee.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (2000): *Dynamic financial analysis research book*, Dynamic Financial Analysis Committee.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (2009): *DRM Research Handbook* (En revisión), Committee on Dynamic Risk Modeling.
- CEA (2006a): "Working document on the Standard Approach for calculating the Solvency Capital Requirement", *CEA Position Papers*.
- CEA (2006b): "Assessing the Impact of Solvency II on the Average Level of Capital", *CEA Position Papers*.
- CEA (2006c): "Working Paper on the MCR and Proposed Ladder of Intervention", *CEA Position Papers*.
- CEIOPS (2005a): "Answers to the European Commission on the 'first wave' of Calls for Advice in the framework of the Solvency II project", CEIOPS-DOC-03/05.
- CEIOPS (2005b): "Answers to the European Commission on the second wave of Calls for Advice in the framework of the Solvency II project", CEIOPS-DOC-07/05.

- CEIOPS (2006a): “Answers to the European Commission on the third wave of Calls for Advice in the framework of the Solvency II project”, CEIOPS-DOC-03/06.
- CEIOPS (2006b): “QIS1 – Summary report”, FS-01/06.
- CEIOPS (2006c): “QIS2 – Summary Report”, SEC-71/06S.
- CEIOPS (2006d): “Quantitative Impact Study 2 Technical Specification”, CE10PS-PI-08/06.
- CEIOPS (2007a): “QIS3 Technical Specifications PART I: INSTRUCTIONS”, CEIOPS-FS-11/07.
- CEIOPS (2007b): “QIS3 Technical Specifications Annexes”, CEIOPS- FS-13/07.
- CEIOPS (2007c): “QIS3 Calibration of the credit risk”, CEIOPS- FS-23/07.
- CEIOPS (2007d): “QIS3 Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR”, CEIOPS- FS-14/07.
- CEIOPS (2008a): “QIS4 Technical Specifications”, MARKT/2505/08.
- CEIOPS (2008b): “Errata to the QIS4 Technical Specifications”, MARKT/2505/08.
- CEIOPS (2008c): “QIS4 background document Guidance on the definition of the reference entity for the calculation of the Cost of Capital”, CEIOPS-DOC-09/2008.
- CEIOPS (2008c): “QIS4 background document Guidance on the definition of the reference entity for the calculation of the Cost of Capital”, CEIOPS-DOC-09/2008.
- CEIOPS (2008d): “QIS4 background document Calibration of SCR, MCR and proxies”, CEIOPS-DOC-02/2008.
- CEIOPS (2008e): “QIS4 Best Estimate Valuation Tool”.  
Disponible en <http://www.ceiops.org/content/view/118/124/> [consultado 1 de marzo de 2009].
- CEIOPS (2008f): “QIS4 Best Estimate Valuation Tool User’s Guide”.  
Disponible en <http://www.ceiops.org/content/view/118/124/> [consultado 1 de marzo de 2009].
- CHAN W.S., CHEUNG, S.H., ZHANG, L.X. and WU, K.H. (2008): “Temporal Aggregation of Equity Return Time-Series Models”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 78(2-3): 172-180.
- CHAN, W.S., ZHANG, L.X. and CHEUNG, S.H. (2009): “Temporal Aggregation of Markov Switching Financial Return Models”, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 25(3): 359-383.
- CHAN, K.C., KAROLYI, G.A., LONGSTAFF, F. and SANDERS, A. (1992): “An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate”, *Journal of Finance*, 47(3): 1209-1227.

- CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P. and NESLEHOVA, J. (2006): "Quantitative models for operational risk: extremes, dependence and aggregation". *Journal of Banking and Finance*, 30(10): 2635-2658.
- CHEN, L. (1996): *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*. Springer-Verlag, Berlin.
- CHERUBINI, U., LUCIANO, U. and VECCHIATO, W. (2004): *Copula Methods in Finance*, Wiley.
- CHRISTOFIDES, S., COWLEY, R.H.S., ILOENYOSI, C., LOWE, J.A., SMITH, A.D. and TOBEY, D. (1996): "GISMO-General Insurance Stochastic Model Office. Short term modelling for management decisions". Presentado a General Insurance Convention, Stratford (Inglaterra).
- CHRISTOFIDES, S., and SMITH, A.D. (2001): "DFA-The Value of Risk". *CAS Forum*, Spring: 153-193.
- CIA (1991): "Standard of Practice on Dynamic Solvency Testing for Life Insurance Companies".
- CIA (1999): "Dynamic Capital Adequacy Testing -Life and Property and Casualty", Educational Note.
- CLARKSON, R.S. (1991): "A non-linear stochastic model for inflation", Presentado a AFIR International Colloquium, Brighton (Inglaterra).
- COHEN, A., and SACKROWITZ, H.B. (1975): "Unbiasedness of the Chi-Square, Likelihood Ratio, and Other Goodness of Fit Tests for the Equal Cell Case". *Annals of Statistics*, 3(4): 959-964.
- COLES, S. (2001): *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Value*. Springer-Verlag, Londres.
- COLLINGS, S. (1999): "A Place for DFA Modeling in Capital Management", Presentado a The Institute of Actuaries of Australia, General Insurance Seminar.
- COMISIÓN EUROPEA (1999): "Revisión de la situación financiera global de una empresa de seguros-Ejercicio Solvencia 2", MARKT/2095/99.
- COMISIÓN EUROPEA (2002a): "Nota a la atención del Subcomité sobre Solvencia. Asunto: consideraciones sobre el diseño de un futuro sistema de supervisión prudencial". MARKT/2535/02.
- COMISIÓN EUROPEA (2002b): "Nota a la atención del Subcomité sobre Solvencia. Asunto: Modelos de riesgos de empresas o grupos de seguros". MARKT/2515/02.
- COMISIÓN EUROPEA (2003): "Asunto: Concepción de un futuro sistema de control cautelar en la UE-Recomendaciones de los servicios de la Comisión". MARKT/2509/03.
- COMISIÓN EUROPEA (2005): "Draft amended framework for consultation on Solvency II". MARKT/2505/05.

- COMISIÓN EUROPEA (2006): "Amended framework for consultation on Solvency II". MARKT/2515/06.
- COMISIÓN EUROPEA (2007): *Propuesta de Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*, COM(2007) 361 final.
- COMISIÓN EUROPEA (2008): *Propuesta modificada de Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*. COM(2008) 119 final.
- COMISIÓN EUROPEA and KPMG (2002): "Study into the methodologies to assessthe overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision". Disponible en: <http://intranet.icea.es/solvencia/Documentos/KPMG%20solv%20final%20report%20annexes-300402.pdf> [consultado el 1 de febrero de 2009].
- CONSTANTINIDES, G.M. (1992): "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates". *Review of Financial Studies*, 5(4): 531-552
- CORRENTI, S., SONLIN, S.M. and ISAAC, D.B. (1998): "Applying a DFA Model to Improve Strategic Business Decisions". *CAS Forum*, Summer: 15-51.
- COURTADON, G. (1982): "The pricing of options on default-free bonds". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(1): 75-100.
- COUTURE, R. and L'ECUYER, P. (1997): "Distribution properties of multiply-with-carry random number generators". *Mathematics of Computation*, 66(21): 591-607.
- COX, J., INGERSOLL, J. and ROSS, S. (1980): "An analysis of variable rate loan contracts". *Journal of Finance*, 35(2): 389-403.
- COX, J., INGERSOLL, J. and ROSS, S. (1985a): "An Intertemporal General equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53(2): 363-384.
- COX, J., INGERSOLL, J. and ROSS, S. (1985b): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, 53(2): 385-407.
- CROUHY, C.: GALAI, D. and MARK, R. (2000): *Risk Management*. New York: McGraw Hill.
- CROWE, P.J. (2003): "Mix of Business Review Example". CAS Research Working Party: Executive Level Decision Making using DFA.
- CUMBERWORTH, M.P., HITCHCOX, A.N., MCCONNELL, W.D. and SMITH, A.D. (2002): "Corporate Decisions in General Insurance: Beyond the Frontier". *British Actuarial Journal*, 6(2): 259-296.
- CUMMINS, J.D. and OUTREVILLE, J.F (1987): "An International Analysis of Underwriting Cycles in Property-Liability Insurance". *Journal of Risk and Insurance*, 54(2): 245-262.
- CUMMINS, J.D., GRACE, M. and PHILLIPS, R.D. (1999): "Regulatory Solvency Prediction in Property-Liability Insurance: Risk-Based Capital, Audit Ratios, and Cash Flow Simulation". *Journal of Risk and Insurance*, 66(3): 417-458.

- CUMMINS, J.D., HARRINGTON, S. and KLEIN, R.W. (1995): "Insolvency Experience, Risk-Based Capital, and Prompt Corrective Action in Property-Liability Insurance". *Journal of Banking and Finance*, 19(3): 511-527.
- CUMMINS, J.D., HARRINGTON, S. and NIEHAUS, G. (1994): "An Economic Overview of Risk-Based Capital Requirements for the Property-Liability Insurance Industry". *Journal of Insurance Regulation*, 11(4): 427-447.
- D'ARCY, S.P. and AU, A. (2008): "A Two-factor Approach to Loss Reserve Variability", Presentado a IAA Joint Colloquium, Boston (Estados Unidos).  
Disponible en <http://www.business.uiuc.edu/~s-darcy/> [consultado el 1 de febrero de 2009].
- D'ARCY, S.P. and DOHERTY, N. (1989): "The Aging Phenomenon and Insurance Prices". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 76(145): 24-44.
- D'ARCY, S.P. and DOHERTY, N. (1990): "Adverse Selection, Private Information, and Low Balling in Insurance Markets". *Journal of Business*, 63(2): 145-164.
- D'ARCY, S.P. and GORVETT, R. (2004): "The Use of Dynamic Financial Analysis to Determine Whether an Optimal Growth Rate Exists for a Property-Liability Insurer". *Journal of Risk and Insurance*, 71(4): 583-615.
- D'ARCY, S.P., AU, A. and ZHANG, L. (2009): "Property-Liability Insurance Loss Reserve Ranges Based on Economic Value". *Variance*, 3(1): 42-61.
- D'ARCY, S.P., GORVETT, R.W., HERBERS, J.A., HETTINGER, T.E., LEHMANN, S.G. and MILLER, M.J. (1997a): "Building a Public Access PC-Based DFA Model", *CAS Forum*, Summer: 1-40.
- D'ARCY, S.P., GORVETT, R.W., HERBERS, J.A. and HETTINGER, T.E. (1997b): "Building a Dynamic Financial Analysis Model that Flies". *Contingencies*, 9(6): 40-45.
- D'ARCY, S.P., GORVETT, R.W., HETTINGER, T.E. and WALLING, III R.J. (1998): "Using the Public Access Dynamic Financial Analysis Model: A Case Study". *CAS Forum*, Summer: 53-118.
- D'ARCY, S.P. and DOHERTY, N. (1990): "Adverse Selection, Private Information and Lowballing in Insurance Markets". *Journal of Business*, 63(2): 145-164.
- DAS, S.R and FORESI, S. (1996): "Exact Solution for Bond and Option Prices with Systematic Jump Risk". *Review of Derivatives Research*, 1(1): 7-24.
- DAYKIN, C.D. and CRESSWELL, C. (2001): "The regulation of non-life insurance in the United Kingdom". Presentado a Astin Colloquium 2001, Washington (Estados Unidos).
- DAYKIN, C.D. and HEY, G.B. (1990): "Managing Uncertainty in a General Insurance Company". *Journal of the Institute of Actuaries*, 117, Part. 2: 173-277.
- DAYKIN, C.D. and HEY, G.B. (1991): "A Stochastic Cash-Flow Model of a General Insurance Company". Presentado a AFIR Colloquium 1991, Brighton (Inglaterra).

- DAYKIN, C.D., BERNSTEIN, G., COUTTS, S., DEVITT, E., HEY, G.B., REYNOLDS, D. and SMITH, P. (1987): "Assessing the Solvency and Financial Strength of a General Insurance Company". *Journal of the Institute of Actuaries*, 114(2): 227-310.
- DAYKIN, C.D., DEVITT, E.R., KHAN, M.R. and MCCAUGHAN, J.P. (1984): "The solvency of general insurance companies". *Journal of the Institute of Actuaries*, 111: 279-336.
- DAYKIN, C.D., PENTIKÄINEN, T. and PESONEN, M. (1994): *Practical Risk Theory for Actuaries*. Londres: Chapman & Hall.
- DE MATTEIS, R. (2001): *Fitting Copulas to Data*. Tesis doctoral, University of Zurich.
- DEGEN, M., EMBRECHTS, P. and LAMBRIGGER, D.D. (2007): "The Quantitative Modeling of Operational Risk: Between g-and-h and EVT". Presentado a Astin Colloquium 2007, Orlando (Estados Unidos).
- DEHEUVELS, P. (1979): "La fonction de dépendance empirique et ses propriétés –Un test non paramétrique d'indépendance". Académie Royale de Belgique -Bulletin de la Classe des Sciences- 5<sup>e</sup> Série, 65: 274-292.
- DE JONG, P. and ZEHNWIRTH, B. (1983): "Claims Reserving, State-Space Models and the Kalman-Filter". *Journal of the Institute of Actuaries*, 110: 157-181.
- DEL POZO E.V., FERNÁNDEZ, J. and DÍAZ, Z. (2006): "La inteligencia artificial como una alternativa viable en la predicción de la insolvencia de empresas de seguros". *Análisis financiero*, 100: 64-75.
- DELBAEN, F. (2000): "Coherent measures of risk on general probability spaces", Working paper. Disponible en <http://www.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/RiskMeasuresGeneralSpaces.pdf> [consultado el 1 de Marzo de 2009].
- DEMPSTER, M.A.H., HON, F.I.A., GERMANO, M., MEDOVA, E.A. and VILLAVERDE, M. (2003): "Global Asset Liability Management". *British Actuarial Journal*, 9(1): 137-195.
- DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M. and KAAS, R (2005): *Actuarial Theory for Dependent Risks-Measures: Orders and Models*. John Wiley & Son.
- DESMEDT, S. and WALHIN, J-F. (2008): "On the Subadditivity of Tail Value at Risk: An Investigation with Copulas". *Variance*, 2(2): 231-252.
- DHAENE, J., DENUIT, M., GOOVAERTS, M.J., KAAS, R. and VYNCKE, D. (2002a): "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory". *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1): 3-33.
- DHAENE, J., DENUIT, M., GOOVAERTS, M.J., KAAS, R., VYNCKE, D., DHAENE, J., DENUIT, M., GOOVAERTS, M.J., KAAS, R. and VYNCKE, D. (2002b): "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Application". *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(2): 133-161.
- DIAS, A. and EMBRECHTS, P. (2003): "Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance", Working paper.

Disponible en [http://fmg.lse.ac.uk/upload\\_file/681\\_Dias.pdf](http://fmg.lse.ac.uk/upload_file/681_Dias.pdf) [consultado el 1 de Marzo de 2009].

- DÍAZ, Z., FERNÁNDEZ, J., SEGOVIA, M.J. and DEL POZO, E.M (2004a): "See5 Algorithm versus Discriminant Analysis. An Application to the Prediction of Insolvency in Spanish Nonlife Insurance Companies". *Investment Management and Financial Innovations*, 4: 102-112.
- DÍAZ, Z., FERNÁNDEZ, S. and FERNÁNDEZ, J. (2004b): "Sistemas de inducción de reglas y árboles de decisión aplicados a la predicción de insolvencias en empresas aseguradoras". Working paper.  
Disponible en <http://eprints.ucm.es/6833/> [consultado el 1 de Marzo de 2009].
- DIERS, D. (2008): "Stochastic modelling of catastrophe risks in DFA models". Presentado a Astin Colloquium 2008, Manchester (Inglaterra).
- DIERS, D. (2009a): "Stochastic re-reserving in multi-year internal models –An approach based on simulations". Presentado a Astin Colloquium 2009, Helsinki (Finlandia).
- DIERS, D. (2009b): "The use of multi-year internal models for management decisions in multi-year risk management". Presentado a Astin Colloquium 2009, Helsinki (Finlandia).
- DIERS, D. (2009c): Strategic management of assets and liabilities using multi-year internal risk models. Presentado a Annual Meeting of American Risk and Insurance Association (ARIA), Washington (Estados Unidos).
- DNB (2004): "Financial Assessment Framework Consultation Document".  
Disponible en [http://www.dnb.nl/dnb/home/file/FTK%20Consultation%20Document%20English%20translation\\_tcm47-144570.pdf](http://www.dnb.nl/dnb/home/file/FTK%20Consultation%20Document%20English%20translation_tcm47-144570.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- DOFF, R. (2008): "A Critical Analysis of the Solvency II Proposal". *Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice*, 33(1): 193-206.
- DORNBUSCH, R. (1976): "Expectations and exchange rate dynamics". *Journal of Political Economy*, 84(6): 1161-1176.
- DOTHAN, L.U. (1978): "On the term structure of interest rates". *Journal of Financial Economics*, 6(1): 59-69.
- DUFFEE, G.R. (1998): "The relation between Treasury yields and corporate bond yield spreads". *Journal of Finance*, 53(6): 2225-2241.
- DUFFIE, D. and KAN, R. (1996): "A Yield-Factor Model of Interest Rates". *Mathematical Finance*, 6(4): 379-406.
- DUFFIE, D. and SINGLETON, K.J. (1999): "Modeling the term structure of defaultable bonds". *Review of Financial Studies*, 12(4): 687-720.
- DURÁN, P. (2010): *El Análisis Financiero Dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.
- DURRLEMAN, V., NIKEGHBALI, A. and RONCALLI, T. (2000): "Which copula is the right one?" Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.

Disponible en [http://defaultrisk.com/pp\\_corr\\_68.htm](http://defaultrisk.com/pp_corr_68.htm) [consultado el 1 de Marzo de 2009].

- DUTTA, K. and PERRY, J. (2006): "A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital". Working Paper.  
Disponible en <http://www.bos.frb.org/economic/wp/wp2006/wp0613.htm> [consultado el 1 de Marzo de 2009].
- DYSON, A.C.L. and EXLEY, C.J. (1995): "Pension fund asset valuation and investment". *British Actuarial Journal*, 1(3): 471-557.
- EBERLEIN, E. and KELLER, U. (1995): "Hyperbolic distributions in finance", *Bernoulli*, 1(3): 281-299.
- EFRON, B. and TIBSHIRANI, R. J. (1993): *An introduction to the bootstrap*. Florida: Chapman and Hall.
- ELING, M. and PARNITZKE, T. (2007): "Dynamic Financial Analysis: Classification, Conception, and Implementation". *Risk Management and Insurance Review*, 10(1): 33-50.
- ELING, M. and TOPLEK, D. (2009): "Modeling and management of nonlinear dependencies—Copulas in Dynamic Financial Analysis". *Journal of Risk and Insurance*, 76(3): 651-681.
- ELING, M., GATZERT, N. and SCHMEISER, H. (2008a): "The Swiss Solvency Test and its Market Implications". *Geneva Papers on Risk and Insurance*, 33(3): 418-439.
- ELING, M., GATZERT, N. and SCHMEISER, H. (2009): "Minimum Standards for Investment Performance: A New Perspective on Non-Life Insurer Solvency". *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(1): 113-122.
- ELING, M., PARNITZKE, T., and SCHMEISER, H. (2007a): "A Management Rule of Thumb in Property-Liability Insurance", en K.-H. Waldmann and U.M. Stocker (eds.): *Operations Research Proceedings 2006*, 281-286, Berlin: Springer.
- ELING, M., SCHMEISER, H. and PARNITZKE, T. (2008b): "Management Strategies and Dynamic Financial Analysis". *Variance*, 2(1): 52-70.
- ELING, M., SCHMEISER, H. and SCHMIT, J. T. (2007b): "The Solvency II Process: Overview and Critical Analysis". *Risk Management and Insurance Review*, 10(1): 69-85.
- ELING, M., and HOLZMÜLLER, I. (2009): "An Overview and Comparison of Risk-Based Capital Standards". *Journal of Insurance Regulation*, Forthcoming.
- EMBRECHTS, P., KAUFMANN, R., and SAMORODNITSKY, G. (2004): "Ruin Theory Revisited: Stochastic Models for Operational Risk", en Bernadell et al. (eds.): *Risk Management for Central Bank Foreign Reserves*. Frankfurt: European Central Bank, 243-261.
- EMBRECHTS, P., KLUPPELBERG, C. and MIKOSCH, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer-Verlag.
- EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., and McNEIL, A. (2001): "Modelling dependence with copulas and applications to risk management", en S.T. Rachev (ed.): *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 329-384.

- EMBRECHTS, P., MCNEIL, A. and STRAUMANN, D. (2002): "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls", en M.A.H. Dempster (ed.): *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge: Cambridge University Press, 176-223.
- ENGLAND, P.D. and VERRALL, R.J. (1999): "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving". *Insurance: Mathematics and Economics*, 25(3): 281-293.
- ENGLAND, P.D. and VERRALL, R. (2002): "Stochastic claims reserving in general insurance". *British Actuarial Journal*, 8(3): 443-544.
- ENGLAND, P.D. and VERRALL, R.J. (2006): "Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance". *Annals of Actuarial Science*, 1(2): 221-270.
- ENGLE, R.F. (1982): "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation". *Econometrica*, 50(4): 987-1008.
- ENGLE, R.F. (2002): "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models". *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3): 339-50.
- ENGLE, R.F. and BOLLERSLEV, T. (1986), "Modelling the persistence of conditional variance", *Econometric Reviews*, 5(1): 1-50.
- ENGLE, R.F. and KRONER, G. (1995): "Multivariate simultaneous generalized ARCH". *Econometry Theory*, 11(1): 122-150.
- EPISCOPOS, A. (2000): "Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate". *Journal of International Markets, Institutions and Money*, 10(2): 199-212.
- ERNEST AND YOUNG (2002): "Solvencia II: Visión General", Unespa, Proyecto Solvencia II- Documento 1.  
Disponible en [http://intranet.icea.es/solvencia/Documentos/31102002\\_Monografico\\_SolvenciaII%20UNESPA.pdf](http://intranet.icea.es/solvencia/Documentos/31102002_Monografico_SolvenciaII%20UNESPA.pdf) [consultado el 1 de febrero de 2009].
- FACULTY AND INSTITUTE OF ACTUARIES (1997): *Claims Reserving Manual*.
- Fama, E.F. (1963): "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *Journal of Business*, 36(4): 420-429.
- FAMA, E.F. (1965): "The Behaviour of Stock Market Prices". *Journal of Business*, 38(1): 34-105.
- FELDBLUM, S. (1989): "Asset Liability Matching for Property/Casual Insurers". CAS Discussion Paper Program: 117-154.
- FELDBLUM, S. (1992): "European Approaches to Insurance Solvency". CAS Discussion Paper Program: 511-552.
- FELDBLUM, S. (1996) "Personal Automobile Premiums: An Asset Share Pricing Approach for Property/Casualty Insurance". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 83: 190-296.

- FIGLEWSKI, S. (1997): "Forecasting volatility". *Financial Markets, Institutions and Instruments*, 6(2): 1-88.
- FISHER and GELTNER (2000): "De-Lagging the NCREIF Index: Transaction Prices and Reverse-Engineering", *Real Estate Finance*, 17(1): 7-22.
- FISHER, I. (1930): *Theory of Interest*. New York: The Macmillan Company.
- FONG, G.H. and VASICEK, O. A. (1991): "Fixed-Income Volatility Management". *Journal of Portfolio Management*, 17(4): 41-46.
- FOPI (2004): "White Paper of the Swiss Solvency Test".  
 Disponible en <http://www.bpv.admin.ch/dokumentation/00440/index.html?lang=en>  
 [consultado el 1 de Febrero de 2009]
- FRANK, M. J. (1979): "On the Simultaneous Associativity of  $F(x,y)$  and  $x+y-F(x,y)$ ", *Aequationes Mathematicae*, 19(2-3): 194-226.
- FRANKEL, J.A. (1979): "On the mark: A theory of floating exchange rates based on real interest rate differentials". *American Economic Review*, 69(4): 610-622.
- FREES, E. and VALDEZ, E. (1998): "Understanding relationships using copulas". *North American Actuarial Journal*, 2(1):1-25.
- FRIESE, S. and MITTENDORF, T. (2003): "Asset-Liability Management bei Komposit- und Lebensversicherern". Working Paper.  
 Disponible en <http://www.wiwi.uni-hannover.de/Forschung/Diskussionspapiere/dp-288.pdf>  
 [consultado el 1 de marzo de 2009].
- FUSHIMI, M. and TEZUKA, S. (1983): "The k-distribution of generalized feedback shift register pseudorandom numbers". *Communications of the ACM*, 26(7): 516-523.
- GARCÍA, A. (2007): *La Teoría del Valor Extremo: Una Aplicación al Sector Asegurador*. Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá.
- GARVEN, J.R. (1997): "Compilation of Variables Necessary for Performing Dynamic Financial Analysis of Insurance Companies", *CAS Forum*, Winter: 187-221.
- GDV (2005): "Discussion Paper for a Solvency II Compatible Standard Approach".  
 Disponible en [http://www.gdv.de/Downloads/English/Documentation\\_Sol\\_II.pdf](http://www.gdv.de/Downloads/English/Documentation_Sol_II.pdf)  
 [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- GEOGHEGAN, T.J., CLARKSON, R.S., FELDMAN, K.S., GREEN, S.J., KITTS, A., LAVECKY, J. P., ROSS, F.J.M., SMITH, W.J. and TOUTOUNCHI, A. (1992): "Report on the Wilkie stochastic investment model". *Journal of Institute of Actuaries*, Part. II, 119: 173-228.
- GENEST, C. and RIVEST, L. (1993): "Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas". *Journal of the American Statistical Association*, 88(423): 1034-1043.
- GERBER, H.U. (1979): *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Philadelphia: Huebner Foundation.

- GERBER, H.U. y. SHIU, E.S. (1998): "On the Time Value of Ruin". *North American Actuarial Journal*, 2(1): 48-72.
- GIBSON, R., L'HABITANT, F. and TALAY, D. (2001): "Modeling the Term Structure of Interest Rates: A Review of the Literature". Working Paper.  
Disponible en <http://ssrn.com/abstract=275076> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- GLOSTEN, L., JAGANNATHAN, R. and RUNKLE, D. (1993): "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks". *Journal of Finance*, 48(5): 1779-1801.
- GOOIJER, J.G. de and VIDIELLA-I-ANGUERA, A. (2000): "Modelling Seasonalities in Nonlinear Inflation Rates using SEASETARs".  
Disponible en <http://www.tinbergen.nl/discussionpapers/00098.pdf> [consultado el 1 de febrero de 2009].
- GORVETT, R. W. (1998): *Dynamic Financial Analysis of Property-Liability Insurance Companies*, Tesis Doctoral, University of Illinois.
- GRACE, M., HARRINGTON, S. and KLEIN, R. W. (1998): "Risk-Based Capital and Solvency Screening in Property-Liability Insurance". *Journal of Risk and Insurance*, 65(2): 213-243.
- GRAY, J. B. and FRENCH, D.W. (1990): "Empirical Comparisons of Distributional Models for Stock Index Returns". *Journal of Business Finance and Accounting*, 17(3) 451-459.
- GREENWOOD, J. A. and DURAND, D. (1960): "Aids for fitting the Gamma distribution by maximum likelihood". *Technometrics*, 2(1): 55-65.
- GUILLÉN, M.; GUSTAFSSON, J.; NIELSEN, J.P. and PRITCHARD, P.: "Using External Data in Operational Risk ". *Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 32(2): 178-189.
- GUMBEL, E. J. (1960): "Bivariate Exponential Distributions". *Journal of the American Statistical Association*, 55(292): 698-707.
- HAN, Z. (2003): *Actuarial modelling of Extremal Events using Transformed Generalized Extreme Value Distributions and Generalized Pareto Distributions*. Tesis doctoral, Ohio State University.
- HANSEN, L.P. (1982): "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators". *Econometrica*, 50(4). pp. 1029-1054.
- HARDY, M.R. (1993): "Stochastic Simulation in Life Office Solvency Assessment". *Journal of Institute of Actuaries*, 120(2): 131-151.
- HARDY, M.R. (1996): "Simulating the Relative Solvency of Life Insurers". *British Actuarial Journal*, 2(4): 1003-1019.
- HARDY, M.R. (2001): "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns". *North American Actuarial Journal*, 5(2): 41-53.

- HARDY, M. R. (2003): *Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for Equity Linked Life Insurance*. New York: Wiley.
- HARDY, M. R.; FREELAND, R. K. and TILL, M. C. (2006): "Validation of Long-Term Equity Return Models for Equity-Linked Guarantees". *North American Actuarial Journal*, 10(4): 28-47.
- HARRINGTON, S. (2004): "Market Discipline in Insurance and Reinsurance", en C. Borio *et al.* (eds.): *Market Discipline Across Countries and Industries*, Cambridge: MIT Press.
- HARRINGTON, S.E. and NIEHAUS, G. (2000): "Volatility and Underwriting Cycles" en G. Dionne (eds.) *Handbook of Insurance*, Boston: Kluwer Publishing, 657-686.
- HAYNE, R.M. (1999a): "Modeling Parameter Uncertainty in Cash Flow Projections". *CAS Forum*, Summer: 133-151.
- HAYNE, R.M. (1999b): "Estimating Uncertainty in Cash Flow Projections". *CAS Forum*, Summer: 69-131.
- HEATH, D., JARROW, R. and MORTON, A. (1990): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete. Time Approximation". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(4): 419-440.
- HEATH, D., JARROW, R. and MORTON, A. (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology". *Econometrica*, 60(1): 77-105.
- HIBBERT, J., MOWBRAY, P. and TURNBULL, C. (2001): "A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes". Technical Report, Barrie & Hibbert Limited.  
Disponible en [http://www.actuaries.org.uk/\\_data/assets/pdf\\_file/0014/26312/hibbert.pdf](http://www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0014/26312/hibbert.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- HILL, B.M. (1975): "A simple general approach to inference about the tail of a distribution". *The Annals of Statistics*, 3(5): 1163-1174.
- HINES, K.D. (2002): "Risk Considerations for the Allfinanz Organization". *CAS Forum*, Summer: 1-28.
- HO, T.S.Y. and LEE, S-B. (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *The Journal of Finance*, 41(5): 1011-1030.
- HODES, D.M, NEGHAWI, T., CUMMINS, J.D., PHILLIPS, R. and FELDBLUM, S. (1996): "The financial modeling of property/casualty insurance companies". *CAS Forum*, Spring: 3-88.
- HODES, D.M. and FELDBUM, S. (1999): "The rest of the loss-Reserve Story". *Best's Review*, 100(2): 85-91.
- HOGG, R. V. and KLUGMAN, S.A. (1984): *Loss Distributions*. New York: Wiley.
- HOLZMÜELLER, I. (2009): "The United States RBC Standards, Solvency II, and the Swiss Solvency Test: A Comparative Assessment". *Geneva Papers on Risk and Insurance*, 1(34): 56-77.

- HOUGAARD, P. (1986): "A Class of Multivariate Failure Time Distributions". *Biometrika*, 73: 671-678.
- HUBER, P.P. (1995): "A Review of Wilkie's Stochastic Investment Model". *British Actuarial Journal*, 17(1): 181-211.
- HULL, J. (1997): *Options, Futures and other Derivative Securities*, New Jersey: Prentice-Hall.
- HULL, J. and WHITE, A. (1990): "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, 3(4): 573-592.
- Hull, J. and White, A. (1993): "Efficient procedures for valuing European and American path-dependent derivatives", *Journal of Derivatives*, 1(1): 21-31.
- HULL, J. and WHITE, A. (1994): "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models". *Journal of Derivatives*, 2(2): 37-48.
- HÜRLIMANN, W (2008): "On the non-life Solvency II Model". Presentado a Astin Colloquium 2008, Manchester (Inglaterra).
- IAA (2004): "A Global Framework to Insurer Solvency Assessment". Insurer Solvency Assessment Working Party of the International Actuary Association.
- IAIS (2000): "On Solvency, Solvency Assessments and Actuarial Issues -An IAIS Issues Paper". IAIS Sub-Committee on Solvency and Actuarial Issues.
- IAIS (2002): "Principios sobre suficiencia de Capital y de Solvencia". Principios N° 5.
- IAIS (2003a): "Niveles de Control de Solvencia". Documento Guía N° 6.
- IAIS (2003b): "Pruebas de estrés para aseguradoras". Documento guía N° 8.
- ICEA (2004): "Informe Económico del Sector Asegurador". Informe N° 927.
- ICEA (2005a): "Anuario de los seguros no vida 2005". Informe N° 183.
- ICEA (2005b): "Las Inversiones de las Entidades Aseguradoras". Informe N° 936.
- ICEA (2005c): "El seguro de automóviles. Siniestralidad por garantías". Informe N° 948.
- IMAN, R.L. and CONOVER, W.J. (1982): "A Distribution-Free Approach To Inducing Rank Correlation Among Input Variables". *Communications in Statistics.-Simulation and Computation*, 11(3): 311-334.
- ISAACS, D. (2003): "Capital adequacy and dependence". *Institute of Actuaries of Australia, General Insurance Seminar*, 229-249.
- JAMSHIDIAN, F. (1997): "LIBOR and swap market models and measures". *Finance and Stochastics*, 1(4): 293-330.
- JARQUE, C. M. and BERA, A.K (1980): "Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals". *Economics Letters*, 6(3): 255-259.

- JARQUE, C. M. and BERA, A.K (1987): "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals". *International Statistical Review*, 55(2): 163-172.
- JARROW, R. and TURNBULL, S. (1995): "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk". *Journal of Finance*, 50(1): 53-85.
- JARROW, R., LANDO, D. and TURNBULL, S. (1997): "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads". *Review of Financial Studies*, 10(2): 481-523.
- JOE, H. (1997): *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman and Hall.
- JOE, H. and XU, J.J. (1996): "The estimation method of inference functions for margins for multivariate models". Working Paper.  
Disponible en <http://www.stat.ubc.ca/~harry/ifm.pdf> [consultado el 1 de Marzo de 2009].
- JORION, P. (1996): "Risk 2: Measuring the Risk in Value at Risk". *Financial Analysts Journal*, 52(6): 47-56.
- JORION, P. (1997): *Value at Risk: A New Benchmark for Measuring Derivatives Risk*. Chicago: Irwin Professional Publishing.
- JOSEPH, B. (2000): "DFA-The Past, The Present and the Future". Presentado a Joint Seminar Institute of Actuaries and the Casualty Actuarial Society, Londres (Inglaterra).
- KAROLYI, A. and STULZ, R. (1996): "Why do Markets Move Together? An Investigation of U.S.-Japan Stock Return Movements". *Journal of Finance*, 51(3): 951-986.
- KAUFMAN, A. M. and RYAN, T. A. (2000): "Strategic Asset Allocation for Multi-Line Insurers Using Dynamic Financial Analysis". *CAS Forum*, Summer: 1-20.
- KAUFMANN, R. (1999): *DFA: Stochastische Simulation zur Beurteilung von Unternehmensstrategien bei Nichtleben-Versicherungen*. Master Tesis, University of Zurich.
- KAUFMANN, R. and WYLER, A (2005): "Summary on the Swiss Solvency Test". *De Actuaris, Bulletin van het Actuarieel Genootschap*, 12(4): 43-45.
- KAUFMANN, R., GADMER, A. and KLETT, R. (2001): "Introduction to Dynamic Financial Analysis". *Astin Bulletin*, 31(1): 213-249.
- KENNY, C. (2005): *Random Number Generators: An Evaluation and Comparison of Random.org and Some Commonly Used Generators*. Proyecto de investigación, Trinity College Dublin.  
Disponible en <http://www.random.org/analysis/Analysis2005.pdf> [consultado el 1 de Marzo de 2009].
- KESSNER, E. and PETER, J-U. (2004): "Dynamic Financial Analysis: Getting a Better Grasp of an Insurer's Risks". *Exposure*, 13.
- KIRSCHNER, G.S. and SCHEEL, W.C. (1997): "Specifying the Functional Parameters of a Corporate Financial Model for Dynamic Financial Analysis". *CAS Forum*, Summer: 44-88.

- KIRSHNER, G.S (2000): "A Cost Benefit Analysis of Alternative Investment Strategies Using Dynamic Financial Analysis Tools". *CAS Forum*, Summer: 21-51.
- KIRSHNER, G.S. and PATEL, D.M. (2002): "Beyond P&C: Creating a Multi-Disciplinary Model". *CAS Forum*, Summer: 29-42.
- KITTS, A. (1990): "Comments on a model of retail price inflation". *Journal of the Institute of Actuaries*, 117: 407-412.
- KLAAS, V. and ROMEIKE, F. (2005): "Alea jacta est ... Dynamische Finanzanalyse (DFA) in der Versicherungswirtschaft". *Risknews*, 2(1): 16-20.
- KLEIBER, C. and KOTZ, S. (2003): *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. New Jersey: Wiley.
- KLEIN, G. E. (2002): Discussions of Paper "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns". *North American Actuarial Journal*, 6(1): 171-173.
- KLUGMAN, S.A. and PARSAR, R. (1999): "Fitting bivariate loss distributions with copulas". *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(1): 139-148.
- KLUGMAN, S.A., PANJER, H.H. and WILLMOT, G.E. (2008a): *Loss models: from data to decisions*. New York: Wiley.
- KLUGMAN, S.A., PANJER, H.H. and WILLMOT, G.E. (2008b): *Solutions Manual to Accompany: Loss models: from data to decisions*. New York: Wiley.
- KLUGMAN, S.A. and RIOUX, J. (2006): "Toward a unified approach to fitting loss models". *North American Actuarial Journal*, 10(1): 63-83.
- KNUTH, D.E. (1998): *The Art of Computer Programming*. Massachusetts: Addison-Wesley.
- KÖHNLEIN, D., WILLERT, T. and RAUSCHEN, T. (2006): "Aktuarielle Software für Risikomanagement und Unternehmenssteuerung", *Versicherungswirtschaft Hef*, 20: 1650-1654.
- KON, S. J. (1984): "Models of stock returns-a comparison". *Journal of Finance*, 39(1): 147-165.
- KOSKINEN, L. and PUKKILA, L. (1996): "An Application of the Vector Autoregressive Model with a Markov Regime to Inflation Rates". Presentado a AFIR Colloquium 1996, Nürnberg (Alemania).
- KREPS, R.E. and STEEL, M.M. (1996): "A Stochastic Panning Model for the Insurance Corporation of British Columbia". *CAS Forum*, Spring: 153-174.
- KRISCHANITZ, C. (2002): "Asset-Liability-Management für Versicherungen und Pensionskassen". *die Versicherungsrundschau*, 10: 9-17.
- LAMM-TENNANT, J. and RUGGIERO, R. (2005): "Dynamic Financial Modeling - Measuring risk for better decisions". *Regarding Risk (Gen Re Research)*, Spring: 1-3.

- LARSEN, M.R. (2003): "Investment Presentation Example". CAS Research Working Party: Executive Level Decision Making using DFA.
- L'ECUYER, P. (1988): "Efficient and portable combined random number generators". *Communications of the ACM*, 31(6): 742-749.
- L'ECUYER, P. (1990): "Random numbers for simulation". *Communications of the ACM*, 33(10): 85-97.
- L'ECUYER, P. (1992): "Testing Random Number Generators". Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference, Arlington (Estados Unidos), 305-313.
- L'ECUYER, P., SIMOND, R., CHEN, E.J. and KELTON, D.W. (2002): "An object-oriented Random-Number Package with Many Streams and Substreams". *Operations Research*, 50(6): 1073-1075.
- LEHMER, D.H. (1951): "Mathematical Methods in Large-scale Computing Units". Proceedings of the Second Symposium on Large Scale Digital Computing Machinery, Harvard University Press, Cambridge (Inglaterra), 141-146.
- LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics*, 47(1): 13-37.
- LJUNG, G. and BOX, G. (1979): "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika*, 66(1): 265-270.
- LONGIN, F. and SOLNIK, B. (1995): "Is the Correlation in International Equity Returns Constant". *Journal of International Money and Finance*, 14(1): 3-26.
- LONGSTAFF, F. (1989): "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates". *Journal of Financial Economics*, 23(2): 195-224.
- LONGSTAFF, F.A. and SCHWARTZ, E.S. (1992): "Interest Rate Volatility and The Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model". *Journal of Finance*, 47(4): 1259-1282.
- LONGSTAFF, F.A. and SCHWARTZ, E.S. (1995a): "A Simple Approach to Value Fixed and Floating Rate Debt". *Journal of Finance*, 50(3): 789-819.
- LONGSTAFF, F.A. and SCHWARTZ, E. S. (1995b): "Valuing credit derivatives". *The Journal of Fixed Income*, 5(1): 6-12.
- LOWE, S. P. and STANARD, J. N. (1997): "An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer". *Astin Bulletin*, 27(2): 339-371.
- LOZANO, R. (2005): "Las implicaciones de Solvencia II en el sector asegurador español". *Revista de Estabilidad Financiera*, 9: 59-70.
- MACAULAY, F. (1938): *Some theoretical problems suggested by the movements of the interest rates, bond yields, and stock prices in the U.S. since 1856*. NBER, New York.

- MACK, T. (1993): "Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates". *Astin Bulletin*, 23(2): 213-225.
- MACK, T. (2000): "Credible claims reserves: the Benktander method". *Astin Bulletin*, 30(2): 333-347.
- MACLAREN, D. and MARSAGLIA, G. (1965): "Uniform random number generators". *Journal of the Association for Computing Machinery*, 12(1): 83-89.
- MAITLAND, P. (2001): "Long Term Reinsurance Buying Strategies Modelled Using a Component Based DFA Tool". Presentado a Astin Colloquium 2001, Bruselas (Bélgica).
- MAJOR, J.A. (1999): "Taking Uncertainty Into Account: Bias Issues Arising from Parameter Uncertainty in Risk Models". *CAS Forum*, Summer: 153-196.
- MAJUNDAR, C. (2007): "Dynamic Financial Analysis as the untrodden path for company risk measurement under Solvency-II". Presentado a Astin Colloquium 2007, Florida (Estados Unidos).
- MANDELBROT, B. (1963): "The Variation of Certain Speculative Prices". *Journal of Business*, 36(4): 394-419.
- MANGO, D.F. (1997): "An application of game theory: property catastrophe risk load". *CAS Forum*, Spring: 31-51.
- MANGO, D.F. (1999): "Risk Load and the Default Rate of Surplus". *CAS Discussion Paper Program on Securitization of Risk*: 175-222.
- MANGO, D.F. and MULVEY, J.M. (2000): "Capital Adequacy and Allocation Using Dynamic Financial Analysis". *CAS Forum*, Summer: 55-76.
- MANN, H. B. and WALD, A. (1942): "On the Choice of the Number of Class Intervals in the Application of the Chi-Square Test". *Annals of Mathematical Statistics*, 13(3): 306-317.
- MARIATHASAN, J.W.E. and RAINS, P.F. (1993): "Strategic financial management in a general insurance company". Presentado a AFIR Colloquium 1993, Roma (Italia).
- MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection". *Journal of Finance*, 7(1): 77-91.
- MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons.
- MARSAGLIA, G. (1995): *Diehard: A battery of tests of randomness, The Marsaglia random number CDROM*, Department of Statistics, Florida State University.
- MARSAGLIA, G. and ZAMAN, A. (1991): "A new class of random number generators". *The Annals of Applied Probability*, 1(3): 462-480.
- MARSAGLIA, G. (1972): "The structure of linear congruential sequences", en S.K Zaremba (ed.): *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 248-285.

- MARSAGLIA, G. (1985): "A current view of random number generators," en L. Billard (ed.) *Computer Science and Statistics: The Interface*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 3-10.
- MASCAGNI, M. and SRINIVASAN, A. (2000): "Algorithm 806: SPRNG: A scalable library for pseudorandom number generation". *ACM Transactions on Mathematical Software*, 26(4): 436-461.
- MATSUMOTO, M. and NISHIMURA, T. (1998): "Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator". *Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1): 3-30.
- MCLEISH, D.L. and SMALL, C.G. (1988): *The Theory and Applications of Statistical Inference Functions*, New York: Springer-Verlag.
- MCNEIL, A., FREY, R. and EMBRECHTS, P. (2006): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton: Princeton University Press.
- MEIER, U.B. and OUTREVILLE, J.F. (2003): "The Reinsurance Price and the Insurance Cycle". Presentado al Seminar of the European Group of Risk and Insurance Economists (EGRIE), Zurich (Suiza).
- MELGAREJO, J. (2004): *El Margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica*. Cuadernos de la Fundación Mapfre, Estudios, 86, Madrid.
- MERTON, R.C. (1973): "Theory of rational option pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1): 141-183.
- MERTON, R.C. (1974): "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, 29(2): 449-470.
- MEYERS, G.G. (2001): "An Analysis of the Underwriting Risk for DFA Insurance Company". *CAS Forum*, Spring: 195-220.
- MIGNOLA, G. and UGOCCIONI, R. (2005): "Tests of Extreme-Value Theory Applied to Operacional Risk Data", en E.L. Davis (ed.) *Operational Risk: Practical Approaches to Implementation*, Risk Books.
- MIKOSH (2006): *Non-life insurance mathematics: an introduction with stochastic processes*, Berlín: Springer-Verlag.
- MILDENHALL (2005): "Correlation and Aggregate Loss Distributions With An Emphasis On The Iman-Conover Method". CAS Working Party on Correlation.
- MILTERSEN, K.R., SANDMANN, K. and SONDERMANN, D. (1997): "Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *Journal of Finance*, 52(1): 409-430.
- MOLIFE, R. (2003): *Using Copulas as a Measure of Dependence Between Competing Causes of Mortality*, Master Thesis, City University.
- MOODY'S (2006): *Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-2005*.

- MORENO, M. (1997): *Modelizaciones alternativas en tiempo continuo de la estructura temporal de los tipos de interés*. Tesis Doctoral, Universidad Carlos III.
- MORENO, M. (2000): "Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: valoración de activos derivados y comportamiento empírico". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 29(104): 345-376.
- MOSCADELLI, M. (2004): "The modelling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel committee". *Technical Report 517*, Banca d'Italia.  
Disponible en [http://www.bancaditalia.it/pubblicazioni/econo/temidi/td04/td517\\_04/td517/tema\\_517.pdf](http://www.bancaditalia.it/pubblicazioni/econo/temidi/td04/td517_04/td517/tema_517.pdf) [consultado 1 de Marzo de 2009].
- MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market". *Econometrica*, 34(4): 768-783.
- MULVEY, J.M. and ERKAN, H.G. (2003): "Risk management of a P/C insurance company scenario generation, simulation and optimization". Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference, 1: 364 - 371.
- MULVEY, J.M., BELFATTI, M.J., MADSEN, C. (1999a): "Integrated Financial Risk Management: Capital Allocation Issues". *CAS Forum*, Spring: 221-242.
- MULVEY, J.M., MADSEN, C.K., and MORIN, F. (1998): "Linking Strategic and Tactical Planning Systems for Dynamic Financial Analysis". *CAS Forum*, Summer: 149-168.
- MULVEY, J.M., MORIN, F. and PAULING, B. (1999b): "Calibration of Stochastic Scenario Generators for DFA". *CAS Forum*, Summer: 223-238.
- NAKADA, P. and SHAH, H. (1999): "Deconstructing DFA". *Global Reinsurance*, September-November: 1-7.
- NAKADA, P., SHAH, H., KOYLUOGLU, G.U. and COLLIGNON, O. (1999): "P&C RAROC: A Catalyst for Improved Capital Management in the Property and Casualty Insurance Industry", *The Journal of Risk Finance*, 1(1): 52-69.
- NELSEN, R.B. (1999): *An introduction to copula*. New York: Springer Verlag.
- NELSON, D.B (1991): "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometrica*, 59(2): 347-370.
- NOLAN, J.P. (1998): "Parameterisation and modes of stable distributions". *Statistics and Probability Letters*, 38(2): 187-195.
- NOLAN, J.P. (2003): *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhäuser.
- NOWMAN, K.B. (1997): "Gaussian Estimation of Single-factor Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, 52(4): 1695-1706.
- OHLSSON, E. and LAUZENINGKS, J. (2008): "The one-year non-life insurance risk". Presentado a Astin Colloquium, Manchester (Reino Unido).

- OSETROVA, A. and SCHMEISER, H. (2006): "Interne Risikosteuerungsmodelle aus wissenschaftlicher Sicht", en Gründl, H., and Perlet, H. (eds.): *Solvency II & Risikomanagement*, Berlín: Gabler.
- OSFI (2002a): "BAAT Guideline". OSFI Guideline.
- OSFI (2002b): "Instruction Guide on Use of Internal Models for Determining Required Capital for Segregated Fund Risks (MCCSR)". OSFI Guideline.
- OSFI (2003): "Minimum Capital Test Guideline". OSFI Guideline.
- OSFI (2005): "MCCSR Guideline". OSFI Guideline.
- OSTASZEWSKI, K.M. (1998): "Applications of Resampling Methods in Dynamic Financial Analysis". *CAS Forum*, Summer: 169-206.
- OTERO, L. and DURÁN, P. (2007): "Modelo de Análisis Financiero Dinámico (DFA) Adaptado al Mercado Asegurador Español", en J. Sarabia and M. Guillén, (eds.): *Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: Riesgo 2007*. Santander: Ediciones TGD, 195-214.
- OTERO, L. and DURÁN, P. (2008): "Diseño de un Modelo de Análisis Financiero Dinámico (DFA) Aplicado al Seguro de Automóvil Español". *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, 17(4): 63-84.
- OTERO, L., DURÁN, P. and RODRÍGUEZ, A. (2008): "El análisis financiero dinámico como herramienta de análisis del riesgo para el negocio asegurador". *Análisis Financiero*, 107: 6-19.
- PAINTER, R.A. and ISAAC, D. (2006): "A Multi Stakeholder Approach to Capital Adequacy". Presentado a Enterprise Risk Management Symposium Society of Actuaries, Chicago (Estados Unidos).
- PALISADE CORPORATION (2006): *Guía para el uso de @RISK. Programa auxiliar para el análisis y la simulación de riesgo en Microsoft Excel. Versión 4.5*.
- PANNETON, C.-M. (2003): "Mean-Reversion in Equity Models in the Context of Actuarial Provisions for Segregated Fund Investment Guarantees". Presentado a 2003 Stochastic Modeling Symposium, Toronto (Canadá).
- PANNETON, C.-M. (2005): *Practical Implications of Equity Models in the Context of Actuarial Provisions for Segregated Funds Investment Guarantees*. Master Thesis, Université Laval.
- PANNETON, C.-M. (2006): "A Review of the CIA Calibration Criteria for Stochastic Modeling". Presentado a 2006 Stochastic Modeling Symposium and Investment Seminar, Toronto (Canadá).
- PANJER, H.H. (2001): "Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates". Presentado a International Congress of Actuaries, Cancún (México).
- PARLAMENTO EUROPEO (2009): Resolución legislativa del Parlamento Europeo, de 22 de abril de 2009, sobre la propuesta de Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre

el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

PARLAMENTO EUROPEO Y CONSEJO (2009): *Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*. PE-CONS 3643/6/09

PAULING, B. (2002): "Credit Spread Modeling Considerations". Presentado a Valuation Actuary Symposium, Society of Actuaries, Florida (Estados Unidos).

PEDROSA, M. and ROLL, R. (1998): "Systematic risk in corporate bond credit spreads", *Journal of Fixed Income*, 8(3): 7-26.

PEÑA, D. (2005): *Análisis de series temporales*. Madrid: Alianza Editorial.

PENTIKÄINEN, T. and RANTALA, I. (1982): *Solvency of Insurers and Equalization Reserves, I and II*. Helsinki: Insurance Publishing Company.

PENTIKÄINEN, T., BONSDOFF, H., PESONEN, M., RANTALA, I. and RUOHONEN, M. (1989): *Insurance Solvency and Financial Strength*. Helsinki: Finnish Insurance Training and Publishing Company.

PHILBRICK, S. (1999): "Brainstorms Capital allocation". *Actuarial Review*, 26(1). Disponible en <http://www.casact.org/pubs/actrev/feb99/bstforms.htm> [consultado el 1 de Marzo de 2009].

PHILBRICK, S.W. and PAINTER, R.A (2001): "Dynamic Financial Analysis: DFA Insurance Company Case Study Part II: Capital Adequacy and Capital Allocation". *CAS Forum*, Spring: 99-152.

PIWCEWICZ, B. (2005): "Assessment of Diversification Benefit in Insurance Portfolios". Presentado a Institute of Actuaries of Australia, General Insurance Seminar, Coolum Beach (Australia).

PINHEIRO, P.J.R., SILVA, J.M.A. and CENTENO, M.L. (2003): "Bootstrap Methodology in Claim Reserving". *Journal of Risk and Insurance*, 70(4): 701-714.

POTERBA, J.M. and SUMMERS, L.H. (1988): "Mean Reversion in Stock Prices". *Journal of Financial Economics*, 22(1): 27-59.

POWERS, M.R. (1995): "A Theory of Risk, Return and Solvency". *Insurance: Mathematics and Economics*, 2(17): 101-118.

PRAETZ, P. D. (1972): "The Distribution of Share Price Changes". *Journal of Business*, 45(1): 49-55.

PRIGENT, J., RENAULT, O. and SCAILLET, O. (2001): "An Empirical Investigation into Credit Spread Indices". *The Journal of Risk*, 3(3): 27-56.

QUARG, G. and MACK, T. (2004): "Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based

- on Incurred Losses". *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, 26(4): 597-630.
- QUARG, G. and MACK, T. (2008): "Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses". *Variance*, 2(2): 266-299.
- RANNE, A. (1998): "The Finnish Stochastic Investment Model". Transactions of International Congress of Actuaries, Birmingham (Inglaterra), 213-238.
- REBONATO, R. (1998): *Interest Rate Option Models*, 2ª ed., Chichester: Wiley.
- REDINGTON, F.M. (1952): "Review of the Principles of Life Office Valuations". *Journal of the Institute of Actuaries*, 78(350): 1-40.
- Reiss, R-D. and Thomas, M. (1997): *Statistical Analysis of Extreme Values*, Birkhäuser-Verlag, Basilea (Suiza).
- RENDELMAN, R. and BARTTER, B. (1980): "The pricing of options on debt securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15(1): 11-24.
- RICHARD, S.F. (1978): "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, 6(1): 33-57.
- RIPLEY, B.B. (1987): *Stochastic simulation*. New York: Wiley.
- ROCKAFELLAR, R.T. and URYASEV, S. (2000): "Optimization of Conditional Value-At-Risk". *The Journal of Risk*, 2(3): 21-41.
- ROCKAFELLAR, R.T. and URYASEV, S. (2002): "Conditional value-at-risk for general loss distributions". *Journal of Banking and Finance*, 26(7): 1443-1471.
- ROGERS, L.C.G. (1995): "Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use?", en D.D. Duffie et al. (eds.): *Mathematical Finance*, The IMA Volumes in Mathematics and its applications. 65, New York: Springer-Verlag, 93-116.
- ROSAS, G. (2002): *Um Estudo sobre a Ferramenta de Projeção Financeira conhecida como Dynamic Financial Analysis (DFA) e suas Vantagens na Otimização das Decisões Financeiras em Companhias de Seguros*. Tesis de Maestría, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- ROWLAND, V.T. and CONDE, F.S. (1996): "Dynamic Financial Analysis Issues in Investment Portfolio Management". *CAS Forum*, Spring: 205-240.
- RUBINSTEIN, R.Y. (1981): *Simulation and the Monte Carlo Method*, New York: John Wiley & Sons.
- RUIZ, E. and VEIGA, H. (2008) "Modelos de volatilidad estocástica: una alternativa atractiva y factible para modelizar la evolución de la volatilidad". *Anales de Estudios Económicos y Empresariales*, 18: 9-68.

- RUSSO, G. and VAN SLYKE, O.E. (1996): "Interpreting Model Output-The California Earthquake Authority and the Cost of Capital of the Reinsurance Layer". *CAS Forum*, Spring: 241-268.
- RYAN, J.P., ARCHER-LOCK, P.R., CZERNUSZEWICZ, A.J., GILLOTT, N.R., HINTON, P.H., IBESON, D., MALDE, S.A., PAUL, D., SHAH, N. (2001): "Financial Condition Assessment". *British Actuarial Journal*, 7(4): 519-584.
- SAMAD-KHAN, A. (2005): "Actuarial Techniques in Banking Operational Risk". Presentado a CAS Annual Meeting.  
Disponible en <http://www.casact.org/coneduc/annual/2005/handouts/khan.pdf> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- SCHAEFER, S. and SCHWARTZ, E.S. (1984): "A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19(4): 413-424.
- SCHEEL, W.C. (2001): "Valuing An Insurance Enterprise". *CAS Forum*, Spring: 295-311.
- SCHMEIDLER, D. (1986): "Integral Representation without Additivity". *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97: 255-261.
- SCHMEISER, H. (2004): "New Risk-Based Capital Standards in the EU: A Proposal Based on Empirical Data". *Risk Management and Insurance Review*, 7(1): 41-52.
- SCHORR, B. (1974): "On the Choice of the Class Intervals in the Application of the Chi-Square Test". *Mathematische Operationsforschung und Statistik*, 5(4): 357-377.
- SCHWARZ, G. (1978): "Estimating the Dimension of a Model". *Annals of Mathematical Statistics*, 6(2): 461-464.
- SILVERMAN, B. W. (1986): *Density Estimation*. London: Chapman and Hall.
- SEGOVIA, M.J, GIL, J.A., VILAR, L. and HERAS, A. J. (2003): "La metodología rough set frente al análisis discriminante en la predicción de insolvencias en empresas aseguradoras". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 9: 153-180.
- SEGOVIA, M.J. (2003): *Predicción de crisis empresariales en seguros no vida mediante la metodología Rough Set*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- SEGOVIA, M.J., SALCEDO, S. and BOUSOÑO, C. (2004): "Prediction of Insolvency in Non-life Insurance Companies using Support Vector Machines, Genetic Algorithms and Simulated Annealing". *Fuzzy Economic Review*, 9(1): 79-94.
- SHAPLEY, L. S. (1953): "A Value for n-person Games", en Kuhn, H. W.y Tucker, A. W. (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, 2, Princeton: Princeton University Press, 307-317 .
- SHARPE, W. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". *Journal of Finance*, 19(3): 425-442.
- SHARPE, W.F. (1966): "Mutual Fund Performance". *Journal of Business*, 39(1): 119-138.

- SHERRIS, M. (1997): "Actuarial Model Assumptions for Inflation, Equity Returns, and Interest Rates". *Journal of Actuarial Practice*, 5(2): 227-252.
- SHERRIS, M. (2006): "Solvency, capital allocation, and fair rate of return in insurance". *The Journal of Risk and Insurance*, 73(1): 71-96.
- SHEVCHENKO, P.V. and WÜTHRICH, M.V. (2006): "The Structural Modelling of Operational Risk via Bayesian Inference: Combining Loss Data with Expert Opinions". *The Journal of Operational Risk*, 1(3):3-26.
- SHIMPI, P.A. y. LOWE, S.P. (2005): "ERM for insurers-From compliance to value". *Emphasis 20th Anniversary Issue*, 18-21.
- SHIMPI, P.A. and LOWE, S.P. (2006): "ERM for Insurers-From Compliance to Value". *Risk Management Newsletter*, 8: 34-38.
- SHIU, Y.-M. (2006): "Dynamic Financial Analysis in Insurance". Presentado a Stochastic Modeling Symposium and Investment Seminar, Toronto (Canadá).  
Disponible en [www.actuaries.ca/meetings/stochastic-investment/2006/pdf/2101\\_v.2.doc](http://www.actuaries.ca/meetings/stochastic-investment/2006/pdf/2101_v.2.doc) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- SIEGEL, J. (2002): *Stocks for the Long Run*, New York: McGraw Hill.
- SIMONS, K. (1996): "Value-at-risk new approaches to risk management". *New England Economic Review*, Sept./Oct.: 3-13.
- SLUTZKY, M. (2006): "Preparing for Solvency II-Theoretical and Practical issues in Building Internal Economic Capital Models Using Nested Stochastic Projections". Presentado a Internacional Congress of Actuaries, París (Francia).  
Disponible en [www.ica2006.com/Papiers/3075/3075.pdf](http://www.ica2006.com/Papiers/3075/3075.pdf) [consultado el 1 de febrero de 2009].
- SMITH, A.D. (1996): "How actuaries can use financial economics". *British Actuarial Journal*, 2(5): 1057-1193.
- SMITH, J. B. (1981): *The Probability Distribution of Market Returns: A Logistic Hypothesis*, Tesis doctoral, University of Utah.
- SMITH, L. and SEGRE-TOSSANI, L. (2003): "Advanced Modeling, Visualization, and Data Mining Techniques for a New Risk Landscape". *CAS Forum*, Summer: 83-97.
- SOCIETY OF ACTUARIES (1996): *Dynamic Financial Condition Analysis Handbook*.
- SOLÁ, F. (2006): "La futura normativa europea sobre Solvencia II", Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones.  
Disponible en <http://www.dgsfp.mineco.es/sector/qis2/Articulo%20sobre%20Solvencia%20II.pdf> [consultado el 1 de Febrero de 2009]
- STANDARD & POOR'S (2003): "Insurer Financial Strength Rating Definitions".  
Disponible en <http://www2.standardandpoors.com/spf/pdf/fixedincome/IFSDDefinitions.pdf> [consultado el 1 de Febrero de 2009].

- STANDARD & POOR'S (2006): *Annual 2005 Global Corporate Default Study And Rating Transitions*.  
 Disponible en [http://www2.standardandpoors.com/spf/pdf/fixedincome/AnnualDefaultStudy\\_2005.pdf](http://www2.standardandpoors.com/spf/pdf/fixedincome/AnnualDefaultStudy_2005.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- SUNDT, B. and JEWEL, W. (1981): "Further results on recursive evaluation of compound distributions". *Astin Bulletin*, 12(1): 27-39.
- SWISS RE (2000): "La solvencia de aseguradores no-vida: una búsqueda de equilibrio entre seguridad y rentabilidad". *Sigma*, 1.
- SWISS RE (2001): "Profitability of the non-life insurance industry". *Sigma*, 5.
- SWISS RE (2005): "Entendendo o resseguro: Como os resseguradores criam valor e administram riscos".
- SWISS RE (2006): "Solvencia II: un enfoque integrado del riesgo para aseguradores europeos", *Sigma*, 4.
- SZKODA, S.T. (1997): "How DFA Can Help the Property/Casualty Industry", *The Actuarial Review*, 24(1).  
 Disponible en <http://www.casact.org/pubs/actrev/may97/dfapt1.htm> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- TANAKA, S. and INUI, K. (1995): "Modelling Japanese financial markets for pension ALM simulations". Presentado a AFIR Colloquium, Brusela (Bélgica), 563-584
- TANG, A. and VALDEZ, E. (2005): "Copulas and capital requirement". Presentado al Actuarial Studies Research Symposium, Sydney (Australia).
- TAUSWORTHE, R. C. (1965): "Random numbers generated by linear recurrence modulo two". *Mathematics of Computation*, 19: 201-209.
- TAYLOR, G. C. (2000): *Loss reserving: an actuarial perspective*. Norwell: Kluwer Academic Publishers.
- THOMSON, R.J. (1994): "A stochastic investment model for actuarial use in South Africa". Presentado a 1994 Convention of the Actuarial Society of South Africa, Ciudad del Cabo (Sudáfrica).  
 Disponible en <http://www.actuarialsociety.org.za/Portals/1/Documents/57ff1121-3a68-4470-9ac9-01cab64be36a.pdf> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- TOWERS PERRIN and CEA (2006): "Solvency II Introductory Guide".  
 Disponible en [http://www.abi.org.uk/Display/File/Child/659/CEA\\_Guide\\_to\\_Solvency\\_II\\_tillinghast.pdf](http://www.abi.org.uk/Display/File/Child/659/CEA_Guide_to_Solvency_II_tillinghast.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- TU, S.T. (1998): "The Application of Cumulative Distribution Functions in the Stochastic Chain Ladder Model". *CAS Forum*, Summer: 389-413.
- TUCKER, A.L. (1992): "A reexamination of finite and infinite variance distributions as models of daily stock returns". *Journal of Business and Economic Statistics*, 10(1): 73-81.

- UNESPA y ICEA (2007): MES v.1: *El Modelo Español de Solvencia paso a paso*. Disponible en <http://www.unespa.es/frontend/unespa/MES--Modelo-Espanol-De-Solvencia-vn2843-vst234> [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- VASICEK, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, 5(2): 177-188.
- VASICEK, O. (1987): "Probability of Loss on Loan Portfolio". KMV Corporation. Disponible en [http://www.moodyskmv.com/research/files/wp/Probability\\_of\\_Loss\\_on\\_Loan\\_Portfolio.pdf](http://www.moodyskmv.com/research/files/wp/Probability_of_Loss_on_Loan_Portfolio.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- VASICEK, O. (1991): "Limiting Loan Loss Probability Distribution". KMV Corporation. Disponible en [http://www.moodyskmv.com/research/whitepaper/Limiting\\_Loan\\_Loss\\_Probability\\_Distribution.pdf](http://www.moodyskmv.com/research/whitepaper/Limiting_Loan_Loss_Probability_Distribution.pdf) [consultado el 1 de Febrero de 2009].
- VASICEK, O. (2002): "The distribution of loan portfolio value". *Risk*, 15(12): 160-162.
- VAUGHN, T.R. (1996): "Simulation Models for Self-Insurance". *CAS Forum*, Spring: 269-290.
- MCNEIL, A. and SALADIN, T. (1997): "The Peaks over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions". *Proceedings of International Astin Colloquium*, Cairns (Australia), 23-43.
- VENTER, G. (1997): "Modeling the Evolution of Interest Rates: The Key to DFA Assets Models". *CAS Forum*, Summer: 135-164.
- VENTER, G. (2002): "Tails of copulas". *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 89: 68–113.
- VERRALL, R.J. (2006): "Claims Reserving Using Credibility Methods", en Teugels, J. y Sundt, B. (eds.) *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley.
- VERRALL, R.J. (2007): "Obtaining Predictive Distributions for Reserves Which Incorporate Expert Opinion". *Variance*, 1(1): 53-80.
- VON NEUMANN, J. (1951): "Various Techniques Used in Connection with Random Digits", *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, 12: 36-38.
- WAKKER, P.P., THALER, R.H. and TVERSKY, A. (1997): "Probabilistic Insurance". *Journal of Risk and Uncertainty*, 15(1): 7-28.
- WALKER (1996): "Stochastic error, parameter error & model error". Presentado a General Insurance Convention, Stratford (Inglaterra).
- WALLING III, R.J., HETTINGER, T.E., EMMA, C.C. and ACKERMAN, S. (1999): "Customizing the Public Access Model Using Publicly Available Data". *CAS Forum*, Summer: 239-266.
- WANG, S.S. (1998a): "An Actuarial Index on the Right-Tail risk". *North American Actuarial Journal*, 2(2): 88-101.
- WANG, S.S. (1998b): "Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms". *Proceeding of the Casualty Actuarial Society*, 85(163): 848-937.

- WANG, S.S. (1999): "Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms". CAS Committee on Theory of Risk.
- WANG, S.S. (2002a): "A Risk Measure That Goes Beyond Coherence". Presentado a Internacional Congress of Actuaries, Cancún (México).
- WANG, S.S. (2002b): "A Set of New Methods and Tools for Enterprise Risk Capital Management and Portfolio Optimization". *CAS Forum*, Summer: 43-77.
- WANG, J.T. (2005): "A Practical Discussion of EVT-Based Modeling of Operational Risk". Presentado a Extreme Value Models Research Committee of the Society of Actuaries.
- WARTHEN III, T.V. and SOMMER, D.B. (1996): "Dynamic Financial Modeling-Issues and Approaches". *CAS Forum*, Spring: 291-330.
- WATSON WYATT (2005): "DFA como herramienta de planificación estratégica". *Contribuciones al debate en seguros generales*, 1.
- WHITTEN, S.P. and THOMAS, R.G. (1999): "A Non-Linear Stochastic Model for Actuarial Use". *British Actuarial Journal*, 5(5): 919-953.
- WICHMAN, B.A. and HILL, I.D. (1982): "Algorithm AS 183: An Efficient and Portable Pseudo-Random Number Generator". *Applied Statistics*, 31(2): 188-190.
- WICHMAN, B.A. and HILL, I.D. (1987): "Building a Random-Number Generator", *BYTE*, 12(3): 127-128.
- WIESNER, E.R. and EMMA, C.C. (2000): "A Dynamic Financial Analysis Application Linked to Corporate Strategy". *CAS Forum*, Summer: 79-104.
- WISER, R. F., COCKLEY, J. E. and GARDNER, A. (2001): "Loss Reserving", en *Casualty Actuarial Society* (ed.): *Foundations of Casualty Actuarial Science*, 197-285.
- WILKIE, D. (1986): "A Stochastic Investment Model for Actuarial Use". *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 39: 341-403.
- WILKIE, D. (1995): "More on a Stochastic Model for Actuarial Use". *British Actuarial Journal*, 1(5): 777-964.
- WITCRAFT, S.E. (1998): "Profitability Targets: DFA Provides Probability Estimates". *CAS Forum*, Summer: 273-302.
- WOLL, R.G. (1987): "Insurance Profits: Keeping Score, Financial Analysis of Insurance Companies". *Casualty Actuarial Society Discussion Paper Program*, 446-533.
- WONG, C.S. and CHAN, W.S. (2005): "Mixture Gaussian Time Series Modeling of Long-Term Market Returns". *North American Actuarial Journal*, 9(4): 83-94.
- WONG, C.S. and LI, W.K. (2000): "On a Mixture Autoregressive Model". *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 62(1): 95-115.

- WONG, C.S. and LI, W.K. (2001): "On a Mixture Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model". *Journal of the American Statistical Association*, 96(455): 982-995.
- WU, M. L. (2007): *Modelling Dependent Risks for Insurer Risk Management: Experimental Studies with Copulas*. Tesis Doctoral, University of New South Wales.
- YAARI, M.E. (1987): "The Dual Theory of Choice under Risk". *Econometrica*, 55(1): 95-115.
- YAKOUBOV, Y.H., TEEGER, M.H. and DUVAL, D.B (1999): "The TY Model: A Stochastic Investment Model for Asset and Liability Management". Staple Inn Actuarial Society, Disponible en [www.sias.org.uk/data/papers/TYModel/DownloadPDF](http://www.sias.org.uk/data/papers/TYModel/DownloadPDF) [consultado el 1 de marzo de 2009].

## COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Instituto de Ciencias del Seguro

**Para cualquier información o para adquirir nuestras publicaciones  
puede encontrarnos en:**

FUNDACIÓN MAPFRE

Publicaciones

Paseo de Recoletos 23 – 28004 Madrid – (España)

Telf.: +34 915 818 768 Fax: +34 915 818 409

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)

153. El análisis financiero dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. 2010
152. Características sociodemográficas de las personas con doble cobertura sanitaria. Un estudio empírico. 2010
151. Solidaridad Impropia y Seguro de Responsabilidad Civil. 2010
150. La prevención del blanqueo de capitales en las entidades aseguradoras, las gestoras y los corredores de seguros. 2010
149. Los fondos de aseguramiento agropecuario y rural: la experiencia mexicana en el mutualismo agropecuario y sus organizaciones superiores. 2010
148. Avaliação das Provisões de Sinistro sob o Enfoque das Novas Regras de Solvência do Brasil. 2010
147. El principio de igualdad sexual en el Seguro de Salud. Análisis actuarial de su impacto y alcance. 2010
146. Investigaciones históricas sobre el Seguro español. 2010
145. Perspectivas y análisis económico de la futura reforma del sistema español de valoración del daño corporal. 2009
144. Contabilidad y Análisis de Cuentas Anuales de Entidades Aseguradoras (Plan contable 24 de julio de 2008). 2009
143. Mudanças Climáticas e Análise de Risco da Indústria de Petróleo no Litoral Brasileiro. 2009

142. Bases técnicas dinámicas del Seguro de Dependencia en España. Una aproximación en campo discreto. 2009
141. Transferencia Alternativa de Riesgos en el seguro de Vida: Titulización de Riesgos. 2009
140. Riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos. 2009
139. Optimización económica del Reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Optimización económica del Reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2008
128. Cuestiones sobre la cláusula *cut through*. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008

124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento *bootstrap*. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008
121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006
108. Mercados de absorción de riesgos. 2006

107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos "ART": situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender? 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político? 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004

87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001

67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
45. Los Impuestos en una economía global. 1999

42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998

41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1997

Fundación MAPFRE Estudios

39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997

38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997

37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997

36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997

35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997

34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995

33. La función del derecho en la economía. 1997

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1996

Fundación MAPFRE Estudios

32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996

31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996

30. El tiempo del directivo. 1996

29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1995

Fundación MAPFRE Estudios

28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995

27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995

26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1994  
Fundación MAPFRE Estudios

22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994

Nº Especial Informe sobre el mercado español de seguros 1993  
Fundación MAPFRE Estudios

16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993
12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de controlling estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991

4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991